Лекция 1. Основные понятия

13 декабря 2017 г.

1°. Определения и примеры.

Определение 1.1. *Кольцом* (в нашем курсе) называется множество $(R, +, \cdot)$ с двумя бинарными операциями, удовлетворяющими следующим аксиомам:
1) $(R, +)$ — абелева группа с нейтральным элементом 0 (аддитивная группа кольца);
2) $(R, \cdot)$ — моноид, т.е. полугруппа (операция $\cdot$ ассоциативна) с единицей, которую мы будем обозначать цифрой 1 либо иногда символом e — мультипликативная полугруппа кольца;
3) выполнены тождества *дистрибутивности*:

$$\forall a, b, c \in R, \quad a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Примеры колец: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$

Определение 1.2. Пусть R, S — кольца. Отображение $f : R \to S$ называется гомоморфизмом кольца R в кольцо S, если оно сохраняет операции:

$$\forall a, b \in R, \quad f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b).$$

Гомоморфизм назовем унитарным, если он отображает единицу кольца R в единицу кольца S. Гомоморфизм называется изоморфизмом, если он является биективным отбражением. Кольца, между которыми имеется изоморфизм, называются изоморфными (обозначение $R \cong N$). С каждым гомоморфизмом колец $f : R \to S$ связаны его образ $\mathrm{Im}(f) = f(R)$ и ядро $\ker(f) = \{x \in R : f(x) = 0\}$.

Конструкции колец: если R — кольцо, то
1) Кольцо $R[x]$ многочленов от одной переменной над R.
2) Кольцо формальных степенных рядов $R[[x]]$ от одной переменной.
3) Кольцо $M_n(R)$ квадратных матриц размера $n \times n$ с элементами из R.
4) Подкольцо произвольного кольца R, т.е. подмножество, содержащее 0, 1 и замкнутое относительно операций сложения, взятия противоположного элемента и умножения.
5) Образ $f(R)$ кольца R при гомоморфизме колец $f : R \to S$.
6) Прямое произведение $\prod_{\alpha \in A} R_\alpha$ произвольного непустого семейства колец $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (множество строк (r_α), где $\forall \alpha \in A, r_\alpha \in R_\alpha$, с покомпонентными сложением и умножением.

Этот список будет продолжен ниже.

Определение 1.3. Правым модулем над кольцом R, или правым R-модулем, называется абелева группа $(M, +)$ с определёнными на ней операциями умножения справа на элементы кольца R, которые удовлетворяют тождествам

$$\forall a, b \in M,\ r, s \in R,\ a(rs) = (ar)s,\ (a + b)r = ar + br,\ a(r + s) = ar + as, a \cdot 1 = a.$$

Определение 1.4. Отображение $f : M \to N$ правых модулей над кольцом R называется гомоморфизмом, если

$$\forall a, b \in M,\ r \in R,\ f(a + b) = f(a) + f(b),\ f(ar) = f(a)r.$$

Гомоморфизм модулей называется изоморфизмом, если он является биективным отбражением. Модули, между которыми имеется изоморфизм, называются изоморфными (обозначение $M \cong N$). С каждым гомоморфизмом модулей $f : M \to N$ связаны его образ $\mathrm{Im}(f) = f(M)$ и ядро $\ker(f) = \{x \in M : f(x) = 0\}$.

Примеры и конструкции модулей:

1) Абелева группа = модуль над кольцом $\mathbb{Z}$.
2) Векторное пространство над полем F = F-модуль.
3) Кольцо R является правым R модулем (обозначается R_R).
4) Подмодуль произвольного модуля M (т.е. его подмножество, содержащее 0 и замкнутое относительно операций сложения, взятия противоположного элемента и умножения на элементы кольца) и образ $f(M)$ при произвольном гомоморфизме $f : M \to N$.
5) Прямое произведение $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha$ произвольного непустого семейства R-модулей $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (множество строк (m_α), где $\forall \alpha \in A, m_\alpha \in M_\alpha$, с покомпонентными сложением и умножением на элементы кольца R.
6) Прямая сумма $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ произвольного непустого семейства R-модулей $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ (множество строк (m_α), где $\forall \alpha \in A, m_\alpha \in M_\alpha$ и $m_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in A$, кроме, может быть, конечного множества, с покомпонентными сложением и умножением на элементы кольца R.

2°. Подмодули, идеалы, фактормодули и факторкольца. Пусть M — правый R-модуль. На множестве $\mathcal{L}(M)$ всех его подмодулей определены две основные операции: пересечение и сумма произвольного семейства подмодулей (сумма $\sum_{\alpha \in A} N_\alpha$ семейства подмодулей $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ модуля M определяется как множество всевозможных конечных сумм вида $x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_n}$, где $x_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}$ и $\alpha_i \in A$ при всех $i = 1, \ldots, n$).

Теорема 1.5. *Множество $\mathcal{L}(M)$ является модулярной решёткой, т.е. если $A, B, C \in \mathcal{L}(M)$ и $A \subseteq B$, то $B \cap (A + C) = A + (B \cap C)$.*

Определение 1.6. Подмножество I кольца R называется правым (левым) идеалом этого кольца, если I — подмодуль правого модуля R_R (левого модуля ${}_R R$). Подмножество кольца R, которое является и правым и левым идеалом кольца R, называется идеалом (иногда уточняется: двусторонним идеалом) кольца R, что обозначается так: $I \lhd R$.

Предложение 1.7. *Пусть $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство подмодулей модуля M. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) Если $x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_n} = 0$, где $x_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ попарно различны, то $x_{\alpha_1} = \ldots = x_{\alpha_n} = 0$.
2) Для любого $\alpha \in A$, $N_\alpha \cap (\sum_{\beta \in A \setminus \{\alpha\}} N_\beta) = 0$.

Определение 1.8. Если для семейства подмодулей $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ модуля M выполнены условия предложения 1.7, то говорят, что это семейство образует прямую сумму подмодулей. В этом случае сумма данного семейства обозначается так: $\bigoplus_{\alpha \in A} N_\alpha$. Подмодуль N модуля M называется прямым слагаемым, если существует подмодуль K модуля M, такой, что $M = N \oplus K$.

Предложение 1.9. *Следующие условия эквивалентны:*
1) N — прямое слагаемое модуля M.
2) Существует гомоморфизм $\pi : M \to M$, такой, что $\pi^2 = \pi$ и $\pi(M) = N$.

Определение 1.10. Пусть N — подмодуль правого R-модуля M. Рассмотрим множество всех смежных классов $\{x + N : x \in M\}$ аддитивной группы модуля M по подгруппе N и зададим на этом множестве операции $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$, $(x + N)r = xr + N$ для любых $x, y \in M$ и $r \in R$. Множество смежных классов, снабжённое этими операциями, оказывается правым R-модулем. Этот модуль называется фактор-модулем модуля M по подмодулю N и обозначается M/N. Отображение $\pi : M \to M/N$, заданное равенством $\pi(x) = x + N$ для любого $x \in M$, называется каноническим гомоморфизмом модуля на на фактор-модуль.

Теорема 1.11 (О гомоморфизме модулей)**.** *Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм модулей, $K = \ker(f)$ и $\pi : M \to M/K$ — канонический гомоморфизм. Тогда:*
1) Существует единственный гомоморфизм $\overline{f} : M/K \to N$, для которого $\pi\overline{f} = f$ (см. диаграмму).
2) $M/K \cong \mathrm{Im}(f)$ (первая теорема об изоморфизме).
3) Существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее включения, между множеством всех подмодулей в $\mathrm{Im}(f)$ и множеством подмодулей в M, содержащих K.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/K \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Следствие 1.12 (Вторая теорема об изоморфизме)**.** *Пусть N, K — подмодули модуля M. Тогда $(N + K)/K \cong N/(N \cap K)$.*

Следствие 1.13 (Третья теорема об изоморфизме)**.** *Пусть N, K — подмодули модуля M, причем $K \subseteq N$. Тогда $(M/K)/(N/K) \cong M/N$.*

Определение 1.14. Пусть I — идеал (двусторонний!) кольца R. Рассмотрим множество всех смежных классов $\{x + I : x \in R\}$ аддитивной группы кольца R по подгруппе I и зададим на этом множестве операции $(x+I)+(y+I) = (x+y)+I$, $(x + I)(y + I) = xy + I$ для любых $x, y \in R$. Полученное кольцо называется фактор-кольцом кольца M по идеалу N и обозначается M/N. Отображение $\pi : M \to M/N$, заданное равенством $\pi(x) = x + I$ для любого $x \in R$, называется каноническим гомоморфизмом кольца на фактор-кольцо.

Теорема 1.15 (О гомоморфизме колец)**.** *Пусть $f : R \to S$ — гомоморфизм колец, $K = \ker(f)$ и $\pi : R \to R/K$ — канонический гомоморфизм. Тогда:*
1) Существует единственный гомоморфизм $\overline{f} : R/K \to S$, для которого $\pi\overline{f} = f$ (см. диаграмму).
2) $R/K \cong \mathrm{Im}(f)$ (изоморфизм колец).
3) Существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее включения, между множеством всех правых (левых, двусторонних) идеалов в $\mathrm{Im}(f)$ и множеством правых (левых, двусторонних) идеалов в R, содержащих K.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S \\ R/K \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

3°. Системы образующих. Свободные модули.

Определение 1.16. Пусть S — произвольное множество элементов правого модуля M над кольцом R. Наименьший (по включению) подмодуль SR модуля M, содержащий множество S, называется подмодулем, порождённым множеством S. Аналогично определяется правый (левый, двусторонний) идеал TR (RT, RTR), порожденный подмножеством T кольца R. Если $N = SR$, говорят также, что S — система образующих подмодуля N. Аналогично, если $I = TR$ ($I = RT, I = RTR$), то говорят, что T — система образующих правого (левого, двустороннего) идеала I.

Предложение 1.17. *Пусть S — произвольное множество элементов правого модуля M над кольцом R. Тогда*

$$SR = \{x_1r_1 + \ldots + x_nr_n : x_i \in S, r_i \in R, i = 1, \ldots, n,\ n \geq 0\}.$$

Если T — подмножество кольца R, то

$$\begin{array}{rcl} TR & = & \{x_1r_1 + \ldots + x_nr_n : x_i \in T, r_i \in R,\ i = 1, \ldots, n,\ n \geq 0\} \\ RT & = & \{r_1x_1 + \ldots + r_nx_n : x_i \in T, r_i \in R,\ i = 1, \ldots, n,\ n \geq 0\} \\ RTR & = & \{a_1x_1b_1 + \ldots + a_nx_nb_n : x_i \in T,\ a_i, b_i \in R,\ i = 1, \ldots, n,\ n \geq 0\} \end{array}$$

Модуль, имеющий систему образующих из одного элемента, называется *циклическим* модулем. Правый (левый, двусторонний) идеал, имеющий систему образующих из одного элемента, называется *главным* правым (левым, двусторонним) идеалом. Модуль (правый идеал, левый идеал, идеал), имеющий конечную систему образующих, называется *конечно порождённым.*

Определение 1.18. Подмножество X правого модуля F над кольцом R называется базисом этого модуля, если
1) X есть система образующих модуля F и
2) X есть линейно независимая система, т.е. для любых различных элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$ и произвольных $r_1, \ldots, r_n \in R$ из равенства $x_1r_1 + \ldots + x_nr_n = 0$ вытекает, что $r_1 = \ldots = r_n = 0$. Если модуль обладает базисом, то он называется свободным модулем.

Теорема 1.19. *Пусть X — произвольное множество, R — кольцо. Тогда существует свободный правый R-модуль с базисом X и он изоморфен модулю $R^{(X)} = \bigoplus_{x \in X} R_x$, где $R_x \cong R_R$ для любого $x \in X$.*

Теорема 1.20. *Следующие условия эквивалентны:*
1) F — свободный R-модуль с базисом X;
2) для любого элемента $x \in F$ существует единственный набор различных элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$ и единственный набор ненулевых элементов $r_1, \ldots, r_n$, такие, что $x = x_1r_1 + \ldots + x_nr_n$;
3) для любого R-модуля M и любого отображения $f : X \to M$ существует единственный гомоморфизм $\tilde{f} : F \to M$, такой, что $\tilde{f}|_X = f$.

Следствие 1.21. *Любой модуль изоморфен некоторому фактор-модулю некоторого свободного модуля.*

4°. Лемма Цорна Под *частично упорядоченным множеством* (ч.у.м.) мы понимаем произвольное множество S с заданным на нём отношением $\succ$, удовлетворяющим аксиомам рефлексивности ($a \succ a$), транзитивности ($a \succ b$ & $b \succ c \Rightarrow a \succ c$) и антисимметричности ($a \succ b$ & $b \succ a \Rightarrow a = b$). Под *цепью* в ч.у.м. S называется подмножество, любые два элемента которых сравнинмы. *Максимальным элементом* ч.у.м. S называется такой элемент $a \in S$, что $b \succ b \Rightarrow a = b$. *Верхней гранью* подмножества T ч.у.м. S называется такой элемент $s \in S$, что $s \succ t$ для любого $t \in T$.

Лемма Цорна Если S — непустое частично упорядоченное множество, в котором каждая цепь имеет верхнюю грань, то в есть хотя бы один максимальный элемент.

Лемма Цорна эквивалентна аксиоме выбора, поэтому мы считаем её одной из аксиом теории множеств.

Задачи к лекции 1.

Задача 1.1. Опишите все прямые слагаемые $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

Задача 1.2. Приведите пример модуля, не имеющего базиса.

Задача 1.3. Приведите пример свободного модуля, имеющего два базиса, которые содержат разное число элементов.

Задача 1.4. Докажите, что если $N_1 \subset N_2 \subset \ldots$ — строго возрастающая цепочка подмодулей модуля M, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ — подмодуль модуля M, который не является конечно порождённым.

Задача 1.5. Докажите, что если каждый циклический правый модуль над кольцом R является свободным, то каждый правый идеал кольца R — главный.

Задача 1.6. Докажите, что следующие свойства ненулевого кольца R эквивалентны:
1) Все правые R-модули свободны;
2) Все конечно порождённые правые R-модули свободны;
3) Все циклические правые R-модули свободны;
4) Кольцо R — тело.

Лекция 2. Проективные и инъективные модули

В этой лекции R обозначает произвольное кольцо (ассоциативное, с единицей). Абелеву группу всех гомоморфизмов модуля M в модуль N (относительно поточечного сложения) мы будем обозначать через $\mathrm{Hom}(M, N)$.

1°. Проективные модули.

Определение 2.1. Правый (левый) R-модуль P называется *проективным*, если любая точная последовательность правых(левых) R-модулей $0 \to K \to L \to P \to 0$ расщепляется.

Предложение 2.2. *Пусть P — правый R-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *P — проективный модуль;*
(2) *Существует такой свободный модуль F, что $F = P \oplus P'$ для некоторого модуля P';*
(3) *существует такое семейство элементов $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq P$ и такое семейство гомоморфизмов $\{f_\alpha\} \subseteq \mathrm{Hom}(P, R)$, что $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha f_\alpha(x)$ (в последней сумме все слагаемые, кроме конечного числа, равны нулю).*
(4) *Для любой точной строки $B \to A \to 0$ и любого гомоморфизма $f : P \to A$ существует гомоморфизм $\tilde{f}$, делающий коммутативной диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\tilde f"'] \arrow[d, "f"] & \\
B \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Если $0 \to K \to F \to P \to 0$ расщепляется, то $F \cong P \oplus K$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть $\{b_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — базис модуля F. Для любого элемента $x \in P$ можно записать $x = \sum_{\alpha\in A} b_\alpha r_\alpha$ и положить $f_\alpha(x) = r_\alpha$. Если теперь $b_\alpha = x_\alpha + y_\alpha$ для всех $\alpha \in A$, где $x_\alpha \in P$ и $y_\alpha \in P'$, то имеем $0 = x - \sum b_\alpha r_\alpha = (x - \sum x_\alpha r_\alpha) + (-\sum y_\alpha r_\alpha)$. Поскольку слагаемое в первой паре скобок лежит в P, а во второй - в P', каждое из них равно нулю.
(3) $\Rightarrow$ (4) Пусть эпиморфизм в строке обозначен через π. Выберем произвольно $z_\alpha \in B$ так, что $\pi(z_\alpha) = f(x\alpha)$. Тогда легко проверить, что отображение $\tilde{f} : P \Rightarrow B$, заданное равенством $f(x) = \sum z_\alpha f\alpha(x)$, определено корректно и делает данную диаграмму коммутативной.
(4) $\Rightarrow$ (1) Встроим точную последовательность в диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& & & P \arrow[d, equal, "i"] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Тогда гомоморфизм $\tilde{i}$, замыкающий диаграмму, расщепляет точную последовательность. □

2°. Инъективные модули.

Определение 2.3. Правый (левый) R-модуль Q называется *инъективным*, если любая точная последовательность правых(левых) R-модулей $0 \to Q \to L \to M \to 0$ расщепляется.

Эквивалентное определение:

Определение 2.4. Правый (левый) R-модуль Q называется *инъективным*, если для любой точной строки $0 \to A \to B$ и любого гомоморфизма $f : A \to Q$ существует гомоморфизм $\tilde{f} : B \to Q$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "\tilde f"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Из определения 2.4 определение 2.3 следует легко, это доказывается в точности как импликация (4) $\Rightarrow$ (1) предложения 2.2.

Обратная импликация доказывается значительно сложнее и использует ряд промежуточных утверждений. **В этих утверждениях мы используем второе определение инъективности — определение 2.4**.

Теорема 2.5 (Критерий Бэра)**.** *Правый (левый) модуль Q инъективен тогда и только тогда, когда для любого правого (левого) идеала I кольца R и любого гомоморфизма $f : I \to Q$ существует гомоморфизм $\tilde{f} : R \to Q$, делающий коммутативной диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "\tilde f"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Если Q инъективен в смысле 2.4, то условие критерия выполнено — достаточно положить $A = I$, $B = R$.

Обратно, пусть $0 \to A \xrightarrow{\mu} B$ — точная последовательность правых R-моджулей и $f : A \to Q$ — гомоморфизм. Рассмотрим множество пар (K, g), где $\mu(A) \subseteq K \subseteq B$ и $g : K \to Q$ — такой гомоморфизм, что $g\mu = f$. Это множество непусто, так как содержит пару $(\mu(A), f\mu^{-1})$. Упорядочим эти пары так: $(K_1, g_1) \succ (K_2, g_2)$, если $K_2 \supseteq K_1$ и $g_2|_{K_1} = g_1$. Легко видеть, что любая цепь $C = \{(K_\alpha, g_\alpha)\}$ имеет верхнюю грань (K, g), где $K = \bigcup K_\alpha$ и гомоморфизм g корректно определен условием $g(x) = g_\alpha(x)$ при $x \in K_\alpha$. По лемме Цорна найдётся максимальная пара $(K_{\max}, g_{\max})$. Допустим, что $K_{\max} \neq B$ и $b \in B \setminus K_{\max}$. Положим $I = \{r \in R : br \in K_{\max}\}$ и рассмотрим гомоморфизм $\varphi : I \to Q$ такой, что $\varphi(r) = g_{\max}(br)$. Рассмотрим соответствующий гомоморфизм $\tilde{\varphi} : R \to Q$, продолжающий гомоморфизм φ. Тогда на модуле $K_{\max} + bR$ корректно определён гомоморфизм $\tilde{g} : x + br \mapsto g_{\max}(x) + \tilde{\varphi}(r)$. Непосредственно проверяется, что $(K_{\max} + br, \tilde{g}) \succ (K_{\max}, g_{\max})$, откуда $K_{\max} + bR = K_{\max}$, противоречие. Итак, $g_{\max} : B \to Q$ — требуемый гомоморфизм. $\square$

Следствие 2.6. *Абелева группа является инъективным $\mathbb{Z}$-модулем тогда и только тогда, когда A — делимая группа (т.е. для любых $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$ существует такой элемент $x \in A$, что $nx = a$).*

Доказательство. Известно, что любой ненулевой идеал I кольца $\mathbb{Z}$ имеет вид $n\mathbb{Z}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Любой гомоморфизм $f : I \to A$ определён значением $f(n)$, которое можно выбрать произвольно, он имеет продолжение $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to A$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}(1)n = f(n)$. $\square$

Введём обозначение $\mathbf{\Omega} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Заметим, что $\mathbf{\Omega}$ — делимая группа.

Определение 2.7. Пусть M — правый R-модуль. Модулем характеров модуля M назовём абелеву группу $M^\times = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M, \mathbf{\Omega})$ с умножением $(r\chi)(x) = \chi(xr)$ для любых $r \in R$, $\chi \in M^\times$ и $x \in M$. Таким образом, $M^\times$ есть левый R-модуль.

Предложение 2.8. *Левый модуль $R^\times = (R_R)^\times$ инъективен.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Бэра. Пусть I — левый идеал в R и $f : I \to R^\times$ — гомоморфизм левых модулей. Рассмотрим $\mathbb{Z}$-гомоморфизм $\chi : I \to \mathbf{\Omega}$, заданный правилом $\chi(x) = (f(x))(1)$. В силу инъективности $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbf{\Omega}$, существует его продолжение $\tilde{\chi} : R \to \mathbf{\Omega}$, $\tilde{\chi} \in R^\times$. Рассмотрим гомоморфизм левых R-модулей $g : R \to R^\times$, заданный правилом $g(r) = r\tilde{\chi}$. Покажем, что g — продолжение гомоморфизма f. Действительно, если $x \in I$, то для любого $r \in R$ имеем

$$g(x)(r) = (x\tilde{\chi})(r) = \tilde{\chi}(rx) \overset{rx \in I}{=} \chi(rx) = (f(rx))(1) = (rf(x))(1) = f(x)(r)$$

$\square$

Предложение 2.9. *Прямое произведение инъективных модулей является инъективным модулем. Прямое слагаемое инъективного модуля — инъективый модуль.*

Доказательство. Проверяется непосредственно, что если $\mu : A \to B$ — мономорфизм, $f : A \to \prod_\alpha Q_\alpha$ — гомоморфизм, и $\tilde{f}_\alpha : B \to Q_\alpha$ удовлетворяет условию $\tilde{f}_\alpha \mu = \pi_\alpha f$ для всех α, то $\tilde{f} = (\prod_\alpha \tilde{f}_\alpha) : B \to \prod_\alpha Q_\alpha$ удовлетворяет условию $\tilde{f}\mu = f$.

Второе утверждение получается, если положить $Q = Q_1 \oplus Q_2$ и рассмотреть следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d] \\
& Q_1 \arrow[r, shift left] & Q \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

$\square$

Следствие 2.10. *Модуль характеров любого свободного модуля инъективен.*

Доказательство. Заметим, что свободный модуль имеет вид $\oplus_\alpha R_\alpha$, где $R_\alpha \cong R$, и что $(\oplus_\alpha R_\alpha)^\times \cong \prod_\alpha (R_\alpha)^\times$ и применим предложения 2.8 и 2.9. $\square$

Предложение 2.11. *Для любого модуля M существует естественный мономорфизм $M \to M^{\times\times}$.*

Доказательство. Для любого $m \in M$ рассмотрим гомоморфизм абелевых групп $\hat{m} : M^\times \to \mathbf{\Omega}$, заданный правилом $\hat{m}(\chi) = \chi(m)$. Заметим, что отображение $\varphi : m \mapsto \hat{m}$ — гомоморфизм модулей. Пусть, например, M — правый R модуль. Тогда $M^\times$ — левый R-модуль, и для любых $r \in R$ и $\chi \in M^\times$ имеем

$$\varphi(mr)(\chi) = \chi(mr) = (r\chi)(m) = \varphi(m)(r\chi) = (\varphi(m)r)(\chi).$$

Осталось проверить, что φ — мономорфизм. Если $0 \neq m \in M$, то существует ненулевой гомоморфизм $\psi : \mathbb{Z}m \to \mathbf{\Omega}$ (если $|\mathbb{Z}m| = \infty$, то можно положить $\psi(m)$ равным любому ненулевому элементу из $\mathbf{\Omega}$, а если $|\mathbb{Z}m| = n < \infty$, то то можно положить $\psi(m)$ равным $\frac{1}{n} + \mathbb{Z}$). В силу делимости (=инъективности) группы $\mathbf{\Omega}$ получаем, что существует продолжение ψ до характера $\chi \in M^\times$, для которого $\chi(m) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(m)(\chi) \neq 0$. $\square$

Теорема 2.12. *Произвольный модуль вкладывается в инъективный модуль.*

Доказательство. Заметим, что для любого гомоморфизма правых (левых) модулей $f : M \to N$ существует гомоморфизм левых (правых) модулей $f^\times : N^\times \to M^\times$, заданный правилом $(f^\times(\chi))(x) = \chi(f(x))$ для любого $x \in M$. Опуская рутинную проверку того, что $f^\times$ есть гомоморфизм модулей, заметим, что если f есть эпиморфизм, то $f^\times$ есть мономорфизм. Действительно, пусть $0 \neq \chi \in N^\times$. Тогда $\chi(y) \neq 0$ для некоторого элемента $y \in N$, а $y = f(x)$ для некоторого элемента $x \in M$, откуда $(f^\times(\chi))(x) = \chi(y) \neq 0$, т.е. $f^\times(\chi) =\neq 0$.

Теперь пусть M — правый модуль. Существует эпиморфизм $\pi : F \to M^\times$ свободного левого R-модуля F на модуль $M^\times$. Тогда $\pi^\times : M^{\times\times} \to F^\times$ — мономорфизм правых модулей. Композиция естественного гомоморфизма $M \to M^{\times\times}$ и $\pi^\times$, даёт вложение M в $F^\times$, а последний модуль инъективен в силу следствия 2.10. □

Теперь можно закончить доказательство эквивалентности определений 2.3 и 2.4.

Теорема 2.13. *Если любая точная последовательность правых(левых) R-модулей $0 \to Q \to L \to M \to 0$ расщепляется, то для любой точной строки $0 \to A \to B$ и любого гомоморфизма $f : A \to Q$ существует гомоморфизм $\tilde{f} : B \to Q$, делающий коммутативной диаграмму*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть модуль Q удовлетворяет условию определения 2.3. Согласно теореме 2.12, он вкладывается в модуль $\hat{Q}$, удовлетворяющий условию определения 2.4. Иначе говоря, имеется точная последовательность

$$0 \to Q \to \hat{Q} \to N \to 0,$$

которая по условию расщепляется. Следовательно, Q — прямое слагаемое модуля $\hat{Q}$ и Q удовлетворяет условию определения 2.4 по предложению 2.9. □

Задачи к лекции 2.

Задача 2.1. Докажите эквивалентность следующих условий:
(1) каждый правый идеал кольца R — проективный R-модуль;
(2) каждый подмодуль любого проективного правого R-модуля — проективный R-модуль (такие кольца называются *наследственными справва*).

Задача 2.2. Выясните, при каких n кольцо многочченов $R = k[x_1, \dots, x_n]$ над полем k является наследственным.

Задача 2.3. Пусть $R = \mathbb{Z}_n$. Покажите, что R_R — инъективный модуль.

Задача 2.4. Докажите, что для конечного модуля M выполнено равенство $|M^\times| = |M|$.

Задача 2.5. Приведите пример коммутативного конечного кольца R, для которого модули R_R и $(R_R)^\times$ неизоморфны (заметьте, что если кольцо коммутативно, то любой левый модуль можно рассматривать как правый модуль).

Лекция 3. Простые (неприводимые) и вполне приводимые модули

1°. Вполне приводимые модули.

Определение 3.1. Модуль M над кольцом R называется *вполне приводимым*, если любой подмодуль M является прямым слагаемым в M.

Лемма 3.2. *Любой подмодуль вполне приводимого модуля вполне приводим.*

Доказательство. Если M вполне приводим и $N \subseteq M$, то для любого подмодуля K в N имеем $M = K \oplus K'$, откуда $N = K \oplus (N \cap K')$. □

Определение 3.3. Модуль V называется *простым*, или *неприводимым*, если он содержит ровно два подмодуля (0 и V).

Теорема 3.4. *Пусть M — правый модуль над кольцом R. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *модуль M вполне приводим;*
(2) *M — прямая сумма простых модулей;*
(3) *M — сумма всех своих простых подмодулей.*

Доказательство. (1) ⇒ (2). Если $M = 0$, доказывать нечего. Сначала покажем, что ненулевой вполне приводимый модуль содержит хотя бы один простой подмодуль. Действительно, предположим противное и выберем элемент $m \neq 0$. Если mR неприводим, то утверждение доказано. В противном случае $mR = K_1 \oplus K_1'$, где $K_1 \neq 0$ и $K_1' \neq 0$. Если K_1' простой, то утверждение доказано. В противном случае $K_1' = K_2 \oplus K_2'$ и т.д. Если этот процесс не оборвётся, то получится, что прямая сумма $\oplus_i K_i$ бесконечного числа ненулевых модулей — прямое слагаемое циклического модуля mR, а это невозможно, так как тогда для проекции π получаем $\oplus_i K_i = \pi(mR) = \pi(m)R$, а $\pi(m)$ лежит в конечной прямой сумме модулей K_i.

Теперь множество прямых сумм простых подмодулей во вполне приводимом ненулевом модуле M упорядочим так: $\oplus_\alpha V_\alpha \succ \oplus_\beta W_\beta$, если каждый из модулей W_β совпадает с одним из V_α. По доказанному выше это множество непусто. Легко видеть, что если прямые суммы образуют цепь относительно данного порядка, то объединение множества прямых слагаемых по всем этим прямым суммам также образует прямую сумму простых модулей — верхнюю грань цепи. Значит, по лемме Цорна существует максиьальная прямая сумма $\oplus_\mu V_\mu$. Если $\oplus_\mu V_\mu \neq M$, то $M = (\oplus_\mu V_\mu) \oplus K$, где $K \neq 0$. По лемме 3.2, K — вполне приводимый модуль, значит, в K есть простой подмодуль, скажем, U, и $(\oplus_\mu V_\mu) \oplus U \succ (\oplus_\mu V_\mu)$. Противоречие.

(2) ⇒ (3). Тривиально.

(3) ⇒ (1). Пусть M — сумма простых модулей и K — подмодуль в M. Рассмотрим множество всех подмодулей

$$S = \{K' \subseteq M | K \cap K' = 0\},$$

упорядоченное по включению. Ясно, что объединение модулей из A, образующих цепь, принадлежит S и является верхней гранью этой цепи. Значит, по лемме Цорна существует максимальный в S элемент $K'_{\max}$. Ясно, что K и $K'_{\max}$ образуют прямую сумму. Предположим, что $K \oplus K'_{\max} \neq M$. Тогда найдётся простой подмодуль V модуля M такой, что $V \not\subseteq K \oplus K'_{\max}$. Но тогда $V \cap (K \oplus K'_{\max}) \neq V$, откуда $V \cap (K \oplus K'_{\max}) = 0$ и $K \cap (K'_{\max} \oplus V) = 0$, что противоречит максимальности $K'_{\max}$ в S. □

Теорема 3.5. *Пусть R — кольцо. Следующие условия эквивалентны:*
(1) *каждый правый R-модуль вполне приводим;*
(2) *модуль R_R вполне приводим;*

Доказательство. (1) ⇒ (2). Тривиально.

(2) ⇒ (1). Пусть выполнено условие (2) и M — правый R-модуль. Для любого $m \in M$ рассмотрим гомоморфизм $f : R \to mR$, $f : r \mapsto mr$, и его ядро K. Тогда $R = K \oplus K'$, $mR \cong R/K \cong K'$. Поскольку модуль K' вполне приводим, он является суммой своих простых подмодулей, значит, m принадлежит сумме простых подмодулей модуля M. Следовательно, для M выполнено условие (3) теоремы 3.4. □

Лемма 3.6 (Лемма Шура)**.** *Кольцо эндоморфизмов простого модуля является телом.*

Доказательство. Пусть V — простой модуль и $f : V \to V$ — его эндоморфизм. Если $f \neq 0$, то $\ker f \neq V \Rightarrow ker f = 0 \Rightarrow V \cong f(V) \neq 0 \Rightarrow f(V) = V$, т.е. f — изоморфизм, стало быть, он обратим в кольце $\mathrm{End}(V)$. □

Лемма 3.7. *Если V_1 и V_2 — неизоморфные простые модули, то* $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) = 0$.

Доказательство. Повторение доказательства леммы Шура. □

Теорема 3.8. *Пусть R — кольцо. Следующие условия эквивалентны:*
(1) *каждый правый R-модуль вполне приводим;*
(2) *каждый левый R-модуль вполне приводим;*
(3) *кольцо R изоморфно прямой сумме конечного числа колец матриц над телами.*

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (2). Легко видеть, что если D — тело, то кольцо матриц $R = M_n(D)$ разлагается в прямую сумму правых идеалов вида $V_i = \sum_{j=1}^{n} De_{ij}$, где e_{ij} — матричные единицы (V_i — множество матриц с произвольной i-й строкой и нулями вне её). Проверим, что V_i — простые модули. Действительно, достаточно показать, что если $0 \neq x \in V_i$, то $xR = V_i$. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} a_j e_{ij} \in V_i$ и $a_j \neq 0$. Тогда $x(a_j)^{-1}e_{jk} = e_{ik} \in V_i$, т.е. $xR = V_i$, как и утверждается. Таким образом, если кольцо есть прямая сумма колец матриц над телами, то оно есть прямая сумма *минимальных* (т.е. являющихся простыми правыми модулями) правых идеалов, а также минимальных левых идеалов (аналогичное доказательство, только вместо строк надо рассматривать столбцы).

(1) $\Rightarrow$ (3) и (2) $\Rightarrow$ (3). При выполнении условия (1) модуль R_R — прямая сумма простых правых модулей (минимальных правых идеалов кольца R). Поскольку R — кольцо с 1, эта сумма состоит из конечного числа слагаемых. Разобьём их на классы мзоморфных модулей: $R_R \cong \oplus_{i=1}^{s} V_i^{k_i}$, так что $V_i \ncong V_j$ при $i \neq j$. Легко видеть, что ко́льца R и $\operatorname{End}(R_R)$ изоморфны: элементу $r \in R$ соответствует гомоморфизм $f_r : x \mapsto rx$ (левое умножение на r). С другой стороны, в силу леммы 3.7 нетривиальных гомоморфизмов между $V_i^{k_i}$ и $V_j^{k_j}$ при $i \neq j$ нет, поэтому $\operatorname{End}(R_R) = \oplus_{i=1}^{s} \operatorname{End}(V_i^{k_i}$. Наконец, для любого правого модуля M кольцо $\operatorname{End}(M^n)$ изоморфно кольцу матриц порядка n над $\operatorname{End}(M)$ (как в линейной алгебре): эндоморфизму $f : M^n \to M^n$ соответствет матрица с элементами $f_{ij} = \pi_i f \mu_j$, где π_i и μ_j обозначают, соответственно, проекцию на i-е слагаемое и вложение M как j-го слагаемого в прямую сумму. Получаем изоморфизм $R \cong \oplus_{i=1}^{s} M_{k_i}(\operatorname{End}(V_i))$ и применяем лемму Шура.

Доказательство для левых модулей аналогично. $\square$

Кольца, удовлетворяющие условиям теоремы 3.8, называются *вполне приводимыми* кольцами (или *классически полупростыми* кольцами).

Задачи к лекции 3.

Задача 3.1. Выясните, при каких значениях n кольцо вычетов Z_n классически полупросто.

Задача 3.2. Известно, что групповое кольцо kG конечной группы G над полем k классически полупросто тогда и только тогда, когда характеристика поля k не делит порядок группы G, в том числе, когда $\operatorname{char} k = 0$ (теорема Машке). Определите, какие кольца матриц и над какими телами входят в разложение группового кольца kG в каждом из следующих случаев:
(а) $k = \mathrm{GF}(2),\ G = \mathbb{Z}_3$;
(б) $k = \mathbb{R},\ G = \mathbb{Z}_3$;
(в) $k = \mathbb{C},\ G = \mathbb{Z}_{2017}$;
(г) $k = \mathrm{GF}(5),\ G = S_3$;
(д) $k = \mathbb{R},\ G = S_3$;
(е) $k = \mathbb{C},\ G = S_3$.

Лекция 4. Характеризация классически полупростых колец в терминах проективных и инъективных модулей. Радикал Джекобсона модуля и радикал Джекобсона кольца.

1°. Ещё несколько критериев классической полупростоты кольца.

Теорема 4.1. *Пусть R — кольцо. Следующие условия эквивалентны:*
(1) *кольцо R классически полупросто;*
(2) *каждый циклический правый (левый) R —модуль проективен;*
(3) *каждый правый (левый) идеал кольца R инъективен;*
(4) *каждый правый (левый) R —модуль проективен;*
(5) *каждый правый (левый) R —модуль инъективен.*

Доказательство. Схема доказательства: (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) и (1) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

Пусть R — классически полупростое кольцо, M — правый R-модуль. Поскольку M — гомоморфный образ некоторого проективного (и даже свободного) модуля P, имеем эпиморфизм $f : P \to M$. Пусть $K = \ker(f)$. Тогда $P = K \oplus K'$, так как модуль P вполне приводим, и $M = f(P) \cong P/K \cong K'$, а модуль K' проективен как прямое слагаемое проективного модуля. Далее, мы знаем, что существует вложение M в некоторый инъективный модуль Q. Но тогда $Q = M \oplus M'$, так как модуль Q вполне приводим, и M инъективен как прямое слагаемое инъективного модуля.

Импликации (4) $\Rightarrow$ (2) и (5) $\Rightarrow$ (3) тривиальны.

Пусть теперь I — правый идеал кольца R. Из проективности циклического модуля R/I, равно как из инъективности модуля I следует, что точная последовательность $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ расщепляется, т.е. в обоих случаях I выделяется прямым слагаемым. Значит, (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (1). □

2°. Радикал Джекобсона модуля и кольца.

Определение 4.2. Подмодуль N модуля M называется *минимальным*, если N — простой модуль (иначе говоря, это минимальный элемент в множестве всех ненулевых подмодулей в M).

Подмодуль N модуля M называется *максимальным*, если M/N — простой модуль (иначе говоря, это максимальный элемент в множестве всех собственных подмодулей в M).

Лемма 4.3. *Любой собственный подмодуль любого конечно порождённого модуля содержится в некоторои максимальном подмодуле.*

Доказательство. Пусть $N \subset M = \sum_{i=1}^{n} x_i R$ и $N \neq M$. Рассмотрим множество S всех собственных подмодулей модуля M, содержащих N, упорядоченное по включению ($N \in S$). Для любой цепи C в S положим $U = \cup_{T \in C} T$. Допустим, что $U = M$. Тогда для любого $i = 1, \dots, n$ найдётся $T_i \in C$ такой, что $x_i \in T_i$. Но все элементы цепи сравнимы между собой, следовательно, среди них есть наибольший, скажем, T_m. Но тогда $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq T_m$, значит, $T_m = M \notin S$. Противоречие показывает, что $U \in S$, и утверждение леммы вытекает из леммы Цорна. □

Определение 4.4. *Радикалом Джекобсона* правого модуля M называется пересечение всех его максимальных подмодулей. Обозначение: $J(M)$. Если максимальных подмодулей в M нет, то по определению $J(M) = M$.

Замечание 4.5. Эквивалентное определение: $J(M)$ — пересечение ядер всех гомоморфизмов M в простые правые модули.

В дальнейшем, пока мы не рассматриваем другие радикалы, будем часто называть радикал Джекобсона просто радикалом.

Следующие свойства радикала модуля проверяются по определению:

Предложение 4.6.
(1) *Если $f : M \to N$ — гомоморфизм модулей, то $f(J(M)) \subseteq J(N)$.*
(2) *Если N — подмодуль модуля M, причём $J(N) = N$ и $J(M/N) = M/N$, то $J(M) = M$.*
(3) *Для любого модуля M, $J(M/J(M)) = 0$.*

Определение 4.7. Подмодуль N модуля M называется *малым*, если не существует подмодуля $K \neq M$, такого, что $K + N = M$.

Подмодуль N модуля M называется *большим*, или *существенным*, если не существует подмодуля $K \neq 0$, такого, что $K \cap N = 0$.

Предложение 4.8. *Любой малый подмодуль модуля M содержится в $J(M)$. Если модуль M конечно порождён, то $J(M)$ — малый подмодуль в M.*

Доказательство. Пусть N — малый подмодуль в M и $0 \neq f : M \to V$ — гомоморфизм M на простой модуль V. Если $f(N) \neq 0$, то $f(N) = V = f(M)$, откуда $M = N + \ker(f)$, что невозможно. Следовательно, $N \subseteq J(M)$.

Докажем, что $J(M)$ — малый подмодуль конечно порождённого модуля M. Предположим противное: $M = J(M) + N$, где $N \neq M$, и рассмотрим максимальный подмодуль T модуля M, содержащий N. Тогда, разумеется, $T + J(M) = M$, но $J(M) \subseteq T$, откуда $T = M$. Противоречие. □

Предложение 4.9. *Пусть R — кольцо и M — правый R-модуль. Тогда $MJ(R_R) \subseteq J(M)$. В частности, $J(R_R)$ — двусторонний идеал кольца R.*

Доказательство. Из 4.6(1), применённого к произвольному гомоморфизму левого умножения $R \to M : r \mapsto xr$, получаем $xJ(R_R) \subseteq J(M)$ для любого $x \in M$. $\square$

Определение 4.10. Элемент a кольца R называется *квазирегулярным*, если $1 - a$ — обратимый элемент кольца R.

Правый (левый, двусторонний) идеал кольца R называется *квазирегулярным*, если любой его элемент квазирегулярен.

Предложение 4.11. *Пусть I — правый идеал кольца R. Тогда следующие условия эквивалентны.*
(1) *I — квазирегулярен;*
(2) *I — малый подмодуль модуля R_R;*
(3) *$I \subseteq J(R_R)$.*

Доказательство. Эквивалентность условий (2) и (3) уже доказана в 4.8. Пусть I — квазирегулярный правый идеал и $I + N = R$ для некоторого правого идеала N кольца R. Тогда $1 = a + x$ для некоторых $a \in I, x \in N$, откуда $x = 1 - a$ — обратимый элемент кольца и, следовательно, (1) $\Rightarrow$ (2).

Покажем теперь, что $J(R_R)$ — квазирегулярный идеал. Пусть $a \in J(R_R)$ и $(1 - a)R \neq R$. По лемме 4.3, существует максимальный правый идеал T кольца R такой, что $1 - a \in T$. Но $a \in T$, поскольку $J(R_R) \subseteq T$, значит, $1 = a + (1 - a) \in T$ и $T = R$, что противоречит выбору T. Итак, $(1 - a)R = R$, т.е. $(1 - a)r = 1$ для некоторого $r \in R$. Но тогда $r = 1 + ar$, $-ar \in J(R_R)$, и, заменяя a на $(-ar)$ в предыдущем рассуждении, получаем, что $rs = (1 + ar)s = 1$ для некоторого $s \in R$. В силу ассоциативности имеем $s = 1s = (1 - a)rs = 1 - a$, т.е. $(1 - a)r = r(1 - a) = 1$. Таким образом, (3) $\Rightarrow$ (1). $\square$

Ясно, что все доказанные утверждения остаются верными, если заменить правые модули и идеалы на левые.

Предложение 4.12. *Для любого кольца R, $J(_RR) = J(R_R)$.*

Доказательство. $J(R_R)$ есть левый квазирегулярный идеал, следовательно, $J(R_R) \subseteq J(_RR)$. Симметрично проверяется обратное включение. $\square$

Начиная с этого момента мы вводим обозначение $J(R) = J(_RR) = J(R_R)$ и называем этом идеал *радикалом Джекобсона кольца R*.

Следствие 4.13 (лемма Накаямы)**.** *Если M — конечно порождённый правый R-модуль, то $MJ(R)$ — малый подмодуль в M.*

Доказательство. Сразу вытекает из 4.9 и 4.8 $\square$

Часто лемму Накаямы формулируют и используют в следующем виде: если M — конечно порождённый правый R-модуль и $MJ(R) = M$, то $M = 0$.

Применения больших подмодулей основаны на следующем замечании.

Предложение 4.14. *Пусть N — подмодуль правого модуля M. Тогда существует подмодуль N' модуля M такой, что $N \cap N' = 0$ и $N \oplus N'$ — большой подмодуль модуля M.*

Доказательство. Достаточно заметить, что можно применить лемму Цорна к множеству таких подмодулей K модуля M, что $N \cap K = 0$, упорядоченному по включению, и в качестве N' взять максимальный элемент этого множества. Действительно, если $(N \oplus N') \cap L = 0$, то получим $N \cap (N' \oplus L) = 0$ и $L = 0$ из максимальности N'. $\square$

Предложение 4.15. *Пусть R — кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *R — классически полупростое кольцо;*
(2) *любой правый (левый) R-модуль не содержит собственных больших подмодулей.*

Доказательство. Из предложения 4.14 сразу видно, что условие (2) для модуля M равносильно тому, что M — вполне приводимый модуль. $\square$

Задачи к лекции 4.

Задача 4.1. Найдите радикал следующих абелевых групп (т.е. $\mathbb{Z}$-модулей): (а) Z; (б) $\mathbb{Q}$; (в) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 4.2. Сколько квазирегулярных элементов и сколько квазирегулярных правых идеалов содержат кольца: (а) Z; (б) $M_n(\mathrm{GF}(q))$?

Задача 4.3. Покажите, что любой вполне приводимый модуль не содержит ненулевых малых подмодулей. Выясните, верно ли обратное утверждение.

Задача 4.4. Верно ли такое утверждение: если ни один правый R-модуль не содержит ненулевых малых подмодулей, то R — классически полупростое кольцо?

Лекция 5. Условия конечности

Определение 5.1. Говорят, что ч.у.м. $(M, \succ)$ *удовлетворяет условию минимальности* (*условию максимальности*), если любое непустое подмножество множества M имеет минимальный (максимальный) элемент.

Например, любое конечное множество удовлетворяет обоим условиям.

Предложение 5.2. *Ч.у.м. $(M, \succ)$ удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей:*

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \ldots \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \ x_n = x_{n+1} = \ldots \tag{5.1}$$

Ч.у.м. $(M, \succ)$ удовлетворяет условию максимальности тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей:

$$x_1 \prec x_2 \prec x_3 \ldots \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \ x_n = x_{n+1} = \ldots \tag{5.2}$$

При выполнении (5.1) или (5.2) мы говорим, что соответствующая цепь стабилизируется на шаге n.

Доказательство. Из условия минимальности условие обрыва убывающих цепей следует мгновенно: x_n из (5.1) — это минимальный элемент множества $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Обратно, пусть M удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей и $\varnothing \neq S \subseteq M$. Выберем произвольно элемент $x_1 \in S$. Если x_1 не минимальный в S, выберем $x_2 \in$ такой, что $x_2 \prec x_1$ и $x_2 \neq x_1$. Продолжая таким образом, мы найдём минимальный элемент в S, так как в противном случая получилась бы бесконечная убывающая цепь.

Второе утверждение следует из первого, если рассмотреть множество с обращённым порядком. $\square$

Определение 5.3. Модуль M называется *артиновым* (*нётеровым*), если множество его подмодулей, упорядоченное по включению, удовлетворяет условию минимальности (максимальности).

Кольцо R называется *артиновым* (*нётеровым*) справа, если модуль R_R артинов (нётеров).

Аналогично определяется артиново (нётерово) слева кольцо.

Предложение 5.4. *Пусть M — модуль, N — его подмодуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *модуль M артинов (нётеров);*
(2) *N и M/N — артиновы (нётеровы) модули.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) сразу следует из того, что подмодули модуля N суть подмодули в M, а подмодули в M/N однозначно соответствуют подмодулям модуля M, содержащим N, с сохранением порядка.

Обратно, пусть $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ — убывающая цепь подмодулей модуля M. Тогда цепь $K_1 \cap N \supseteq K_2 \cap N \supseteq \ldots$ стабилизируется на некотором шаге n, а цепь $(K_1 + N)/N \supseteq (K_2 + N)/N \supseteq \ldots$ — на некотором шаге m. При $t \geq \max\{m, n\}$ получаем, что для любого элемента $x \in K_t$ найдётся элемент $y \in K_{t+1}$ такой, что $x + N = y + N$ (так как $k \geq m$), но тогда $x = y + a$, где $a \in N$. Следовательно, $a = x - y \in K_t \cap N = K_{t+1} \cap N$, значит, $x \in K_{t+1}$, т.е. $K_t = K_{t+1}$. Итак, цепь $\{K_i\}$ стабилизируется на шаге $\max\{n, m\}$.

Доказательство для возрастающих цепей аналогично. $\square$

Следствие 5.5.
(1) *Прямая сумма конечного числа модулей является артиновым (нётеровым) модулем тогда и только тогда, когда все слагаемые — артиновы (нётеровы) модули.*
(2) *Кольцо R артиново (нётерово) справа тогда и только тогда, когда каждый конечно порождённый правый R-модуль артинов (нетеров).*

Доказательство. Утверждение (1) доказывается очевидной индукцией по числу слагаемых, поскольку

$$(M_1 \oplus \ldots M_n)/M_n \cong M_1 \oplus \ldots M_{n-1}$$

при $n > 1$.

Достаточность условия в утверждении (2) тривиальна, так как $R_R = 1 \cdot R$, Обратно, если R-модуль M порождён n элементами, то существует свободный правый модуль $F = R_R^n$, гомоморфным образом которого является модуль M. По первому утверждению F артинов (нётеров) тогда и только тогда, когда модуль R_R артинов (нётеров). $\square$

Теорема 5.6. *Модуль M нётеров тогда и только тогда, когда каждый его подмодуль конечно порождён.*

Доказательство. Пусть M — правый R-модуль, каждый подмодуль которого конечно порождён, и $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ — возрастающая цепь подмодулей. Расмотрим $K = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$. Это — подмодуль в M, следовательно, он конечно порождён, следовательно, его образующие содержатся в каком-нибудь модуле K_n, то тогда на шаге n цепь стабилизируется.

Обратно, достаточно показать, что правый нётеров модуль конечно порождён. Для этого в множестве всех конечно порождённых подмодулей выберем максимальный элемент, скажем, K. Если $x \in M \setminus K$, то $K + xR$ — конечно порождённый подмодуль, бо́льший чем K, что невозможно. Следовательно, $K = M$. $\square$

Определение 5.7. Правый (левый, двусторонний) идеал I называется правым (левым, двусторонним) *ниль-идеалом*, если все его элементы *нильпотентны*: для любого $x \in I$ существует число $n = n(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $x^n = 0$.

Правый (левый, двусторонний) идеал I называется правым (левым, двусторонним) *нильпотентным*, если существует число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $I^n = 0$ (равносильно: $x_1 x_2 \ldots x_n = 0$ для любых $x_1, \ldots, x_n \in I$).

Предложение 5.8. *Любой правый (левый) ниль-идеал кольца содержится в его радикале Джекобсона.*

Доказательство. Если $x^n = 0$, то $(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}) = 1$. □

Теорема 5.9. *Радикал артинова справа (слева) кольца нильпотентен.*

Доказательство. Пусть кольцо R артиново справа и $J = J(R)$. Рассмотрим убывающую цепь идеалов

$$J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \ldots$$

Пусть она стабилизируется на шаге n, т.е. $J^n = J^{n+1}$. Положим $U = J^n$ и допустим, что $U \neq 0$. Заметим, что тогда $U^2 = J^{2n} = J^n = U \neq 0$. Стало быть, множество $\{K_R \subseteq R_R | KU \neq 0\}$ непусто, и в нём есть минимальный элемент, скажем, K_0. Тогда найдётся элемент $a \in K_0$, для которого $aU \neq 0$. Но тогда $aU \cdot U = aU^2 = aU \neq 0$. В силу минимальности K_0 получаем $K_0 = aU$, откуда $a = au$ для некоторого $u \in U$, т.е. $a(1-u) = 0$, что невозможно, так как $U \subseteq J$ и, следовательно, элемент $(1-u)$ обратим. □

Определение 5.10. Модуль M (кольцо R) называется *полупростым*, если $J(M) = 0$ (соответственно, $J(R) = 0$).

Лемма 5.11. *Если V — минимальный правый идеал кольца R, то либо $V^2 = 0$, либо $V = eR$, где $e^2 = e$ (такой элемент называется* идемпотентом*).*

Доказательство. Пусть $V^2 \neq 0$, т.е. существует элемент $v \in V$ такой, что $vV \neq 0$. Тогда $vV = V$. Рассмотрим теперь подмодуль $X = \{x \in V | vx = 0\}$. Поскольку $X \neq V$, имеем $X = 0$. Далее, из $V = vV$ следует, что $V = v^2V$ и $v = v^2u$ для некоторого $u \in V$. Умножая справа на v, получаем, что $v^2 = v^2uv$, или $v(v - vuv) = 0$, или $v - vuv \in X = 0$. Но тогда $(vu)^2 = vuvu = vu$. Осталось заметить, что $vu \neq 0$, поэтому $V = (vu)R$. □

Лемма 5.12. *Если e — идемпотент кольца R, то $R = eR \oplus (1-e)R$.*

Доказательство. Для любого $r \in R$ имеем $r = er \oplus (1-e)r$, а если $x \in eR \cap (1-e)R$, то $x = ex = e(1-e)x = 0$. □

Теорема 5.13. *Пусть R — кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *кольцо полупросто и артиново справа;*
(2) *кольцо полупросто и артиново слева;*
(3) *кольцо R вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть кольцо R вполне приводимо. Тогда $R_R = \oplus_{i=1}^n V_i$, где модули V_i простые, а значит, артиновы. Следовательно, R_R — артинов модуль в силу 5.5(1). Пусть $\pi_i : R \to V_i$ — проекции R на прямые слагаемые, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\cap_{i=1}^n \ker(\pi_i) = 0$, откуда $J(R) = 0$.

Пусть теперь кольцо $R \neq 0$ артиново справа и полупросто. Построим по индукции две последовательности правых идеалов $V_1, V_2, \ldots$ и $R = K_0, K_1, K_2, \ldots$, что при всех $i \geq 1$:
V_i — минимальные правые идеалы,
$K_{i-1} = K_i \oplus V_i$.
Выберем произвольный минимальный правый идеал V_1. Поскольку $V_1^2 \neq 0$, имеем $V_1 = e_1R$ для некоторого идемпотента $e_1 \in R$ и $K_0 = R = e_1R \oplus (1-e_1)R$ в силу 5.12. Положим $K_1 = (1-e_1)R$. Допустим теперь, что $V_1, \ldots, V_n$ и $K_1, \ldots, K_n$ уже построены. Если $K_n = 0$, построение завершено. Иначе выберем произвольно минимальный правый идеал $V_{n+1} \subseteq K_n$, он имеет вид $V_{n+1} = e_{n+1}R$ для некоторого идемпотента e_{n+1}, и $R = e_{n+1}R \oplus (1-e_{n+1})R$, откуда $K_n = e_{n+1}R \oplus ((1-e_{n+1})R \cap K_n$. Осталось положить $K_{n+1} = (1-e_{n+1}) \cap K_n = (1-e_{n+1})K_n$.

Поскольку по построению $K_{n+1} \subsetneqq K_n$ и R — артиново справа кольцо, на каком-то шаге получим $K_n = 0$, т.е. $K_{n-1} = V_n$, $K_{n-2} = V_{n-1} \oplus V_n$ и т.д. В результате $R = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, откуда, как известно (теорема 3.4), следует, что модуль R_R вполне приводим. □

Теорема 5.14. *Любое артиново справа кольцо (напомним: с единицей!) нётерово справа.*

Доказательство. Пусть R — артиново справа кольцо и $J = J(R)$. Согласно 5.8, $J^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Каждый из модулей J^{i-1}/J^i, $i = 1, 2, \ldots n$ (считая, что $J^0 = R$) можно рассматривать как модуль над кольцом $\overline{R} = R/J$, которое вполне приводимо, следовательно, каждый из этих модулей вполне приводим, т.е. является прямой суммой некоторого множества простых модулей. Но любое бесконечное множество содержит счётное подмножество, а счётная прямая сумма $\oplus_{i=1}^{\infty}$ содержит подмодули $K_i = \oplus_{j=i}^{\infty} V_i$, образующие бесконечную строго убывающую цепь. Следовательно, каждый из модулей J^{i-1}/J^i есть конечная прямая сумма простых (а значит, нётеровых) модулей и является, по 5.5(1), нётеровым модулем. Остаётся применить 5.4. □

Задачи к лекции 5.

