Способы проверки локальной нильпотентности дифференцирования

k - поле нулевой характеристики.

1. Многочлены от двух переменных.
$B = k[x, y]$, $D \in Der_k(B)$.
$d = \max\{deg_x(Dx), deg_x(Dy), deg_y(Dx), deg_y(Dy)\}$.

Предложение 1. *D - ЛНД* $\Leftrightarrow D^{d+2}(x) = D^{d+2}(y) = 0$.

Доказательство. Стрелка влево очевидна - если дифференцирование нильпотентно на порождающих алгебры, то оно локально нильпотентно. Значит, остаётся доказать стрелку вправо.
Во-первых, можно считать, что D - неприводимое дифференцирование.

Определение. *D - приводимое дифференцирование, если $\exists b \in B$, т.ч. $D(B) \subset bB$. Иначе, D - неприводимое.*

В самом деле, если D приводимо, то оно представляется в виде aH, где $a \in B$, $H \in Der_k(B)$ (т.к. B - факториальное кольцо). Причём $a \in \ker D$ и H - ЛНД (см. [1], §1.4, Principle 7). Теперь можно вместо D рассматривать H, потому что при умножении H на элемент ядра d будет только увеличиваться, тогда как $\nu_D(x)$ и $\nu_D(y)$ останутся неизменными ($\nu_D(f) = \min\limits_A n$, где $A = \{n \in \mathbb{N} | D^{n+1}(f) = 0\}$).

Теорема. *$\exists P, Q \in B$: $\ker H = k[P], H(Q) \in k[P]$. $H = P_y \partial x - P_x \partial y$.*

Эта теорема доказывается в [1], Chapter 4. Заметим, что она верна только для неприводимых дифференцирований (H как раз неприводимо).
$deg_x P = [k(x, y) : k(P, y)] = [k(P, Q) : k(P, y)] = deg_Q y = \nu_H(y)$.
$deg_y P = [k(x, y) : k(P, x)] = [k(P, Q) : k(P, x)] = deg_Q x = \nu_H(x)$.
$deg_x Hx = deg_x P_y \leq deg_x P = \nu_H(y)$.
$deg_y Hx = deg_y P_y = deg_y P - 1 = \nu_H(x) - 1$.
$deg_x Hy = deg_x P_x = deg_x P - 1 = \nu_H(y) - 1$.
$deg_y Hy = deg_y P_x \leq deg_y P = \nu_H(x)$. □

2. Частичный критерий нильпотентности.
$B = k[b_1, ..., b_n]$, $D \in Der_k(B)$.
$N = \max\limits_i \{[frac(B) : k(x_1, ..., x_{n-1}, b_i)] | Db_i \neq 0\}$.

Предложение 2. *Пусть степень трансцендентности B над $\ker D$ равняется 1, $x_1, ..., x_{n-1}$ - базис трансцендентности $\ker D$ над k, $N < \infty$. Тогда D - ЛНД $\Leftrightarrow$ $D^{N+1}(b_i) = 0$ $\forall i$.*

Предложение немедленно следует из следующего утверждения.

Утверждение. *Пусть D - ЛНД, $L = \mathrm{frac}(B)$, $K = \mathrm{frac}(\ker D)$. Если $b \in B$, $b \notin \ker D$, то $\nu_D(b) = [L : K(B)]$.*

Это утверждение, в свою очередь, следует из [1], §1.4, Principle 11.

3. Многочлены от трёх переменных.
$B = k[x, y, z]$, $D \in Der_k(B)$ - однородное относительно стандартной $\mathbb{Z}$-градуировки.
$e = [\frac{1}{4}(degD + 3)^2 + 1]$.

Предложение 3. *D - ЛНД* $\Leftrightarrow D^{e+1}x = D^{e+1}y = D^{e+1}z = 0$.

Доказательство. Можно считать, что D неприводимо (как в предложении 1). Для неприводимых дифференцирований B существует теорема, аналогичная приведённой в доказательстве предложения 1. Она утверждает, что $\ker D = k[f, g]$ для некоторых однородных многочленов f и g и что $D = \Delta_{(f,g)}$.

Определение.

$$\Delta_{(f,g)} = \begin{pmatrix} \partial x & \partial y & \partial z \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix}.$$

Далее нам понадобится ещё одно утверждение ([2], Prop. B.2.7).

Утверждение. $[k(x_1, ..., x_n) : k(F_1, ..., F_n)] \leq (degF_1)...(degF_n)$.

Пусть $N = [k(x, y, z) : k(f, g, x)] \leq deg(f)deg(g)$. По частичному критерию нильпотентности, $D^{N+1}x = 0$. Поскольку f и g однородные, $degD + 1 = deg(Dx) = deg(f_y g_z - g_y f_z) = deg(f) + deg(g) - 2 \leq d$, где $d = \max\{deg(Dx), deg(Dy), deg(Dz)\}$. Теперь остаётся найти максимум выражения $(deg(f)deg(g)+1)$, где $deg(f)+deg(g) = degD + 3$. □

Литература

1. G. Freudenburg, Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations.
2. A. van den Essen, Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture.