Пример дифференцирования с бесконечно порождённым ядром, пример в размерности 5

Первый доклад:

Пусть $R_0 = \boldsymbol{k}[a,s,t,u]$ - кольцо многочленов от четырёх переменных, $D = a\partial_s + s\partial_t + t\partial_u$ - треугольное LND на R_0 и однородное в $\mathbb{Z}^2$ градуировке со степенью (0,-1), где степени переменных равны $deg\, a = (1,0)$, $deg\, s = (1,1)$, $deg\, t = (1,2)$, $deg\, u = (1,3)$, определим последовательность $t_n \in \boldsymbol{k}[a]$ следующим образом $t_1 = a$, $t_2 = 1$, $t_3 = a$, $t_n = t_{n-3}, n \geq 4$ - периодическая с периодом 3, также определим последовательность степеней

$$\delta_0 = (0,0),\ \ \delta_n = (0,n) + \sum_{j=1}^{n} deg\, t_j, n \geq 1$$

Первая важная теорема, она же алгоритм для построения некой вспомогательной последовательности:

Теорема 1: Существует последовательность однородных многочленов $w_n \in R_0, n \geq 0,$ такая что $w_0 = 1$, $w_1 = s$, $Dw_n = t_n w_{n-1}, \forall n \geq 1$ & $deg\, w_n = \delta_n, \forall n$

Доказательство: Индукция — пусть первые w_n уже построены, построим n+1-ый, причём пусть $w_m \in aR_0, m \equiv 1 (mod\, 3), m > 1.$ Докажем в 3 шага.

Шаг 1: для любого $m \geq 1$ определим $\lambda_{(m,0)} = \lambda_{(m,m)} = 1.$ Докажем, что для каждого m,i, где $3 \leq m \leq n+1$, $1 \leq i \leq m-1$, существует единственное $\lambda(m,i) \in \{1, a, a^{-1}\}$, такое что $\lambda_{(m,i)} w_i w_{m-1} \in R_0$ & $deg(\lambda_{(m,i)} w_m w_{m-i}) = \delta_m$. $\mathbb{Z}^2$ градуировка на R_0 определяет $\mathbb{Z}^2$ градуировку на $R_0[a^{-1}]$ естественным образом. Распишем чему равна степень многочлена: $deg(\lambda_{(m,i)} w_m w_{m-i}) = \delta_m \Leftrightarrow deg\, \lambda_{(m,i)} + \delta_i + \delta_{m-i} = \delta_m \Leftrightarrow$ (после преобразования сумм)

$$\Leftrightarrow deg\, \lambda_{(m,i)} + \sum_{j=1}^{i} deg\, t_j = \sum_{j=m-i+1}^{m} deg\, t_j.$$

Учитывая что последовательность t_n — периодическая и сумма 3-ёх последовательных членов имеет степень (2,0), мы можем сократить с каждой стороны равное количество групп по 3, более того, с каждой стороны у нас поровну членов суммирования, значит разности сумм отличаются не более чем на (1,0), т. е. $\lambda_{(m,i)} \in \{1, a, a^{-1}\}$, причём $\lambda_{(m,i)} = a^{-1} \Leftrightarrow i \equiv 1 (mod\, 3) \& m \equiv 2 (mod\, 3) \Rightarrow w_{m-i} \in aR_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_{(m,i)} w_m w_{m-i} \in R_0$

Шаг 2: Рассмотрим множество индексов из $\mathbb{Z}^2$ – $\{(m,i): 3 \leq m \leq n+1, 1 \leq i \leq \frac{m}{2}\} \cup$ $\cup \{(m,0): 3 \leq m \leq n\}$, причём w_i и w_{m-i} определены на этом множестве. Зададим многочлены $\zeta_{(m,i)} = \zeta_{(m,m-i)} = \lambda_{(m,i)} w_i w_{m-i}$, где m и i берутся из определённого выше множества. Заметим так же, что $\zeta_{(m,i)} \in R_0, m \equiv 1 (mod\, 3).$ Дифференцирование D действует на эти многочлены следующим образом $D\zeta_{(m,i)} = t_{m-i} \lambda_{(m,i)} w_i w_{m-i-1} + t_i \lambda_{(m,i)} w_{i-1} w_{m-i}$, $4 \leq m \leq n+1 \& 1 \leq i \leq m$ Вычисляя степени, можно показать, что $t_{m-i} \lambda_{(m,i)} = t_m \lambda_{(m-1,i)}$, $t_i \lambda_{(m,i)} = t_m \lambda_{(m-1,i-1)}$, так как их степени равны в $\mathbb{Z}^2$ градуировке на $\boldsymbol{k}[a,a^{-1}]$. Таким образом действие дифференцирования можно переписать в более удобном виде: $D\zeta_{(m,i)} = t_m(\zeta_{(m-1,i)} + \zeta_{(m-1,i-1)})$

Шаг 3: Можно строить последовательность w_m. Первые 7 членов находятся непосредственно, далее будем строить блоками по 6. Пусть у нас есть первые $w_1,\ldots,w_{6m-5}$. Пусть n=6m-4 — чётно, определим

$$w_n = \zeta_{(n,1)} - \zeta_{(n,2)} + \zeta_{(n,3)} - \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \zeta_{(n,\frac{n-2}{2})} + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n+2}{2}} \zeta_{(n,\frac{n}{2})}$$

Применяя дифференцирование D и пользуясь тем, что $\zeta_{(n-1,\frac{n}{2})} = \zeta_{(n-1,\frac{n-2}{2})}$ получим требуемое условие $Dw_n = t_n w_{n-1}$. Затем строим w_{6m-2} методом неопределённых коэффициентов как многочлен от $\zeta_{(n,i)}$ для $1 \leq i \leq$ n/2. Процесс сложный технически и я его приводить не буду, важно то, что уравнение $D^2 w_n = t_n t_{n-1} w_{n-2} = a w_{n-2}$ имеет решение. Далее рекуррентно строятся члены последовательности для n=6*m*-3, 6*m*-1, 6*m*+1 и 6*m*. □

Следствие: Впоследствии будет полезным - $D^{3\mathrm{m}} w_{3\mathrm{m}} = a^{2\mathrm{i}} w_{3(m-i)}$

Второй доклад:

Ещё нам понадобиться несложная технически, но нетривиальная в понимании лемма:

Лемма (критерий бесконечнопорождённости):

Пусть R – градуированная множеством $\mathbb{Z}_+$ алгебра, такая что R_0=$\boldsymbol{k}$ и пусть δ — однородное LND дифференцирование на R. Пусть $\alpha \in ker\,\delta\,, \alpha \notin \delta(R)\,,$ $\bar{\delta}$ — расширение δ на алгебру $R[T]$ определённое как $\bar{\delta}T=\alpha$, где T – переменная над R. Пусть существует $\{\beta_n\}, \beta_n \in ker\,\bar{\delta}\,, \beta_n \neq 0,$ со старшими T-коэффициентами $b_n \in R.$ Тогда, если $deg\ b_n$ ограниченны в R, а $deg_T\,\beta_n$ – неограниченны, то $ker\,\bar{\delta}$ – не конечно порождено.

Доказательство:

Пусть $M[T]$ — расширение в $R[T]$ максимально идеала в R, составленного из компонент положительной степени. Пусть $m=deg\ \alpha - deg\ \delta,$ и для натурального n определим $R[T]_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} R_{n-mi} T^i.$ Тогда $R[T]_n$ – компоненты $\mathbb{Z}$ градуировки на $R[T]$, в которой $\bar{\delta}$ будет однородно.

Пусть $\phi \in ker\,\bar{\delta}$ - однородно, тогда $\phi = \sum \phi_i T^i$ для однородных $\phi_i \in R.$ Так как $\bar{\delta}(\phi)=0$ следует, что $\delta(\phi_{i-1}) = -i\,\alpha\,\phi_i\,, i>0.$ Поэтому $\phi_i \notin \boldsymbol{k}^*,$ иначе $\alpha = \delta(-i^{-1}\phi_i^{i-1}\phi_{i-1}) \in \mathrm{Im}(\delta).$ Поэтому для $i>0,$ $\phi_i \in M$ Из того, что $\phi_0 \in \boldsymbol{k}+M$ заключаем, что $\phi \in \boldsymbol{k}+M[T].$ Для неоднородного ψ аналогично (раскладываем на сумму однородных φ). Таким образом $ker\,\bar{\delta} \subset \boldsymbol{k}+M[T]$

Наконец, пусть $\{\beta_n\} \subset \boldsymbol{k}[f_1, \ldots, f_N], f_i \in ker\,\bar{\delta}.$ Тогда все f_i принадлежат $\boldsymbol{k}$+$M[T]$ и без потери общности можем считать, что $f_i \in M[T].$ Но тогда $\beta_n \in \langle F \rangle,$ где F – конечное множество состоящее из произведений f_i, в противном случае, так как все $f_i \in M[T],$ $deg\ b_n$ не могут быть ограниченными. Но если F конечно, то $deg_T\,\beta_n$ напротив будут ограниченны — противоречие.

Наконец видим цель:

Теорема 2 (Daigle and Freudenburg):

R=$\boldsymbol{k}[x,s,t,u,v]$ с дифференцированием Δ(~$\bar{\delta}$ в условия леммы) $= x^3\partial_s + s\,\partial_t + t\,\partial_u + x^2\partial_v$ имеет бесконечно порождённое как $\boldsymbol{k}$-алгебра ядро.

Доказательство:

Возьмём алгебру R_0 из т.1 и присоединим к ней целый элемент x с решением x^3=a и трансцендентный элемент v(~T в условиях леммы), тогда $R_0[x,v]$ эквивалентна R, причём $\Delta|_{R_0} = D.$

Лемма: Пусть $A = ker\,\Delta$ и $\pi_v : S \to A_{\Delta v}$ - отображение Диксмие для Δ, индуцированное локальным слайсом v. Для каждого $m \geq 1,$ $(-1)^{3\mathrm{m}}(3\mathrm{m})!\,\pi_v(x w_{3\mathrm{m}})$ лежит в A и имеет вид $x v^{3\mathrm{m}} + \sum_{i=0}^{3\mathrm{m}-1} b_i v^i,$ $(b_i \in \boldsymbol{k}[x,s,t,u])$

Доказательство: по т.1 и следствию получаем:

$$\Delta^{3\mathrm{i}}(x w_{3\mathrm{m}}) = x(\Delta v)^{3\mathrm{i}} w_{3(m-i)} \qquad (0 \leq i \leq m)$$
$$\Delta^{3\mathrm{i}+1}(x w_{3\mathrm{m}}) = x^2(\Delta v)^{3\mathrm{i}+1} w_{3(m-i)-1} \qquad (0 \leq i \leq m)$$
$$\Delta^{3\mathrm{i}+2}(x w_{3\mathrm{m}}) = (\Delta v)^{3\mathrm{i}+2} w_{3(m-i)-2} \qquad (0 \leq i \leq m)$$

Заметим, что $(\Delta v)^j$ делит $\Delta^j(x w_{3\mathrm{m}})$ для любого $0 \leq j \leq 3\mathrm{m}.$ Следовательно образ Диксмие для xw_{3m} принадлежит А, ч.т.д.

Завершение доказательства: Отождествив xw_{3n} с β_n и применив лемму-критерий мы получим то что надо.