Задача 5.1. Приведите пример артинова ненётерова модуля.

Задача 5.2. Приведите пример кольца, артинова справа, но не слева.

Задача 5.3. Докажите, что любой артинов правый модуль над артиновым справа кольцом является конечно порождённым.

Задача 5.4. Пусть p — простое число, $\mathbb{Z}_{(p)} = \{m/n \in \mathbb{Q} | p \nmid n\}$, R — кольцо матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где $a \in Z_{(p)}$, $b, c \in \mathbb{Q}$. Докажите, что кольцо R нётерово справа, но $\bigcap_{n=1}^{\infty} J(R)^n \neq 0$ (открытый вопрос: может ли нётерово справа и слева кольцо обладать таким свойством?).

Лекция 6. Инъективая оболочка модуля. Гомологическая характеризация нётеровых колец (теорема Чейза)

Определение 6.1. Пусть M — правый (левый) модуль модуль над кольцом R. Инъективный R-модуль Q называется инъективной оболочкой модуля M, если M — большой подмодуль модуля Q.

Лемма 6.2. *Пусть $\{M_\alpha | \alpha \in A\}$ — произвольное множество правых модулей над кольцом R и K_α — большой подмодуль модуля M_α, для любого $\alpha \in A$. Тогда $\bigoplus_{\alpha\in A} K_\alpha$ — большой подмодуль модуля $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай двух слагаемых: $A = \{1,2\}$. Пусть $0 \neq x = x_1+x_2$, где $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$. Если $x_1 = 0$, то $x \in M_2$ и $xR \cap K_2 \neq 0$ по условию, тем более $xR \cap (K_1 \oplus K_2) \neq 0$. Остался случай $x_1 \neq 0$. Положим $I = \{r \in R | x_1 r \in K_1\}$. Ясно, что тогда $x_1 I = x_1 R \cap K_1 \neq 0$. Если $x_2 I = 0$, то $0 \neq x_1 I = xI \subseteq K_1$. В противном случае $x_2 I \cap K_2 \neq 0$, т.е. найдётся такой элемент $r \in I$, что $x_2 r \neq 0$. Но тогда $xr = x_1 r + x_2 r \in K_1 \oplus K_2$ и $xr \neq 0$, так как M_1 и M_2 образуют прямую сумму.

Далее, очевидная индукция доказывает утверждение леммы для любого конечного множества индексов.

Наконец, в общем случае пусть $0 \neq U \subseteq \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$. Выберем элемент $u \in U \setminus \{0\}$. По определению прямой суммы найдётся такое конечное подмножество $F \subseteq A$, что $u \in \bigoplus_{\alpha\in F} M_\alpha$. По доказанному $uR \cap \bigoplus_{\alpha\in F} K_\alpha \neq 0$, и тем более $U \cap \bigoplus_{\alpha\in A} K_\alpha \neq 0$. □

Теорема 6.3. *Инъективная оболочка произвольного модуля M существует и определена однозначно, с точностью до изоморфизма, тождественного на M.*

Доказательство. Пусть M — правый модуль модуль над кольцом R. Известно (теорема 2.12), что существует инъективный модуль Q, содержащий M. Теперь пусть M' — максимальный элемент множества таких подмодулей N модуля Q, что $N \cap M = 0$ и M'' — максимальный элемент множества таких подмодулей K модуля Q, что $K \supseteq M$ и $K \cap M' = 0$. Мы уже знаем, что $M' \oplus M''$ — большой подмодуль модуля Q (см. 4.14). Легко видеть также, что M'' можно отождествить с подмодулем $(M \oplus M')/M'$ модуля Q/M', причём из максимальности M' следует, что M — большой подмодуль в Q/M' (действительно, пусть $0 \neq U \subseteq Q/M'$ и $\tilde U$ — полный прообраз U относительно канонического эпиморфизма; тогда $\tilde U \cap M \neq 0$, откуда $M \cap U \neq 0$ в Q/M'). Аналогично, можно считать M' большим подмодулем в Q/M''. Рассмотрим гомоморфизм $f : Q \to Q/M'' \oplus Q/M'$, равный прямой сумме канонических гомоморфизмов (т.е. $f(x) = (x + M'', x + M')$). Ясно, что $\ker f = M'' \cap M' = 0$, поэтому f — мономорфизм и $f(Q) \cong Q$ — инъективный модуль. Следовательно, точная последовательность

$$0 \to Q \xrightarrow{f} Q/M'' \oplus Q/M' \to Q/IM(f) \to 0$$

расщепляется, т.е. $Q/M'' \oplus Q/M' = f(Q) \oplus K$ для некоторого подмодуля K модуля $Q/M'' \oplus Q/M'$. Но $f(Q) \supseteq M' \oplus M$, а $M' \oplus M$ — большой подмодуль в $Q/M'' \oplus Q/M'$, по лемме 6.2. Следовательно, $K = 0$, $f(Q) = Q/M'' \oplus Q/M'$ и оба прямых слагаемых — инъективные модули (предложение 2.9). Итак, M — большой подмодуль инъективного модуля Q/M'.

Теперь докажем единственность инъективной оболочки модуля M. Действительно, пусть Q_1 и Q_2 — две инъективных оболочки, и гомоморфизм $f : Q_1 \to Q_2$ дополняет диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & Q_1 \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & Q_2 & \end{tikzcd}$$

до коммутативной (вертикальная и горизонтальная стрелки — тождественные вложения). Заметим, что $\ker(f) \cap M = 0$, следовательно, f — мономорфизм, $f(Q_1)$ — инъективный большой подмодуль модуля Q_2, так как M — большой подмодуль в Q_2 и $M \subseteq f(Q_1)$. Но так как инъективный подмодуль выделяется прямым слагаемым, $Q_2 = f(Q_1)$, значит, f — изоморфизм, тождественный на M. □

После этой теоремы мы можем обозначать инъективную оболочку модуля M через $\hat M$.

Следствие 6.4. *Следующие условия эквивалентны:*
(1) *Q — инъективный модуль;*
(2) *Если Q — большой подмодуль модуля T, то $T = Q$;*
(3) *$Q = \hat Q$.*

Доказательство.
Импликация (1) ⇒ (2) очевидна, так как инъективный подмодуль выделяется прямым слагаемым.
Импликация (2) ⇒ (3) получается, если в (2) подставить $T = \hat Q$.
Импликация (3) ⇒ (1) очевидна, по определению $\hat Q$. □

Лемма 6.5. *Если M — ненулевой правый (левый) модуль, то $\mathrm{Hom}(M, \hat V) \neq 0$ для некоторого простого правого (левого) модуля V.*

Доказательство. Пусть M — ненулевой правый R-модуль и $0 \neq x \in M$. Поскольку модуль xR конечно порождён, он содержит максимальный подмодуль K. Положим $V = xR/K$ и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & xR \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & \hat{V}, & \end{tikzcd}$$

где горизонтальная стрелка — тождественное вложение, а вертикальная стрелка — композиция канонического гомоморфизма $xR \to V$ и вложения V в $\hat{V}$. Тогда $0 \neq f \in \mathrm{Hom}(M, \hat{V})$. □

Теорема 6.6 (Чейз). *Пусть R — кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *кольцо R — нётерово справа (слева);*
(2) *прямая сумма любого множества инъективных правых (левых) R-модулей является инъективным R-модулем;*
(3) *прямая сумма любого счётного множества инъективных правых (левых) R-модулей является инъективным R-модулем;*
(4) *прямая сумма любого счётного множества инъективных оболочек простых правых (левых) R-модулей является инъективным R-модулем.*

Доказательство.
(1) ⇒ (2). Пусть модуль Q_α инъективен для любого $\alpha \in A$, где A — произвольное множество индексов, и $Q = \bigoplus_{\alpha \in A} Q_\alpha$. Пусть I — правый идеал кольца R и $f : I \to Q$ — гомоморфизм. Тогда I конечно порождён: $I = x_1R + \ldots + x_iR$. Поскольку любой элемент прямой суммы модулей имеет лишь конечное число ненулевых компонент, существует такое конечное подмножество $F \subseteq A$, что $f(x_1), \ldots, f(x_n) \in \bigoplus_{\alpha \in F} Q_\alpha$. Но конечная прямая сумма модулей сопадает с их произведением, и по предложению 2.9 модуль $\bigoplus_{\alpha \in F} Q_\alpha$, инъективен. Следовательно, существует гомоморфизм $\tilde{f} : R \to \bigoplus_{\alpha \in F} Q_\alpha \subseteq \bigoplus_{\alpha \in A} Q_\alpha = Q$. Значит, модуль Q удовлетворяет критерию Бэра (теорема 2.5), следовательно, он инъективен.

(2) ⇒ (3) ⇒ (4). Тривиально.

(4) ⇒ (1). Допустим, что R содержит строго возрастающую цепь правых идеалов $0 = I_0 \subsetneqq I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq \ldots$ и положим $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Для любого $k > 0$ существует простой модуль V_k и ненулевой гомоморфизм $f_k : I_k/I_{k-1} \to \hat{V}_k$. Положим $Q = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \hat{V}_k$ и обозначим через μ_k естественное вложение $\hat{V}_k$ в Q. По условию модуль Q инъективен. Построим по индукции последовательность гомоморфизмов $g_k : I_k \to Q$, удовлетворяющих следующим условиям:
(a) $g_k|_{I_{k-1}} = g_{k-1}$ при всех $k > 1$;
(b) $g_k(I_k) \subseteq \bigoplus_{j=1}^{k} \hat{V}_j$ при всех $k > 0$;
(c) $g_k(I_k) \not\subseteq \bigoplus_{j=1}^{k-1} \hat{V}_j$ при всех $k > 1$.
Положим $g_1 = \mu_1 f_1$. Предположим, что $k > 1$ и гомоморфизм g_{k-1} уже построен. Поскольку модуль $\bigoplus_{j=1}^{k-1} \hat{V}_j$ инъективен, существует гомоморфизм $\tilde{g}_{k-1} : I_k \to \bigoplus_{j=1}^{k-1} \hat{V}_j$, такой, что $\tilde{g}_{k-1}|_{I_{k-1}} = g_{k-1}$. Теперь положим $g_k = \tilde{g}_{k-1} + \mu_k f_k \pi_k$, где $\pi_k : I_k \to I_k/I_{k-1}$ — канонический эпиморфизм. Поскольку $\pi_k(I_{k-1} = 0$, имеем $g_k|_{I_{k-1}} = \tilde{g}_{k-1}|_{I_{k-1}} = g_{k-1}$, т.е. условие (a) выполнено. Условие (b) вытекает из того, что $g_k(I_k) \subseteq \tilde{g}_{k-1}(I_k) + \mu_k(\hat{V}_k) = \bigoplus_{j=1}^{k} \hat{V}_j$. Наконец, если x — такой элемент из I_k, что $f_k\pi_k(x) \neq 0$, то $g_k(x)$ имеет ненулевую k-ю компоненту, откуда следует (c). Определим теперь $g : I \to Q$ по правилу $g(x) = g_k(x)$ для любого k такого, что $x \in I_k$. Условие (a) гарантирует корректность такого определения. В силу инъективности Q существует продолжение гомоморфизма g до гомоморфизма $\tilde{g} : R \to Q$. Но тогда найдётся число m такое, что $\tilde{g}(1) \in \bigoplus_{j=1}^{m} \hat{V}_j$. Но тогда $g(I) = \tilde{g}(I) = \tilde{g}(1)I \subseteq \bigoplus_{j=1}^{m} \hat{V}_j$, что невозможно, так как $\tilde{g}(I_{m+1}) = g(I_{m+1}) = g_{m+1}(I_{m+1}) \not\subseteq \bigoplus_{j=1}^{m} \hat{V}_j$ в силу (c). Противоречие доказывает утверждение. □

Следствие 6.7. *Если кольцо R нётерово справа, то для любого множества $\{M_\alpha | \alpha \in A\}$ правых R-модулей выполнено равенство*

$$\widehat{\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha} = \bigoplus_{\alpha \in A} \hat{M}_\alpha$$

.

Доказательство. В силу леммы 6.2 $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ — большой подмодуль модуля $\bigoplus_{\alpha \in A} \hat{M}_\alpha$, который инъективен по теореме 6.6. □

Задачи к лекции 6.

Задача 6.1. (a) Покажите, что если Q_1, Q_2 — инъективные модули и существуют мономорфизмы $\mu_1 : Q_1 \to Q_2$, $\mu_2 : Q_2 \to Q_1$, то $Q_1 \cong Q_2$. (b) Верно ли это для произвольных модулей Q_1, Q_2?

Задача 6.2. Найдите инъективную оболочку группы $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p — простое число), если рассматривать её (a) как $\mathbb{Z}$-модуль, (b) как $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-модуль.

Задача 6.3. Покажите, что для кольца R следующие условия эквивалентны: (1) R нётерово справа; (2) для каждого инъективного правого R-модуля Q модуль $Q^{(\mathbb{N})}$ также инъективен (здесь $Q^{(\mathbb{N})}$ — прямая сумма счётного множества копий модуля Q).

Задача 6.4. Пусть V — простой правый R-модуль и $S = \mathrm{End}(\hat{V})$. Докажите, что (a) $J(S) = \{f \in S | \ker(f) \supseteq V\}$; (b) $S/J(S)$ — тело.

Лекция 7. Неразложимые модули, теорема единственности разложения (теорема Крулля–Ремака–Шмидта–Адзумаи).

1°. Локальные кольца.

Определение 7.1. Кольцо R называется *локальным*, если $R/J(R)$ — тело.

Предложение 7.2. *Пусть R — ненулевое кольцо. Следующие условия эквивалентны:*
(1) *R — локальное кольцо;*
(2) *$J(R)$ — максимальный правый идеал;*
(3) *$J(R)$ — максимальный левый идеал;*
(4) *для любого элемента $x \in R$ либо x либо $1-x$ — обратимый элемент.*

Доказательство.
(1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3). Очевидно, так как в теле нет ни левых ни правых собственных ненулевых идеалов.
(2) $\Rightarrow$ (4) и (3) $\Rightarrow$ (4). Пусть выполнено условие (2) и $x \in R$. Если $x \in J(R)$, то $1-x$ — обратимый элемент. Пусть $x \notin J(R)$. Тогда $xR+J(R)=R$, т.е. $xr+y=1$ для некоторых $r \in R,\ y \in J(R)$. Значит, $xr'=1$, где $r'=r(1-y)^{-1}$. Если $r'x \in J(R)$, то $x = xr'x = x(r'x) \in J(R)$, так как $J(R) \lhd R$, что противоречит выбору x. Следовательно, $r'x \notin J(R)$ и по доказанному выше $r'xr''=1$ для некоторого элемента $r'' \in R$. Осталось заметить, что $x = xr'xr'' = xr''$, откуда $r'x=1$, т.е. $r'=x^{-1}$. Аналогично доказывается вторая импликация.
(4) $\Rightarrow$ (1). Если $\overline{x} = x+J(R) \neq 0$, то $x \notin J(R)$, поэтому правый идеал xR не является квазирегулярным, значит, существует такой элемент $r \in R$, что элемент $1-xr$ необратим. Тогда элемент xr обратим, значит, $xa=1$, где $a = r(xr)^{-1}$. Аналогично проверяется существование такого элемента $b \in R$, что $bx=1$. Но тогда $b = bxa = a$ и x — обратимый элемент R. Значит, $\overline{x}$ — обратимый элемент кольца $R/J(R)$. $\square$

Примеры: кольцо формальных степенных рядов $K[[x]]$ над полем K; локализация коммутативного кольца по простому идеалу (см. задачу 7.3).

2°. Теорема Крулля–Ремака–Шмидта–Адзумаи.

Определение 7.3. Модуль M называется *разложимым*, если его можно разложить в прямую сумму двух ненулевых подмодулей. В противном случае он называется *неразложимым*.

Предложение 7.4. *Правый модуль M неразложим тогда и только тогда, когда кольцо $\mathrm{End}(M)$ не содержит нетривиальных (т.е. отличных от 0 и 1) идемпотентов.*

Доказательство. Пусть модуль M неразложим и e — идемпотент кольца $\mathrm{End}(M)$. Покажем, что тогда $M = e(M) \oplus (1-e)(M)$. Действительно, для любого $x \in M$ имеем $x = e(x)+(1-e)x$, откуда $M = e(M)+(1-e)(M)$, и если $x \in e(M) \cap (1-e)(M)$, то $x = e(y) = (1-e)z$ для некоторых $y, z \in M$, откуда $e(x) = e^2(y) = e(y) = x$ и $e(x) = e(1-e)(z) = e(z)-e^2(z) = 0$, т.е. $x=0$. Следовательно, либо $e(M)=0$, т.е. $e=0$, либо $(1-e)(M)=0$, т.е. $e=1$.

Обратно, если $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1, M_2 — собственные подмодули, то проекция e_i на M_i — идемпотент в $\mathrm{End}(M)$ при $i=1,2$, причём $e_1+e_2=1$ и $e_i \neq 1$ при $i=1,2$. $\square$

Следствие 7.5. *Если кольцо эндоморфизмов модуля M локально, то модуль M неразложим и $M \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{End}(M)$ — локальное кольцо. Тогда $M \neq 0$, так как в локальном кольце $0 \neq 1$. Заметим, что в локальном кольце только два идемпотента: 0 и 1. Действительно, если $0 \neq e = e^2 \neq 1$, то $e(1-e)=0$, значит, элементы e и $1-e$ необратимы, что противоречит 7.2(4). Из предложения 7.4 следует неразложимость M. $\square$

Теорема 7.6. *Если $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha = \bigoplus_{\beta \in B} N_\beta$, причем $\mathrm{End}(M_\alpha)$ — локальное кольцо для каждого $\alpha \in A$ и N_β — ненулевой неразложимый модуль для каждого $\beta \in B$, то указанные разложения эквивалентны в следующем смысле: существует биекция $p : A \to B$, такая, что $M_\alpha \cong N_{p(\alpha)}$ для всех $\alpha \in A$.*

Доказательство основано на нескольких леммах.

Лемма 7.7. *Пусть $M = K \oplus L$, $\pi : M \to K$ — проекция M на K с ядром L, $\varphi \in \mathrm{End}(M)$. Если $\pi\varphi|_K$ — автоморфизм модуля K, то $M = \varphi(K) \oplus L$.*

Доказательство. Пусть $m \in M$ и $m = x+y$, $x \in K$, $y \in L$. Тогда $x = \pi\varphi(x')$ для некоторого элемента $x' \in K$. Значит, $\pi(m-\varphi(x')) = \pi(m)-\pi\varphi(x') = x-x = 0$, т.е. $m-\pi\varphi(x') \in \ker(\pi) = L$ и $M = \varphi(K)+L$. Если $m \in \varphi(K) \cap L$, то $m = \varphi(x)$ для некоторого элемента $x \in K$, причём $0 = \pi(m) = \pi\varphi(x)$, откуда $x=0$ и $m=0$. Таким образом, $\varphi(K) \cap L = 0$, и $M = \varphi(K) \oplus L$. $\square$

В следующих леммах предполагается, что разложение в прямую сумму $M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы.

Лемма 7.8. *Для любого ненулевого подмодуля K модуля M множество $A_0(K) = \left\{\alpha \in A | K \cap \left(\bigoplus_{\alpha' \in A \setminus \{\alpha\}} M_{\alpha'}\right) = 0\right\}$ конечно.*

Доказательство. Пусть $0 \neq x \in K$. Тогда существует такой конечный набор индексов F, что $x \in \bigoplus_{\alpha \in F} M_\alpha$ Но тогда $A_0(K) \subseteq F$, так как если $\alpha \notin F$, то $F \subseteq A \setminus \{\alpha\}$ и $x \in \left(\bigoplus_{\alpha' \in A \setminus \{\alpha\}} M_{\alpha'}\right) \cap K$. $\square$

Лемма 7.9. *Пусть $\sigma, \tau \in \mathrm{End}(M)$, причём $\sigma + \tau = 1$. Тогда для любого конечного множества индексов $F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq A$ существуют эндоморфизмы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \{\sigma, \tau\}$ и подмодули $C_1, \ldots, C_n$ такие, что*
(a) $C_i = \varphi_i(M_{\alpha_i})$ и $\varphi_i|_{M_{\alpha_i}}$ — мономорфизм для любого $i = 1, \ldots, n$;
(b) $M = (\oplus_{i=1}^n C_i) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in A \setminus F} M_\alpha\right)$.

Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ пусть $K = M_{\alpha_1}$ и $L = \bigoplus_{\alpha \in A\setminus\{\alpha_1\}} M_\alpha$. Тогда $M = K \oplus L$. Пусть $\pi : M \to K$ — проекция M на K с ядром L. Тогда $\pi\sigma|_K, \pi\tau|_K \in \mathrm{End}(K)$ и $\pi\sigma|_K + \pi\tau|_K = 1$. Так как $\mathrm{End}(K)$ — локальное кольцо, то один из этих эндоморфизмов обратим, т.е. является автоморфизмом. Применяя лемму 7.7, получаем модуль C_1 и эндоморфизм φ_1, удовлетворяющие условиям (a) и (b). Теперь пусть $n > 1$ и пусть для множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ модули $C_1, \ldots, C_{n-1}$ уже найдены. Тогда положим $K = M_{\alpha_n}$, $L = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} C_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in A\setminus F} M_\alpha\right)$. Снова, как для случая $n = 1$, применяем лемму 7.7 и получаем φ_n и C_n. □

Лемма 7.10. *Пусть $M = K \oplus L$, где подмодуль $K \neq 0$ неразложим, и $\pi : M \to K$ — проекция на K с ядром L. Тогда существует такой индекс $\alpha \in A$, что $\pi|_{M_\alpha} : M_\alpha \to K$ — изоморфизм и $M_\alpha \oplus L = M$.*

Доказательство. Учитывая включение $K \subseteq M$, можем считать, что $\pi \in \mathrm{End}(M)$. Выберем элемент $x \in K \setminus \{0\}$. Тогда существует такой конечный набор индексов $F = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и элементов $x_i \in M_{\alpha_i}$, $i = 1, \ldots, n$, что $x = x_1 + \ldots + x_n$. Положим $\sigma = \pi$, $\tau = 1 - \pi$ и применим к F лемму 7.9. Покажем, что среди эндоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ хотя бы один равен π. Предположим противное: $\varphi_1 = 1 - \pi$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Получим

$$0 = (1-\pi)(x) = (1-\pi)(x_1) + \ldots + (1-\pi)(x_n) = \varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_n(x_n).$$

Но поскольку $\varphi_i(x_i) \in C_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$, а модули $C_1, \ldots, C_n$ ввиду 7.9(b) образуют прямую сумму, имеем $\varphi_1(x_1) = \ldots = \varphi_n(x_n) = 0$, откуда ввиду 7.9(a) получаем $x_1 = \ldots = x_n = 0$, т.е. $x = 0$, что противоречит выбору x. Теперь положим $\alpha = \alpha_i$, для которого $\varphi_i = \pi$. Тогда $\varphi_i(M_\alpha) \subseteq \pi(M) = K$. Поскольку $C_i = \varphi_i(M_\alpha)$ — прямое слагаемое в M, C_i также является прямым слагаемым в K (если $C_i \oplus C' = M$, то $K = C \oplus (C' \cap K)$). Из неразложимости K получаем, что $C_i = K$. Осталось проверить, что $M_\alpha \oplus L = M$. Но для любого $m \in M$ запишем $m = x + y$, где $x \in K, y \in L$ и выберем $x' \in M_\alpha$ так, что $\pi(x') = x$. Тогда $x - x' = y' \in L$ и $m = x' + (y + y') \in M_\alpha + L$. Наконец, если $x' \in L \cap M_\alpha$, то $\pi(x') = 0$ и $x' = 0$, так как $\pi|_{M_\alpha}$ — мономорфизм. □

Теперь можно дать

Доказательство теоремы 7.6. Из леммы 7.10 вытекает, что каждый модуль N_β изоморфен некоторому модулю M_α, следовательно, все кольца $\mathrm{End}(N_\beta)$ локальны. Для любого неразложимого подмодуля T модуля M положим $A(T) = \{\alpha \in A | M_\alpha \cong T\}$ и $B(T) = \{\beta \in B | N_\beta \cong T\}$. Ясно, что для неразложимых модулей T и T' либо $A(T) = A(T')$ либо $A(T) \cap A(T') = \varnothing$, поэтому множества $A(T)$ (соответственно, $B(T)$) образуют разбиение множества A (соответственно, B). Для завершения доказательства теперь достаточно установить, что $\mathrm{card}(A(T)) \geq \mathrm{card}(B(T))$, где $\mathrm{card}(S)$ обозначает мощность множества S (обратное неравенство получается, если рассмотреть модули N_β вместо M_α в 7.9 и 7.10). Рассмотрим два случая.
1) Множество $A(T)$ конечно: $|A(T)| = n$. Допустим, что $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ — различные элементы множества $B(T)$. Будем последовательно применять лемму 7.10. Сначала положим $K = N_{\beta_1}$ и $L = \bigoplus_{\beta \in B\setminus\{\beta_1\}} N_\beta$ и найдём индекс $\alpha_1 \in A$, для которого $N_{\beta_1} \cong M_{\alpha_1}$ и $M_{\alpha_1} \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in B\setminus\{\beta_1\}} N_\beta\right) = M$, затем, полагая $K = N_{\beta_2}$ и $L = M_{\alpha_1} \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in A\setminus\{\beta_1,\beta_2\}} N_\beta\right)$, выберем $\alpha_2 \in A$, для которого $N_{\beta_2} \cong M_{\alpha_2}$ и $M_{\alpha_1} \oplus M_{\alpha_2} \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in B\setminus\{\beta_1,\alpha_2\}} N_\beta\right) = M$ и т.д., пока не получим разложения $M = M_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus M_{\alpha_{n+1}} \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in B\setminus\{\beta_1,\ldots,\beta_{n+1}\}} N_\beta\right)$. Очевидно, что $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ различны и принадлежат $A(T)$, что невозможно. Получаем $\mathrm{card}(B(T)) \leq n$.
2) Множество $A(T)$ бесконечно. Для любого $\alpha \in A$ положим $F_\alpha = \left\{\gamma \in B | M = M_\alpha \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in B\setminus\{\gamma\}} N_\beta\right)\right\}$. В силу леммы 7.8, F_α — конечное множество. Применяя лемму 7.10 к разложению $M = N_\gamma \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in B\setminus\{\gamma\}} N_\beta\right)$, где γ — произвольный элемент из $B(T)$, имеем $\bigcup_{\alpha \in A(T)} F_\alpha = B(T)$. Таким образом, $\mathrm{card}(B(T)) \leq \mathrm{card}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A(T)^n) = \mathrm{card}(A(T) \times \mathbb{N}) = \mathrm{card}(A(T))$ в силу бесконечности множества $A(T)$[1]. □

Задачи к лекции 7.

Задача 7.1. Приведите пример неразложимого модуля, кольцо эндоморфизмов которого не является локальным.

Задача 7.2. Опишите неразложимые конечно порождённые абелевы группы.

Задача 7.3. Пусть R — коммутативное кольцо. Собственный идеал P кольца R называется *простым*, если из $ab \in P$ следует, что $a \in P$ или $b \in P$. Пусть P — простой идеал кольца R и $S = R \setminus P$. На множестве пар $\{(r,s) | r \in R, s \in S\}$ введём отношение $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$, если существует такой элемент $s \in S$, что $s(s_1 r_2 - s_2 r_1) = 0$. Это отношение является отношением эквивалентности (докажите!), и класс эквивалентности пары (r, s) мы обозначим через rs^{-1}. На множестве указанных классов эквивалентности определяются операции $r_1 s_1^{-1} + r_2 s_2^{-1} = (r_1 s_2 + r_2 s_1)(s_1 s_2)^{-1}$ и $r_1 s_1^{-1} \cdot r_2 s_2^{-1} = (r_1 r_2)(s_1 s_2)^{-1}$ (проверьте корректность определения операций!). Докажите, что относительно введённых операций множество классов является кольцом, и это кольцо — локальное.

Задача 7.4. Пусть $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Покажите, что существует R-модуль, имеющий неэквивалентные (в смысле теоремы 7.6) разложения в прямую сумму неразложимых прямых слагаемых.

[1] см., например, §I.2 книги Л.А.Скорнякова “Элементы общей алгебры”, М:Наука, 1983 или любой курс теории множеств или функционального анализа.

Лекция 8. Характеризация нётеровых и артиновых колец с помощью неразложимых модулей

1°. Однородные модули.

Определение 8.1. Модуль M называется *однородным*, если любые два ненулевых подмодуля в M имеют ненулевое пересечение.

Очевидно, что условие однородности модуля M равносильно тому, что любой ненулевой подмодуль в M является большим. Также очевидно, что однородный модуль неразложим.

Предложение 8.2. *Пусть правый модуль $Q \neq 0$ над кольцом R инъективен. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *Q неразложим;*
(2) *Q является инъективной оболочкой любого своего ненулевого подмодуля;*
(3) *Q является однородным;*
(4) *Q является инъективной оболочкой некоторого своего однородного подмодуля;*
(5) *кольцо $\mathrm{End}(Q)$ является локальным.*

Доказательство.
(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $U_R \subseteq Q$ и $U \neq 0$. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & \hat{U} \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

видно, что $\ker(f) \cap U = 0$, значит, f — мономорфизм, и можно считать, что $\hat{U} \subseteq Q$. Но в силу инъективности модуля $\hat{U}$ имеем $Q = \hat{U} \oplus K$ для некоторого подмодуля K модуля Q. Из неразложимости Q следует $\hat{U} = Q$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть U_1 и U_2 — такие подмодули в Q, что $U_1 \cap U_2 = 0$ и $U_1 \neq 0$. Тогда $Q = \hat{U}_1$, следовательно, U_1 — большой подмодуль модуля Q, откуда $U_2 = 0$.
(3) $\Rightarrow$ (4). Тривиально, так как $Q = \hat{Q}$.
(4) $\Rightarrow$ (5). Пусть $Q = \hat{U}$, где U — однородный подмодуль, $f \in \mathrm{End}(Q)$ и $g = 1 - f$. Тогда $\ker(f) \cap \ker(g) = 0$ и тем более $(\ker(f) \cap U) \cap (\ker(g) \cap U) = 0$. В силу однородности U, либо $\ker(f) \cap U = 0$, либо $\ker(g) \cap U = 0$. Пусть $\ker(f) \cap U = 0$. Но тогда $\ker(f) = 0$, так как U — большой подмодуль в Q, и $f(Q) \cong Q$ — инъективный подмодуль в Q. Следовательно, $Q = f(Q) \oplus L$ для некоторого подмодуля $L \subseteq Q$ и $0 \neq f(Q) \cap U \Rightarrow L \cap U = 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow Q = f(Q)$, значит, f — изоморфизм, т.е. обратимый элемент кольца $\mathrm{End}(Q)$. Аналогично, если $\ker(g) \cap U = 0$, то g — изоморфизм. Получили условие 7.2(4) для кольца $\mathrm{End}(Q)$.
(5) $\Rightarrow$ (1). Доказано в 7.5. □

Следствие 8.3.
(a) *Инъективная оболочка любого простого модуля — неразложимый модуль.*
(b) *Любой неразложимый инъективный модуль содержит не более одного простого подмодуля.*
(c) *Если кольцо R артиново справа, то каждый неразложимый инъективный правый R-модуль есть инъективная оболочка некоторого простого R-модуля.*

Доказательство. (a) Простой модуль V является однородным, следовательно, $\hat{V}$ удовлетворяет условию 8.2(4).
(b) Если V_1, V_2 — простые подмодули инъективного модуля Q, то Q содержит инъективный модуль $\hat{V}_1 \oplus \hat{V}_2$, который выделяется в Q прямым слагаемым: $Q = \hat{V}_1 \oplus \hat{V}_2 \oplus K$. Видно, что Q разложим.
(c). Пусть Q — неразложимый инъективный правый модуль над артиновым справа кольцом R. Выберем $q \in Q \setminus 0$ и заметим, что модуль qR (как гомоморфный образ модуля R_R) артинов, следовательно, он содержит минимальный подмодуль, скажем, V. Но тогда по 8.2(2) $Q = \hat{V}$. □

Лемма 8.4. *Пусть кольцо R нётерово справа.*
(a) *Любой ненулевой правый R-модуль M содержит ненулевой однородный подмодуль.*
(b) *любой правый R-модуль M содержит прямую сумму однородных правых R-модулей, которая является большим подмодулем в M.*

Доказательство.
(a) Пусть $0 \neq m \in M$. Тогда $N = mR$ — нётеров модуль. Допустим, что модуль N не содержит ненулевых однородных подмодулей. В частности, он сам не является однородным, следовательно в нём есть ненулевые подмодули N_1 и N_1' такие, что $N_1 \cap N_1' = 0$. Поскольку N_1' не однороден, он содержит ненулевые подмодули N_2 и N_2' такие, что $N_2 \cap N_2' = 0$. Продолжая таким образом, получаем бесконечную возрастающую цепь $N_1 \subset N_1 \oplus N_2 \subset \ldots$ подмодулей модуля N, что невозможно.
(b) Пусть $M \neq 0$, так как при $M = 0$ нечего доказывать. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — множество всех ненулевых однородных подмодулей правого модуля M (оно непустое в силу (a)), S — множество таких подмножеств $B \subseteq A$, что модули $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ образуют прямую сумму. Введём в S частичный порядок с помощью отношения включения. Ясно, что это множество удовлетворяет условиям леммы Цорна, поэтому в нём имеется максимальный элемент B_0. Покажем, что $N = \bigoplus_{\alpha \in B_0} U_\alpha$ — большой подмодуль модуля M. Действительно, если $N \cap K = 0$ и $K \neq 0$, то в силу (a) найдётся индекс $\alpha \in A$ такой, что $U_\alpha \subseteq K$, следовательно, $N \cap U_\alpha = 0$ и $B_0 \cup \{\alpha\} \in S$, что противоречит максимальности B_0. □

Лемма 8.5. *Для любых модулей $M_1, \dots, M_n$ имеет место равенство $\widehat{\oplus_{i=1}^n M_i} = \oplus_{i=1}^n \hat{M}_i$.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \oplus_{i=1}^n M_i \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{i=1}^n \hat{M}_i \arrow[dl, dashed, "f"] \\
 & \widehat{\oplus_{i=1}^n M_i} &
\end{tikzcd}$$

Из леммы 6.2 следует, что $\oplus_{i=1}^n M_i$ — большой подмодуль модуля $\oplus_{i=1}^n \hat{M}_i$, поэтому $\ker(f) = 0$ и $f(\oplus_{i=1}^n \hat{M}_i)$ — инъективный подмодуль модуля $\widehat{\oplus_{i=1}^n M_i}$, содержащий $\oplus_{i=1}^n M_i$. Из этого следует утверждение леммы. $\square$

Теорема 8.6. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*
(1) *R нётерово справа;*
(2) *любой инъективный правый R-модуль разлагается в прямую сумму неразложимых (инъективных) модулей.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть Q — инъективный правый модуль над нётеровым справа кольцом R, $Q \neq 0$ и $N = \bigoplus_{\alpha \in A} U_\alpha$ — большой подмодуль модуля Q, где все U_α однородны (см.8.4(b)). Тогда $\bigoplus_{\alpha \in A} \hat{U}_\alpha$ — большой инъективный (в силу теоремы 6.6) подмодуль модуля Q, откуда следует, что $Q = \bigoplus_{\alpha \in A} \hat{U}_\alpha$, где все модули $\hat{U}_\alpha$ неразложимы в силу 8.2.
(2) $\Rightarrow$ (1) В силу теоремы 6.6(4) и следствия 8.3(a) достаточно показать, что если $Q_1, Q_2, \dots$ — неразложимые инъективные модули, то их прямая сумма $M = \bigoplus_{i=1}^\infty Q_i$ является инъективным модулем. Положим $Q = \hat{M}$ и $L_i = \bigoplus_{j=i+1}^\infty Q_j$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Из леммы 8.5 вытекает, что $\left(\bigoplus_{j=1}^i Q_i\right) \oplus \hat{L}_i = Q$ для любого $i \in \mathbb{N}$. По условию, найдутся такие неразложимые инъективные модули M_α, $\alpha \in A$, что $Q = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$. Из 8.2(5) следует, что это разложение удовлетворяет условию теоремы 7.6. Аналогично одному из этапов её доказательства построим по индукции такую последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ индексов из A, что $M_{\alpha_i} \cong Q_i$ и $\left(\bigoplus_{j=1}^i M_{\alpha_j}\right) \oplus \hat{L}_i = Q$ для всех $i \in \mathbb{N}$. При $i = 1$ положим $K = Q_1$ и $L = \hat{L}_1$ и по лемме 7.10 найдём индекс $\alpha_1 \in A$, для которого $Q_1 \cong M_{\alpha_1}$ и $M_{\alpha_1} \oplus \hat{L}_1 = Q$. Если $i > 1$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}$ уже найдены, то положим $K = Q_i$ и $L = \left(\bigoplus_{j=1}^{i-1} M_{\alpha_j}\right) \oplus \hat{L}_i$. Заметим, что по лемме 8.5 имеем $\hat{L}_{i-1} = Q_i \oplus \hat{L}_i$, поэтому $K \oplus L = Q$ и по лемме 7.10 найдётся индекс α_i из A, для которого $M_{\alpha_i} \cong Q_i$ и

$$M_{\alpha_i} \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{i-1} M_{\alpha_j}\right) \oplus \hat{L}_i = \left(\bigoplus_{j=1}^{i} M_{\alpha_j}\right) \oplus \hat{L}_i = Q.$$

Итак, $M \cong \bigoplus_{i=1}^\infty M_{\alpha_i}$. Но $Q = (\bigoplus_{i=1}^\infty M_{\alpha_i}) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}} M_\alpha\right)$, следовательно, $\bigoplus_{i=1}^\infty M_{\alpha_i}$ — инъективный модуль и M также инъективен. $\square$

Теорема 8.7. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*
(1) *R артиново справа;*
(2) *любой инъективный правый R-модуль разлагается в прямую сумму инъективных оболочек простых модулей.*

Доказательство. Напомним, что артиново справа кольцо нётерово справа (теорема 5.14). Поскольку при $R = 0$ доказывать нечего, пусть $R \neq 0$.
(1) $\Rightarrow$ (2) Сразу следует из теоремы 8.6 и следствия 8.3(c).
(2) $\Rightarrow$ (1) Покажем сначала, что при условии (2) любой ненулевй правый R-модуль M содержит простой подмодуль. Действительно, пусть $\hat{M} = \bigoplus_{\alpha \in A} Q_\alpha$, где $Q_\alpha = \hat{V}_\alpha$ и V_α — простой модуль для любого $\alpha \in A \neq \varnothing$. Тогда V_α — ненулевой подмодуль, а M — большой подмодуль модуля в $\hat{M}$. Следовательно, $V_\alpha \cap M \neq 0$, откуда $V_\alpha \subseteq M$.

Заметим также, что из условия (2), следствия 8.3(a) и теоремы 8.6 вытекает, что R — нётерово справа кольцо. Теперь построим возрастающую цепь артиновых подмодулей модуля R_R по индукции. Положим $I_1 = V$, где V — простой подмодуль модуля R_R. Если правый идеал I_n уже построен и $I_n \neq R$, выберем в R/I_n простой подмодуль V и положим $I_{n+1} = \pi^{-1}(V)$, где $\pi : R \to R/I_n$ — канонический гомоморфизм. Тогда $I_{n+1} \supsetneqq I_n$ и $I_{n+1}/I_n = V$ — артинов модуль, так как V и I_n — артиновы модули (см. 5.4). Поскольку модуль R_R нётеров, для некоторого n получается $I_n = R$. $\square$

Задачи к лекции 8.

Задача 8.1. Приведите пример неразложимого модуля, который не является однородным.

Задача 8.2. Верно ли, что если модуль U однороден, то любой его фактор-модуль также однороден?

Задача 8.3. Модуль M называется *полуартиновым*, если любой ненулевой фактор-модуль модуля M содержит простой подмодуль. Докажите, что нётеров модуль полуартинов тогда и только тогда, когда он артинов.

Задача 8.4. Пусть N — подмодуль модуля M. Докажите, что M полуартинов тогда и только тогда, когда N и M/N — полуартиновы модули.

Задача 8.5. Покажите, что сумма любого множества полуартиновых подмодулей некоторого модуля — полуартинов модуль.

Задача 8.6. Докажите эквивалентность следующих условий: (1) кольцо R полуартиново справа, т.е. модуль R_R полуартинов; (2) любой правый R-модуль полуартинов.

Лекция 9. Проективные накрытия

Условие "N является малым подмодулем модуля M" **будем далее записывать сокращённо так:** $N \ll M$.

Лемма 9.1.
(*a*) *Если $K \ll M$ и $L \ll M$, то $K + L \ll M$.*
(*b*) *Пусть $f : M \to N$ — гомоморфизм модулей и $K \ll M$. Тогда $f(K) \ll N$.*
(*c*) *Если $K_1 \ll M_1, \ldots, K_n \ll M_n$, то $\bigoplus_{i=1}^n K_i \ll \bigoplus_{i=1}^n M_i$.*
(*d*) *Пусть P — проективный правый модуль и $S = \mathrm{End}(P)$. Тогда $J(S) = \{f \in S | f(P) \ll P\}$.*

Доказательство.
(*a*) Для любого подмодуля N модуля M имеем $K + L + N = M \Rightarrow K + (L + N) = M \Rightarrow L + N = M \Rightarrow L = M$.
(*b*) Пусть L — подмодуль в N и $f(K) + L = N$. Тогда $f(K) + L \cap f(M) = f(M)$ (закон модулярности 1.5). Положим $L' = f^{-1}(L)$ и заметим, что $K + L' = M$, откуда $L' = M$ и $f(M) = f(L') \subseteq L$. Следовательно, $N = f(K) + L \subseteq f(M) + L \subseteq L$, или $L = N$.
(*c*) Из утверждения (*b*), применённого к вложению M_i в $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$, вытекает, что $K_i \ll M$ при всех $i = 1, \ldots, n$, а тогда из (*a*) по индукции получаем (*c*).
(*d*) Пусть $f(P) \ll P$. Достаточно проверить (в силу 4.11), что $fS \ll S_S$. Предположим, что $fS + K = S$ для некоторого подмодуля K модуля S_S. Тогда имеем $1 = fs + u$ для некоторых элементов $s \in S$, $u \in K$. Тогда $P = f(s(P)) + u(P) \subseteq f(P) + u(P)$, откуда $u(P) = P$. Теперь имеем точную последовательность $0 \to \ker(u) \to P \xrightarrow{u} P \to 0$. Эта точная последовательность в силу проективности модуля P расщепляется, т.е. существует эндоморфизм $g \in S$ такой, что $ug = 1$. Но $ug \in K$, поэтому $K \ni 1$ и $K = S$.
Обратно, пусть $f \in J(S)$, K — подмодуль модуля P, такой, что $f(P) + K = P$, и $\pi : P \to P/K$ — канонический гомоморфизм. Из равенства $f(P) + K = P$ вытекает, что $\pi f : P \to P/K$ — эпиморфизм. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, dashed, "\tilde{\pi}"'] \arrow[d, "\pi"] & \\ P \arrow[r, "\pi f"] & P/K \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где $\tilde{\pi}$ существует в силу проективности модуля P. Но это означает, что $\pi f \tilde{\pi} = \pi \Rightarrow \pi(1 - f\tilde{\pi}) = 0 \Rightarrow \pi = 0$, поскольку $f\tilde{\pi} \in J(S)$ и, следовательно, $1 - f\tilde{\pi}$ — изоморфизм. Но из $\pi = 0$ следует $K = P$. □

Определение 9.2. Проективный модуль P называется *проективным накрытием* модуля M, если $M \cong P/K$, где $K \ll P$. Эпиморфизм $P \to M$ с ядром K будем называть накрывающим эпиморфизмом.

Заметим, что в отличие от инъективной оболочки, проективное накрытие существует не всегда (см. задачу 1).

Предложение 9.3. *Если проективное накрытие модуля M существует, то оно единственно в следующем смысле: пусть P_1 и P_2 — проективные накрытия модуля M, т.е. $M \cong P_1/K_1 \cong P_2/K_2$, где $K_1 \ll P_1$, $K_2 \ll P_2$; π_1, π_2 — накрывающие эпиморфизмы для P_1, P_2. Тогда существует изоморфизм $f : P_1 \to P_2$, для которого следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & P_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму, в которой гомоморфизм f существует в силу проективности модуля P_1, а гомоморфизм g будет определён далее:

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\pi_1"] & \\ P_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[ur, dotted, bend left, "g"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Достаточно проверить, что f — изоморфизм.

Прежде всего заметим, что $\pi_2 f(P_1) = \pi_1(P_1) = M = \pi_2(P_2)$, следовательно, $f(P_1) + \ker(\pi_2) = P_2$. Но $\ker(\pi_2) = K_2 \ll P_2$, следовательно, $f(P_1) = P_2$, т.е. f — эпиморфизм. В силу проективности модуля P_2 точная последовательность $P_1 \xrightarrow{f} P_2 \to 0$ расщепляется: существует такой гомоморфизм $g : P_2 \to P_1$, что $fg = 1_{P_2}$. При этом $\pi_1 g = \pi_2 fg = \pi_2$, значит, $\pi_1 g(P_2) = \pi_2(P_2) = M = \pi_1(P_1)$, откуда $g(P_2) + \ker(\pi_1) = P_1$. Но $\ker(\pi_1) = K_1 \ll P_1$, поэтому $g(P_2) = P_1$. Теперь если $x \in \ker(f)$, то $x = g(y)$ для некоторого $y \in P_2$ и $0 = f(x) = fg(y) = y$, стало быть $x = g(0) = 0$, и f — мономорфизм. □

Поскольку прямая сумма проективных модулей есть проективный модуль, сразу получаем

Следствие 9.4. *Если $P_1, \ldots, P_k$ — проективные накрытия модулей $M_1, \ldots, M_n$, то $\bigoplus_{i=1}^n P_i$ — проективное накрытие модуля $\bigoplus_{i=1}^n M_i$.* □

Определение 9.5. Множество идемпотентов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ кольца R называется *ортогональным*, если $e_i e_j = 0$ при $1 \le i \ne j \le n$, и *полным*, если $e_1 + \ldots + e_n = 1$.

Пример: если e — идемпотент, то $\{e, 1 - e\}$ — полное ортогональное множество идемпотентов.

Лемма 9.6.
(a) Если $\{e_1,\ldots,e_n\}$ — полное ортогональное множество идемпотентов кольца R, то $R = e_1R\oplus\ldots\oplus e_nR$.
(b) Если $R_R = I_1\oplus\ldots\oplus I_n$, то существует единственное полное ортогональное множество идемпотентов $\{e_1,\ldots,e_n\}$ кольца R, такое, что $I_k = e_kR$ при всех $k = 1,\ldots,n$.

Доказательство. (a) Для любого $x\in R$ имеем $x = 1x = (e_1+\ldots+e_n)x = e_1x+\ldots+e_nx\in e_1R+\ldots+e_nR$. Если же $x\in e_iR\cap\left(\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} e_jR\right)$, то $x = e_ix\in e_i\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} e_jR = 0$, значит, сумма $R = e_1R+\ldots+e_nR$ — прямая.
(b) Пусть $\pi_k : R\to I_k$ — проекция R на I_k с ядром $\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}} I_j$. Положим $e_k = \pi_k(1)$, $k = 1,\ldots,n$. Тогда $\{e_1,\ldots,e_n\}$ — искомое множество идемпотентов. Действительно, если $1\le k\le n$, то $I_k = \pi_k(R) = \pi_k(1\cdot R) = e_kR$. Далее, поскольку π_k — проекция, $e_k = \pi_k(1\cdot e_k) = \pi_k(1)e_k = e_k^2$ и $0 = \pi_k(1\cdot e_j) = \pi_k(1)e_j = e_ke_j$ для любого $j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}$.
Наконец, единственность указанного множества вытекает из того, что $1 = e_1+\ldots+e_n$ — единственное представление элемента 1 в виде суммы элементов прямых слагаемых. ☐

Лемма 9.7. *Пусть e — идемпотент кольца R. Тогда*
(a) имеется естественный изоморфизм колец $\mathrm{End}(eR)\cong eRe$;
(b) $J(eR) = eJ(R)$, $J(eRe) = eJ(R)e$ и $eRe/J(eRe)\cong \overline{e}(R/J(R))\overline{e}$.

Доказательство.
(a) Для любого элемента $r\in eRe$ определим гомоморфизм $f_r : eR\to eR$ правилом $f_r(x) = rx$. Очевидно, что $\varphi : r\mapsto f_r$ — гомоморфизм колец. Покажем, что φ — изоморфизм. Заметим, что $f_r(e) = r$, поэтому $\ker(\varphi) = 0$. Теперь пусть $f : eR\to eR$ — произвольный эндоморфизм. Положим $r = f(e)$. Тогда $r\in eR$ и $r = f(e^2) = f(e)e = re$. Значит, $r = ere\in eRe$. Наконец, для любого $x\in eR$ имеем $f(x) = f(ex) = f(e)x = rx$, т.е. $f = f_r = \varphi(r)$.
(b) Начнём с простого замечания: если $e^2 = e\in R$ и $I\lhd R$, то $eI = eR\cap I$. Действительно, $eR\subseteq eR\cap I$ при любом e. Обратно, если $x\in eR\cap I$, то $x = ex\in eI$. Аналогично проверяется, что $Ie = Re\cap I$ и $eIe = eRe\cap I$. Далее, $J(eR)\subseteq eR\cap J(R) = eJ(R)$ и $eJ(R)\subseteq J(eR)$ по лемме Накаямы 4.13. Проверим второе равенство. Из (a), 9.1(d) и 4.8 для любого $r\in eRe$ получаем $r\in J(eRe)\Leftrightarrow f_r\in J(\mathrm{End}(eR))\Leftrightarrow f_r(eR)\ll eR\Leftrightarrow reR\subseteq J(eR)\Leftrightarrow r\in J(R)\cap eR\Leftrightarrow r\in J(R)\Leftrightarrow r = ere\in eJ(R)e$. Наконец, пусть $\overline{R} = R/J(R)$ и $\pi : R\to\overline{R}$ — канонический гомоморфизм. Ясно, что $\pi(eRe) = \overline{e}\overline{R}\overline{e}$. При этом $\ker(\pi|_{eRe}) = \ker(\pi)\cap eRe = J(R)\cap eRe = eJ(R)e = J(eRe)$. Итак, $eRe/J(eRe)\cong\overline{e}\overline{R}\overline{e}$. ☐

Теорема 9.8. *Циклический правый модуль M над кольцом R имеет проективное накрытие тогда и только тогда, когда $M\cong eR/eI$ для некоторого идемпотента $e\in R$ и некоторого правого идеала I кольца R, который содержится в $J(R)$. При этом eR — проективное накрытие модуля M.*

Доказательство. Если $M = eR/eI$, где $e^2 = e$ и $I\subseteq J(R)$, то eR — проективное накрытие M. Действительно, в силу 9.6(a) eR — проективный R-модуль, а в силу 9.7(b) $eJ(R) = J(eR)$. Поскольку eR —циклический модуль, $J(eR)$ является, в силу 4.8, малым подмодулем в eR. Тем более верно, что $eI\ll eR$.

Теперь пусть P — проективное накрытие модуля M и $\pi : P\to M$ — накрывающий эпиморфизм. Но циклический правый модуль — это гомоморфный образ модуля R_R, поэтому можно рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, dashed, "\overline{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ P \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где f — эпиморфизм, а гомоморфизм $\overline{f}$ существует в силу проективности модуля R_R. Из сюръективности f следует, что $\overline{f}(R)+\ker(\pi) = P$, а $\ker(\pi)\ll P$, значит, $\overline{f}$ — эпиморфизм. Но точная последовательность $R\xrightarrow{\overline{f}} P\to 0$ расщепляется, т.е. модуль P изоморфен прямому слагаемому модуля R_R, а оно имеет вид eR для некоторого идемпотента $e\in R$. При этом изоморфизме $\ker(\pi)$ переходит в малый подмодуль I модуля eR. Осталось заметить, что $I = eI$ и из 4.8 следует, что $I\subseteq J(eR)$, а $J(eR)\subseteq J(R)$ в силу 4.6(1). ☐

Задачи к лекции 9.

Задача 9.1. Покажите, что $\mathbb{Z}$-модуль имеет проективное накрытие тогда и только тогда, когда он свободен.

Задача 9.2. Покажите, что существуют модуль M и (бесконечное) множество $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ малых подмодулей модуля M, для которых $\sum_{\alpha\in A} M_\alpha$ не является малым подмодулем модуля M.

Задача 9.3. Верно ли утверждение 9.1(c) для бесконечных прямых сумм?

Задача 9.4. Докажите, что если e, f — идемпотенты кольца R, то абелева группа $\mathrm{Hom}(eR, fR)$ изоморфна подгруппе fRe аддитивной группы кольца R.

Задача 9.5. Докажите, что если e, f — идемпотенты кольца R, то $eR\cong fR\Leftrightarrow Re\cong Rf$.

Лекция 10. Поднятие идемпотентов и полусовершенные кольца.

В этой лекции предполагается, что все рассматриваемые кольца — ненулевые.

Определение 10.1. Пусть I — идеал кольца R и $\overline{R} = R/I$. Говорят, что *можно поднимать идемпотенты по модулю* I, если для любого идемпотента $\overline{e} \in \overline{R}$ существует идемпотент $e \in R$ такой, что $e + I = \overline{e}$.
Говорят, что *можно поднимать (полные) ортогональные множества идемпотентов по модулю* I, если для любого (полного) ортогонального множества идемпотентов $\{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\} \subseteq \overline{R}$ существует такое (полное) ортогональное множество идемпотентов $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq R$, что $e_i + I = \overline{e}_i$ при всех $i = 1, \dots, n$.

Предложение 10.2. *Идемпотенты можно поднимать по модулю любого ниль-идеала.*

Доказательство. Пусть I — ниль-идеал кольца R и $\pi : R \to \overline{R} = R/I$ — канонический гомоморфизм. Если $\overline{e} = \pi(f)$ — идемпотент кольца $\overline{R}$, то $f^2 - f \in I$, и существует число $n \in N$ такое, что $(f^2 - f)^n = 0$. Имеем

$$0 = (f - f^2)^n = \textstyle\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{n-i}(-1)^i f^{2i} = f^n - f^{n+1} \underbrace{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} f^{i-1}}_{=t},$$

т.е. $f^n = f^{n+1}t$, где $t \in R$ и $ft = tf$. Положим $e = f^n t^n$. Получим $e = f^{n+1}tt^n = f^{n+1}t^{n+1} = eft$, откуда $e = e(ft)^n = e^2$. Осталось заметить, что $\overline{e} = \overline{e}^n = \pi(f)^n = \pi(f)^{n+1}\pi(t) = \overline{e}\pi(t)$, откуда $\pi(e) = \overline{e}^n \pi(t)^n = \overline{e}\pi(t)^n = \overline{e}$. $\square$

Теорема 10.3. *Пусть R — кольцо, $I \lhd R$ и $I \subseteq J(R)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *можно можно поднимать идемпотенты по модулю I;*
(2) *каждое прямое слагаемое правого модуля $(R/I)_R$ имеет проективное накрытие;*
(3) *каждое прямое слагаемое левого модуля ${}_R(R/I)$ имеет проективное накрытие;*
(4) *полные ортогональные множества идемпотентов можно поднимать по модулю I;*
(5) *ортогональные множества идемпотентов можно поднимать по модулю I.*

Доказательство. Положим $\overline{R} = R/I$. Заметим сразу, что по условию $I \ll R_R$ и $I \ll {}_R R$.
(1) $\Rightarrow$ (2) Ясно, что прямое слагаемое K модуля $\overline{R}_R$ является одновременно прямым слагаемым модуля $\overline{R}_{\overline{R}}$, поэтому $K = \overline{e}\overline{R}$ для некоторого идемпотента $\overline{e}$ кольца $\overline{R}$. Из (1) следует, что $\overline{e} = e + I$, где $e^2 = e \in R$. Используя 9.7(b), получаем $K = (eR + I)/I \cong eR/(I \cap eR) = eR/eI$, следовательно, K имеет проективное накрытие по теореме 9.7.
(1) $\Rightarrow$ (3) Аналогично.
(2) $\Rightarrow$ (4) Пусть $\{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\} \subseteq \overline{R}$ — полное ортогональное множество идемпотентов кольца $\overline{R}$. Тогда $\overline{R}_R = \bigoplus_{k=1}^n \overline{e}_k R$ и каждый циклический модуль $\overline{e}_k R$ имеет проективное накрытие P_k, $k = 1, \dots, n$. Заметим, что R — проективное накрытие модуля $(\overline{R})_R$ с каноническим эпиморфизмом $\pi : R \to \overline{R}$ в качестве накрывающего (так как $I \ll R_R$). В силу следствия 9.4 и единственности проективного накрытия получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \bigoplus_{k=1}^n P_k \arrow[r, "f"] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0\,, \\ & \bigoplus_{k=1}^n \overline{e}_k R \arrow[r, equal] & \overline{R} & \end{tikzcd}$$

где f — изоморфизм. Значит, в силу 9.6(b) имеем $f(P_k) = e_k R$, $k = 1, \dots, n$, для некоторого полного ортогонального множества идемпотентов $\{e_1, \dots, e_n\}$. Равенства $e_k + I = \overline{e}_k$ вытекают из единственности представления элемента $\pi(1)$ в виде суммы элементов, принадлежащих прямым слагаемым $\overline{e}_1 R, \dots, \overline{e}kR$.
(3) $\Rightarrow$ (4) Аналогично.
(4) $\Rightarrow$ (5) Если $\{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$ — ортогональное множество идемпотентов кольца $\overline{R}$, то $\{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n, \overline{1} - (\overline{e}_1 + \ldots + \overline{e}_n)\})$ — полное ортогональное множество идемпотентов кольца $\overline{R}$. Поднятие второго множества включает поднятие первого.
(5) $\Rightarrow$ (1) Тривиально: множество из одного идемпотента $\{\overline{e}\}$ — ортогональное множество идемпотентов. $\square$

Определение 10.4. Кольцо $R \neq 0$ называется *полусовершенным*, если $R/J(R)$ — классически полупростое кольцо (см. 3.5 и 3.8) и идемпотенты можно поднимать по модулю радикала $J(R)$.

Определение 10.5. Идемпотент e кольца R называется *локальным*, если eRe — локальное кольцо.

Лемма 10.6. *Идемпотент e кольца R является локальным тогда и только тогда, когда $eR/eJ(R)$ — простой правый R-модуль.*

Доказательство. Пусть $\overline{R} = R/J(R)$ и $\pi : R \to \overline{R}$ — канонический гомоморфизм. Положим $\overline{e} = \pi(e)$. Известно из 9.8, что $eRe/J(eRe) \cong \overline{e}\overline{R}\overline{e} \cong \mathrm{End}(\overline{e}\overline{R})$. Если $eR/eJ(R) \cong \overline{e}\overline{R}$ — простой правый R-модуль, то кольцо $\mathrm{End}(\overline{e}\overline{R})$, по лемме Шура, есть тело.

Обратно, пусть eRe — локальное кольцо. Выберем в eR максимальный подмодуль K (он существует, так как ненулевой модуль eR конечно порождён). Предположим, что K не является малым подмодулем в eR. Тогда существует подмодуль L модуля eR такой, что $K + L = eR$, но $L \neq eR$. Имеем $eR/K \cong (L+K)/K \cong L/(L \cap K)$, т.е. существует эпиморфизм $f : eR \to L/(L \cap K)$. Вместе с каноническим гомоморфизмом $L \to L/(L \cap K)$ это даёт коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & eR \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ L \arrow[r] & L/(L \cap K) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где гомоморфизм $\tilde{f}$ существует в силу проективности модуля eR. Поскольку $L \subseteq eR$, можно рассматривать $\tilde{f}$ как элемент кольца $S = \mathrm{End}(eR) \cong eRe$. Поскольку $\tilde{f}s(eR) \subseteq \tilde{f}(eR) \subseteq L \neq eR$ для любого эндоморфизма $s \in S$, элемент fs необратим, а элемент $1 - fs$, следовательно, обратим в силу 7.2, поскольку $S \cong eRe$ — локальное кольцо. Получаем, что $\tilde{f} \in J(S)$, откуда в силу 9.1(d) имеем $\tilde{f}(eR) \ll eR$. С другой стороны, $\tilde{f}(eR) + (K \cap L) = L$, и $\tilde{f}(eR) + K = \tilde{f}(eR) + (K \cap L) + K = L + K = eR$, значит, $K = eR$, противоречие. Итак, $eJ(R) = J(eR) \subseteq K \subseteq J(eR)$, следовательно, $\overline{e}\overline{R} = eR/J(eR) = eR/K$ — простой правый R-модуль. □

Теорема 10.7. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*
(1) *кольцо R полусовершенно;*
(2) *кольцо R содержит полное ортогональное множество локальных идемпотентов;*
(3) *каждый простой правый R-модуль имеет проективное накрытие;*
(4) *каждый простой левый R-модуль имеет проективное накрытие;*
(5) *каждый конечно порождённый правый R-модуль имеет проективное накрытие;*
(6) *каждый конечно порождённый левый R-модуль имеет проективное накрытие.*

Доказательство. Положим для краткости $J = J(R)$. Пусть $\overline{R} = R/J$ и $\pi : R \to \overline{R}$ — канонический гомоморфизм.

(1) ⇒ (2) По определению, классически полупростое кольцо $\overline{R}$ есть прямая сумма простых подмодулей, а каждое слагаемое по 9.6(b) имеет вид $\overline{e}_i\overline{R}$, причём $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ — полное ортогональное множество идемпотентов кольца $\overline{R}$. Поднимем его до полного ортогонального множества $\{e_1, \ldots, e_n\}$ идемпотентов кольца R. Выберем произвольно идемпотент e из этого множества. Тогда $\overline{e} = e + J \in \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$. Следовательно, в силу 9.8 имеем $eRe/J(eRe) \cong \overline{e}\overline{R}\overline{e}$, а кольцо $\overline{e}\overline{R}\overline{e}$ — тело, согласно лемме Шура.

(2) ⇒ (3) Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — полное ортогональное множество локальных идемпотентов.

Заметим, что из равенства $R = e_1R \oplus \ldots \oplus e_nR$ следует, что $\overline{R} = \pi(e_1)R + \ldots + \pi(e_n)R$, причём в силу ортогональности идемпотентов $\pi(e_1), \ldots, \pi(e_n)$ эта сумма — прямая, а в силу леммы 10.6 её слагаемые — простые R-модули (и $\overline{R}$-модули). Ясно, что каждый простой правый R-модуль есть фактор-модуль модуля $\overline{R}_{\overline{R}}$, следовательно, изоморфен какому-то из модулей $\overline{e}_i\overline{R}$, $1 \leq i \leq n$, а модуль $\overline{e}_i\overline{R}$ имеет проективное накрытие e_iR в силу 9.7.

(2) ⇒ (4) Аналогично предыдущему.

(3) ⇒ (5) Сначала заметим, что если P — проективное накрытие простого модуля V, то ядро N накрывающего гомоморфизма $\rho : P \to V$ содержит любой собственный подмодуль L модуля P. Действительно, если $L \nsubseteq N$, то $\rho(L) \neq 0 \Rightarrow \rho(L) = V \Rightarrow L + N = P \Rightarrow L = P$, поскольку $N \ll P$. В частности, $N = J(P)$.

Пусть теперь $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — множество всех максимальных правых идеалов кольца R, P_α — проективное накрытие простого модуля R/M_α и $\pi_\alpha : P_\alpha \to R/M_\alpha$ — накрывающий эпиморфизм для всех $\alpha \in A$. Положим $P = \bigoplus_{\alpha \in A} P_\alpha$. Введём для любого модуля K обозначение $\mathrm{Tr}_K(P) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}(P,K)} f(P)$. Очевидно, что $\mathrm{Tr}_K(P)$ — подмодуль модуля K. Покажем, что если модуль K конечно порождён, то $\mathrm{Tr}_K(P) = K$. Действительно, если $\mathrm{Tr}_K(P) \subsetneqq K$, то существует максимальный подмодуль N модуля K, содержащий $\mathrm{Tr}_K(P)$. Но тогда $K/N \cong M_\alpha$ для некоторого $\alpha \in A$, значит, существует эпиморфизм $f : P \to K/N$. В силу проективности модуля P получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ K \arrow[r] & K/N \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

из которой очевидно, что $\tilde{f}(P) \nsubseteq N$, что невозможно, так как $\tilde{f}(P) \subseteq \mathrm{Tr}_K(P) \subseteq N$. Итак, найдется такая конечная прямая сумма $P' = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$, где каждый модуль P_i — проективное накрытие простого модуля V_i, что существует эпиморфизм $f : P' \to K$. Поскольку $f(J(P')) \subseteq J(K)$, эпиморфизм f индуцирует эпиморфизм $\overline{f} : P'/J(P') \to K/J(K)$. Тогда $K/J(K)$ — сумма образов относительно $\overline{f}$ простых модулей $V_i = P_i/J(P_i)$, и можно выбрать минимальное подмножество $B \subseteq \{1, \ldots, n$ такое, что $\sum_{i \in B} \overline{f}(V_i) = K/J(K)$. Но тогда без ограничения общности можно считать, что $B = \{1, \ldots, m\}$ для некоторого $m \leq n$, и $K/J(K) = \bigoplus_{i=1}^m \overline{f}(P_i/J(P_i))$. Положим $P'' = \bigoplus_{i=1}^m P_i$, тогда $f(P'') + J(K) = K$, откуда $f(P'') = K$ и $\ker(f|_{P''}) \subseteq J(P'') \ll P''$. Следовательно, P'' — проективное накрытие модуля K.

(4) ⇒ (6) Аналогично предыдущему.

(5) ⇒ (1) То, что (полные) ортогональные множества идемпотентов можно поднимать по модулю J, сразу вытекает из 10.3. Рассмотрим произвольный подмодуль модуля $\overline{R}_R$. Ясно, что он имеет вид R/K, где $K \supseteq J$, причём в силу 9.7 $M \cong eR/eI$ для некоторого правого идеала I кольца R такого, что $I \subseteq J$. Но тогда $(eR/eI)J = (R/K)J = RJ/K = 0$, значит, $eJ = eRJ \subseteq eI$, откуда $eI = eJ$. Но тогда $R/K \cong eR/eJ = \pi(e)\overline{R}$ — проективный $\overline{R}$-модуль, следовательно, он выделяется в $\overline{R}$ прямым слагаемым, т.е. модуль $\overline{R}_{\overline{R}}$ вполне приводим.

(6) ⇒ (1) Аналогично предыдущему. □

Задачи к лекции 10.

Задача 10.1. Приведите пример такого кольца R, что $R/J(R)$ — артиново кольцо, но идемпотенты не поднимаются по модулю $J(R)$.

Задача 10.2. (a) Докажите, что коммутативное кольцо полусовершенно тогда и только тогда, когда оно есть прямая сумма локальных колец; (b) покажите, что условие коммутативности в (a) нельзя отбросить.

Задача 10.3. Покажите, что любое артиново слева или справа кольцо полусовершенно.

Задача 10.4. Покажите, что любое фактор-кольцо полусовершенного кольца полусовершенно.

Лекция 11. Совершенные кольца

1°. T-нильпотентность.

Определение 11.1. Подмножество S кольца R называется *T-нильпотентным справа* (*слева*), если для любой последовательности $\{x_i\}$, такой, что $x_i \in S$ при всех $i = 1, 2, \ldots$, существует такое число n, что $x_n x_{n-1} \ldots x_1 = 0$ (соответственно, $x_1 x_2 \ldots x_3 = 0$).

Предложение 11.2. *Следующие свойства идеала I кольца R эквивалентны:*
(1) *идеал I является T-нильпотентным справа;*
(2) *$MI \neq M$ для любого ненулевого правого R-модуля M;*
(3) *$MI \ll M$ для любого ненулевого правого R-модуля M.*

Доказательство.
(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть M — правый R-модуль и $M \neq 0$, но $MI = I$. Построим по индукции последовательность $\{x_n\}$ элементом I, для которых $Mx_n x_{n-1} \ldots x_1 \neq 0$. Поскольку $0 \neq M = MI$, существует такой элемент $x_1 \in I$, что $Mx_1 \neq 0$. Если $x_1, \ldots, x_n$ уже найдены, из $0 \neq Mx_n x_{n-1} \ldots x_1 = MIx_n x_{n-1} \ldots x_1$ следует, что существует такой элемент $x_{n+1} \in I$, что $Mx_{n+1} x_n x_{n-1} \ldots x_1 \neq 0$. Противоречие.
(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть M — правый R-модуль и L — подмодуль модуля M. Из $MI + L = M$ вытекает, что $(M/L)I = M/L$, поэтому $M/L = 0$ и $M = L$.
(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть F — свободный правый F-модуль со счётным базисом $e_1, e_2, \ldots$ и $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов идеала I. Рассмотрим подмодуль G модуля F, порождённый элементами $e_1 - e_2 x_1, e_2 - e_3 x_2$ и т.д. Заметим, что $e_n = (e_n - e_{n+1} x_n) + e_{n+1} x_n \in G + FI$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $G = F$ и $e_1 \in G$. Но если $r_1, \ldots, r_n \in R$ и

$$\begin{aligned} e_1 &= (e_1 - e_2 x_1) r_1 + (e_2 - e_3 x_2) r_2 + \ldots + (e_{n-1} - e_n x_{n-1}) r_{n-1} + (e_n - e_{n+1} x_n) r_n \\ &= e_1 r_1 + e_2(-x_1 r_1 + r_2) + \ldots + e_n(-x_{n-1} r_{n-1} + r_n) - e_{n+1} x_n r_n, \end{aligned}$$

то $r_1 = 1$, $r_2 = x_1 r_1 = x_1$, $r_3 = x_2 r_2 = x_2 x_1$ и т.д. до $r_n = x_{n-1} \ldots x_1$ и $x_n r_n = x_n x_{n-1} \ldots x_1 = 0$. □

Очевидно, что свойство идеала быть T-нильпотентным "лежит между" свойствами быть нильпотентным идеалом и быть ниль-идеалом.

2°. Определения совершенного кольца.

Лемма 11.3.
(a) *Если P — проективный правый модуль над кольцом R, то $J(P) = PJ(R)$.*
(b) *Любой ненулевой проективный модуль содержит максимальный подмодуль.*

Доказательство.
Воспользуемся эквивалентным проективности модуля P условием 2.2(3): существует такое семейство элементов $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq P$ и такое семейство гомоморфизмов $\{f_\alpha\} \subseteq \mathrm{Hom}(P, R)$, что $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha f_\alpha(x)$ для любого элемента $x \in P$. Положим $J = J(R)$. Если теперь $x \in J(P)$, то $f_\alpha(x) \in J$ для любого $\alpha \in A$, поэтому $x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha f_\alpha(x) \in PJ$, т.е. $J(P) \subseteq PJ$. Обратное же включение в силу 4.9 справедливо для любого модуля P, что и доказывает (a).
Для доказательства b заметим, что если P не содержит максимальных подмодулей, то $J(P) = P = PJ$ в силу (a). Для произвольного $a \in P$ запишем $a = \sum_{\alpha \in A_0} x_\alpha f_\alpha(a)$, где A_0 — некоторое конечное подмножество множества A, и $x_\alpha = \sum_{\beta \in B_\alpha} x_\beta y_{\alpha\beta}$, где $y_{\alpha\beta} \in J$ и B_α — также некоторое конечное подмножество множества A для любого $\alpha \in A_0$. Положим $C = A_0 \cup \left(\bigcup_{\alpha \in A_0} B_\alpha\right)$. Рассмотрим подмодуль P_0, порождённый конечным множеством $\{x_\gamma | \gamma \in C\}$. Положим $S = \mathrm{End}(P)$ определим эндоморфизм $\varphi \in S$ правилом $\varphi(x) = \sum_{\gamma \in C} x_\gamma f_\gamma(x)$ для любого $x \in P$. Имеем $\varphi(P) = \varphi(PJ) = \varphi(P)J \subseteq P_0 J \ll P_0$ по лемме Накаямы. Тем более $\varphi(P) \ll P$, значит, $\varphi \in J(S)$ по лемме 9.1(d), и эндоморфизм $1 - \varphi$ обратим в S. Но по определению φ имеем $a - vfi(a) = 0$, откуда $a = 0$. Тем самым доказано, что $P = 0$. □

Теорема 11.4. *Пусть R — кольцо и $J = J(R)$. Следующие условия эквивалентны:*
(1) *Каждый правый R-модуль имеет проективное накрытие;*
(2) *R/J — классически полупростое кольцо и каждый ненулевой правый модуль содержит максимальный подмодуль;*
(3) *R/J — классически полупростое кольцо и идеал J является T-нильпотентным справа;*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно, что в силу теоремы 10.7 кольцо R полусовершенно, в частности, кольцо R/J классически полупросто. Далее, если M — ненулевой правый R-модуль, P — его проективное накрытие и K — ядро накрывающего эпиморфизма $\rho : P \to M$, то существует максимальный подмодуль L модуля P. Поскольку $K \ll P$, $K \subseteq L$ и $P/L \cong (P/K)/(L/K) \cong M/\rho(L)$ — простой модуль.
(2) $\Rightarrow$ (3) Если правый R-модуль M содержит максимальный подмодуль L, то $MJ \subseteq J(M) \subseteq L \neq M$, поэтому T-нильпотентность справа идеала J непосредственно следует из 11.2.
(3) $\Rightarrow$ (1) В силу предложения 10.2 кольцо R полусовершенно. Пусть M — правый R-модуль и $M \neq 0$. Тогда M/MJ — модуль над классически полупростым кольцом R/J и разлагается в прямую сумму простых подмодулей V_α, $\alpha \in A$, каждый из которых имеет проективное накрытие P_α с накрывающим эпиморфизмом $\rho_\alpha : P_\alpha \to V_\alpha$. В силу 9.7 имеем $P_\alpha \cong e_\alpha R$. Ясно, что $\rho_\alpha(J(P_\alpha)) = 0$, поэтому $\ker(\rho_\alpha) \subseteq J(eR) = eJ$. Обратное включение выполнено, поскольку $\ker(\rho_\alpha) \ll P_\alpha$. Итак, $\ker(\rho_\alpha) = e_\alpha J$ для любого $\alpha \in A$. Положим $P = \bigoplus_{\alpha \in A} P_\alpha$ и определим эпиморфизм $f : P \to M/MJ$ естественным образом как сумму эпиморфизмов ρ_α. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "\pi"] & M/MJ \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

где π — канонический эпиморфизм, а $\tilde{f}$ существует в силу проективности модуля P. Ясно, что $\pi\tilde{f}(P) = f(P) = M/MJ$, поэтому $\tilde{f}(P) + MJ = M$. Но из 11.2(3) вытекает, что $MJ \ll M$. Таким образом, $\tilde{f}$ — эпиморфизм, причём $\ker(\tilde{f}) \subseteq \ker(f) = \bigoplus_{\alpha\in A} e_\alpha J = PJ \ll P$ снова по 11.2(3). Это и означает, что P — проективное накрытие модуля M. $\square$

Определение 11.5. Кольцо R, обладающее одним из свойств (1)-(3) теоремы 11.4, называется *совершенным справа.* Аналогично определяются *совершенные слева* кольца.

Ясно, что если кольцо R артиново справа или слева, то кольцо $R/J(R)$ классически полупросто и $J(R)$ является нильпотентным идеалом. Из этого вытекает

Следствие 11.6. *Если кольцо артиново слева или справа, то оно совершенно и слева и справа.*

Предложение 11.7. *Если кольцо R совершенно справа, то любой ненулевой левый R-модуль содержит минимальный подмодуль.*

Доказательство. Пусть M — ненулевой левый модуль над совершенным справа кольцом R с радикалом $J = J(R)$. Покажем, что $\mathrm{Ann}_M(J) \neq 0$. Предположим противное. Выберем произвольный элемент $m_0 \in M\backslash\{0\}$. Поскольку $Jm_0 \neq 0$, найдётся элемент $x_1 \in J$, для которого $m_1 = x_1m_0 \neq 0$. Продолжая по индукции, получим такую последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов идеала J и такую последовательность $m_0, m_1, \ldots$ элементов модуля M, что $x_nm_{n-1} = m_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Но $m_n = x_mm_{n-1} = x_nx_{n-1}m_{n-2} = \ldots = x_n \ldots x_1m_0$, что противоречит T-нильпотентности справа идеала J.

Теперь заметим, что $\mathrm{Ann}_M(J)$ можно рассматривать как левый R/J-модуль, а тогда $\mathrm{Ann}_M(J)$ — прямая сумма простых подмодулей, любой из которых минимален. $\square$

Следствие 11.8. *Нётерово слева совершенное справа кольцо артиново слева.*

Доказательство. Пусть R — нётерово слева совершенное справа кольцо. Построим по индукции возрастающую цепь артиновых левых идеалов кольца R: положим $I_0 = 0$, а если левый идеал идеал I_n уже определён и $I_n \neq R$, то выберем минимальный подмодуль V модуля ${}_RR/I_n$ и положим $I_{n+1} = \pi^{-1}(V)$ (где $\pi : R \to R/I_n$ — канонический эпиморфизм. По определению $I_{n+1}/I_n \cong V$ — артинов модуль, значит, артинов и модуль I_{n+1}. В силу условия обрыва возрастающих цепей, $I_N = R$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. $\square$

Полусовершенные кольца можно определять одинаково с использованием левых или правых модуле. Напротив, совершенное справа кольцо может не быть совершенным слева.

Построим пример. Пусть V линейное пространство над полем F счётной размерности и $e_1, e_2, \ldots$ — его базис. Положим $V_0 = 0$ и $V_n = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество

$$S = \{f \in \mathrm{End}(V) |\, \dim(f(V)) < \infty \text{ и } \forall n \in \mathbb{N}, f(V_n) \subseteq V_{n-1}\}.$$

Заметим, что множество S является T-нильпотентным справа. Действительно, пусть $f_n \in S$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_1(S) \subseteq V_N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Тогда $f_2f_1(V) \subseteq V_{N-1}$ и т.д., поэтому $f_N \ldots f_1(V) \subseteq V_0 = 0$ и $f_n \ldots f_1 = 0$. С другой стороны, если положить $f_i(e_k) = e_i\delta_{k,i+1}$ для всех $i, k \in \mathbb{N}$, то $f_i \in S$ и $f_1f_2 \ldots f_n(e_{n+1}) = f_1f_2 \ldots f_{n-1}(e_n) = \ldots = f_1(e_2) = e_1 \neq 0$. Значит, множество S не является T-нильпотентным слева. Осталось положить $R = FE + S$, где E обозначает тождественный оператор на V. Ясно, что S — идеал кольца R и $R/S \cong F$ — полупростое артиново кольцо, поэтому $S = J(R)$ и кольцо R совершенно справа, но не слева.

Задачи к лекции 11.

Задача 11.1. Приведите пример кольца, над которым каждый ненулевой правый модуль содержит максимальный подмодуль, но которое не является совершенным справа.

Задача 11.2. Приведите пример кольца, над которым каждый ненулевой левый модуль содержит минимальный подмодуль, но которое не является совершенным справа.

Лекция 12. Тензорные произведение и плоские модули

1°. Тензорное произведение (би-)модулей.

Определение 12.1. Пусть M — правый, а N — левый модуль над кольцом R. Отображение f прямого произведения аддитивных групп $M \times N$ в абелеву группу A называется *сбалансированным*, если
$\forall a, a_1, a_2 \in M,\ b, b_1, b_2 \in N,\ r \in R :\ f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + (a_2, b),\ f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2),\ f(ar, b) = f(a, rb).$
Тензорным произведением модулей M_R и ${}_RN$ называется абелева группа T со сбалансированным отображением $t : M \times N \to T$, обладающим следующим свойством универсальности:
для любого сбалансированного отображения $f : M \times N \to A$ существует единственный гомоморфизм $\tilde{f} : T \to A$ такой, что $\tilde{f}t = f$ (см. диаграмму)

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "\forall f"] & \\ T \arrow[rr, dashed, "\exists!\ \tilde{f}"] & & A. \end{tikzcd}$$

Обозначания: $T = M \otimes_R N$ и $t(a, b) = a \otimes b$ для любых $a \in M$ и $b \in N$.

Предложение 12.2. *Тензорное произведение модулей M_R и ${}_RN$ существует и единственно, с точностью до естественного изоморфизма.*

Доказательство.
Существование. Пусть F — свободная абелева группа с базисом $M \times N$ и G — подгруппа группы F, порождённая множеством

$$\{(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b), (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2), (ar, b) - (a, rb) \mid a, a_1, a_2 \in M,\ b, b_1, b_2 \in N,\ r \in R\}.$$

Из накрывающего свойства свободной абелевой группы следует, что для любой абелевой группы A и любого отображения $f : M \times N \to A$ существует единственное продолжение f до гомоморфизма $g : F \to A$, а условие сбалансированности f равносильно тому, что $G \subseteq \ker(g)$, т.е. в этом случае имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, "g"] \arrow[d, "\pi"] \\ A & F/G, \arrow[l, dashed, "\tilde{f}"] \end{tikzcd}$$

где μ — вложение $M \times N$ в F как базиса, а π — канонический гомоморфизм. Итак, можно взять $T = F/G$ и $t = \pi\mu$.
Единственность. Сразу вытекает из рассмотрения коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dr, "t_2"] & \\ T_1 \arrow[rr, shift left, "\tilde{t}_2"] & & T_2, \arrow[ll, shift left, "\tilde{t}_1"] \end{tikzcd}$$

где T_1, T_2 — два тензорных произведения, а смысл остальных обозначений очевиден. □

Из свойства универсальности сразу вытекают следующие утверждения.

Предложение 12.3.
(*a*) *Для любых гомоморфизмов модулей $f : M_R \to M'_R$ и $g : {}_RN \to {}_RN'$ однозначно определён такой гомоморфизм абелевых групп $f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$, что $f \otimes g(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b)$ для любых $a \in M$ и $b \in N$.*
(*b*) *Для любого семейства правых R-модулей $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и любого левого модуля N имеется естественный изоморфизм $\left(\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha\right) \otimes_R N \cong \bigoplus_{\alpha \in A}(M_\alpha \otimes_R N)$.*
(*c*) *Для любого семейства левых R-модулей $\{N_\beta\}_{\beta \in B}$ и любого правого модуля M имеется естественный изоморфизм $M \otimes_R \left(\bigoplus_{\beta \in B} N_\beta\right) \cong \bigoplus_{\beta \in B}(M \otimes_R N_\beta)$.*

В дальнейшем мы будем чаще рассматривать тензорные произведения бимодулей следующего вида.

Определение 12.4. Пусть R, S — ко́льца. Под (R, S)-бимодулем понимается абелева группа $(M, +)$, которая является левым R-модулем и правым S-модулем, причём $r(ms) = (rm)s$ для любых $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$. Обозначение: ${}_RM_S$.

Примеры: любой правый (левый) R-модуль является $(\mathbb{Z}, R)$-модулем (соответственно, $R, \mathbb{Z})$-модулем), любое кольцо R является (R, R)-бимодулем, любой правый R-модуль является (S, R)-бимодулем, если $S\,\mathrm{End}(m)$.

Если M есть (S, R)-бимодуль и N есть (R, T)-бимодуль, то на тензорном произведении $M \otimes_R N$ естественно задаётся структура (S, T)-бимодуля ($s(a \otimes b)t = (sa) \otimes (bt)$ для любых $a \in M$, $b \in N$, $s \in S$, $t \in T$). При этом гомоморфизмы $f \otimes g$ из 12.3 являются гомоморфизмами бимодулей.

Аналогично, если M есть (S, R)-бимодуль и N есть (T, R)-бимодуль, то на группе $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ естественно определяется структура (T, S)-бимодуля ($(tfs(x) = tf(sx)$ для любых $s \in S$, $t \in T$, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $x \in M$).

Если M, M' суть (S, R)-бимодули, N, N' суть (T, R)-бимодули, $f \in \mathrm{Hom}_R(M', M)$ и $g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$, то естественно строится гомоморфизм бимодулей $\mathrm{Hom}(f, g) : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M', N')$, определённый правилом: $\varphi \mapsto g\varphi f$.

Теорема 12.5. *Пусть R, S, T — кольца, ${}_SM_R, {}_RN_T$ — бимодули, K_T — правый модуль. Тогда имеет место изоморфизм правых S-модулей*
$$\mathrm{Hom}_T(M \otimes_R N, K) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_T(N, K)).$$

Доказательство. Укажем взаимно-обратные отображения, задающие указанный изоморфизм.

Пусть $f \in \mathrm{Hom}(M \otimes N, K)$. Для любого $m \in M$ определим $\varphi = \Phi(f)(m) \in \mathrm{Hom}(N, K)$ правилом: $\varphi(n) = f(m \otimes n)$.

Обратно, если $g \in \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, K))$, то $\psi = \Psi(g)$ определим на образующих абелевой группы $M \otimes N$ правилом $\psi(m \otimes n) = g(m)(n)$.

Проверки корректности данных определений и тождеств $\Phi\Psi = 1$ и $\Psi\Phi = 1$ являются рутинными. □

Полагая $T = \mathbb{Z}$ и $K = \mathbf{\Omega}$ (см. лекцию 2), получаем изоморфизм $(M \otimes_R N)^\times \cong \mathrm{Hom}_R(M, N^\times)$.

2°. Эквивалентные определения плоских модулей

Определение 12.6. Левый модуль R_M называется *плоским*, если для любого мономорфизма правых R-модулей $\alpha : A \to B$ гомоморфизм $\alpha \otimes 1_M : A \otimes M \to B \otimes M$ является мономорфизмом.

Теорема 12.7. *Для левого модуля ${}_RM$ следующие условия эквивалентны:*
(1) *${}_RM$ — плоский модуль;*
(2) *для каждого правого идеала I кольца R гомоморфизм $I \otimes M \to M$, определённый правилом $x \otimes m \mapsto xm$, является мономорфизмом;*
(3) *правый R-модуль $M^\times$ инъективен.*

Доказательство. Покажем сначала, что гомоморфизм абелевых групп $f : C \to D$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда гомоморфизм $\mathrm{Hom}(f, 1_{\mathbf{\Omega}}) : D^\times \to C^\times$ является эпиморфизмом.

Если f — мономорфизм и $\chi \in C^\times$, то диаграмма
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi"'] & D \arrow[dl, dashed, "\tilde\chi"] \\ & \mathbf{\Omega} & \end{tikzcd}$$
дополняется в силу инъективности $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbf{\Omega}$ некотороым характером $\tilde\chi \in D^\times$ до коммутативной диаграммы, следовательно, $\chi = \mathrm{Hom}(f, 1_{\mathbf{\Omega}})(\tilde\chi)$.

Обратно, пусть $\mathrm{Hom}(f, 1_{\mathbf{\Omega}})$ — эпиморфизм и $0 \neq c \in \ker(f)$. Согласно 2.11, канонический гомоморфизм $C \to C^{\times\times}$ является мономорфизмом, т.е. существует такой характер $\chi \in C^\times$, что $\chi(c) \neq 0$. Но если $\chi = \mathrm{Hom}(f, 1_{\mathbf{\Omega}})(\tilde\chi)$ для некоторого характера $\tilde\chi \in D^\times$, то $\chi(c) = \tilde\chi f(c) = 0$. Противоречие.

Теперь докажем эквивалентность следующих условий на гомоморфизм правых R-модулей $\alpha : A \to B$:
(a) $\alpha \otimes 1_M : A \otimes_R M \to B \otimes_R M$ —–мономорфизм;
(b) $\mathrm{Hom}(\alpha \otimes 1_M, 1_{\mathbf{\Omega}}) : (B \otimes_R M)^\times \to (A \otimes_R M)^\times$ — эпиморфизм;
(c) $\mathrm{Hom}(1_M, \mathrm{Hom}(\alpha, 1_{\mathbf{\Omega}})) : \mathrm{Hom}_R(M, B^\times) \to \mathrm{Hom}(M, A^\times)$ — эпиморфизм.

Действительно, эквивалентность $(a) \Leftrightarrow (b)$ следует из доказанного выше при $f = 1_M \otimes \alpha$, а эквивалентность $(b) \Leftrightarrow (c)$ — из коммутативности следующей диаграммы:
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B \otimes_R M, \mathbf{\Omega}) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\alpha\otimes 1_M, 1_{\mathbf{\Omega}})"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes_R M, \mathbf{\Omega}) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_R(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbf{\Omega})) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\alpha, \mathrm{Hom}(1_M, 1_{\mathbf{\Omega}}))"'] & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbf{\Omega})), \end{tikzcd}$$
где вертикальные стрелки — изоморфизмы из теоремы 12.5

Наконец, если потребовать выполнения условий (a)—(c) для каждого мономорфизма α, то (a) означает, что M — плоский модуль, а (c) —– что модуль $M^\times$ инъективен (снова рассмотрим соответствующую диаграмму). Таким образом, (1) $\Leftrightarrow$ (3).

Далее, согласно критерию Бэра, инъектвность модуля $M^\times$ достаточно проверить на мономорфизмах вложения I в R для любого правого идеала I кольца R, т.е. (3) $\Leftrightarrow$ (2). □

Задачи к лекции 12.

Задача 12.1. Пусть $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\mu} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$ — точная последовательность (S, R)-бимодулей и N есть (T, R)-бимодуль. Тогда последовательность
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\pi, 1_N)} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mu, 1_N)} \mathrm{Hom}_R(M', N)$$
является точной.

Задача 12.2. Пусть $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\pi} N'' \longrightarrow 0$ — точная последовательность (S, R)-бимодулей и M есть (T, R)-бимодуль. Тогда последовательность
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1_M, \mu)} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1_M, \pi)} \mathrm{Hom}_R(M, N'')$$
является точной.

Задача 12.3. Пусть $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\pi} N'' \longrightarrow 0$ — точная последовательность (S, R)-бимодулей и M есть (R, T)-бимодуль. Тогда индуцированная последовательность $N' \otimes_R M \longrightarrow N \otimes_R M \longrightarrow N'' \otimes_R M \longrightarrow 0$ является точной.

Лекция 13. Характеризация некоторых классов колец с помощью плоских модулей

1°. Регулярные кольца.

Определение 13.1. Кольцо R называется *регулярным (в смысле фон Неймана*, если для любого элемента $a \in R$ уравнение $axa = a$ имеет решение в R.

Предложение 13.2. *Следующие свойства кольца R эквивалентны:*
(1) *кольцо R регулярно;*
(2) *каждый главный левый идеал кольца R порождён идемпотентом;*
(3) *каждый главный правый идеал кольца R порождён идемпотентом;*
(4) *каждый конечно порождённый левый идеал кольца R порождён идемпотентом;*
(5) *каждый конечно порождённый правый идеал кольца R порождён идемпотентом.*

Доказательство.
(1) ⇒ (2) Если $a \in R$ и $axa = a$ для некоторого $x \in R$, то положим $e = xa$. По определению, $e^2 = xaxa = xa = e$ и $e \in Ra$, причём $a = axa = ae \in Re$. Следовательно, $Ra = Re$.
(1) ⇒ (3) Аналогично.
(2) ⇒ (4) Проведём индукцию по числу порождающих элементов левого идеала. Условие (2) — база индукции. Для индуктивного перехода достаточно показать, что если $e^2 = e \in R$ и $a \in R$, то левый идеал $Ra + Re$ порождён идемпотентом. В силу (2) существует идемпотент $g \in R$ такой, что $Ra(1-e) = Rg$. Поскольку $Ra(1-e) \subseteq Ra + Re$, имеем $Rg \subseteq Ra + Re$, а из $a - ae \in Rg$ вытекает, что $Ra \subseteq Re + Rg$. Итак, $Re + Ra = Re + Rg$, причём $ge = 0$. Положим $f = e + (1-e)g$ и покажем, что $Rf = Re + Rg$. Действительно, $Rf \subseteq Re + Rg$ по определению. Обратно, $ef = e$ и $gf = ge + g^2 - geg = g$, т.е. $Re + Rg \subseteq Rf$. Осталось заметить, что $f^2 = ef + (1-e)gf = f$.
(3) ⇒ (5) Аналогично.
(4) ⇒ (2) и (5) ⇒ (3) Тривиально.
(2) ⇒ (1) Пусть $a \in R$, $Ra = Re$, где e — идемпотент. Тогда существуют элементы $x, y \in R$ такие, что $e = xa,\ a = ye$. Имеем $axa = ae = ye^2 = ye = a$.
(3) ⇒ (1) Аналогично. □

Лемма 13.3. *Пусть M — плоский левый R-модуль, U — подмодуль модуля M и I — правый идеал кольца R. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *естественный гомоморфизм $\alpha : I \otimes_R (M/U) \to M/U$ является мономорфизмом;*
(2) $U \cap IM = IU$.

Доказательство.
(1) ⇒ (2) Поскольку всегда $IU \subseteq U \cap IM$, будем доказывать обратное включение. Пусть $\pi : M \to \overline{M} = M/U$ — канонический гомоморфизм, и пусть $u = \sum_{i=1}^n a_i m_i \in U \cap IM$, где $a_i \in I$, $m_i \in M$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $\alpha\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes \pi(m_i)\right) = \sum_{i=1}^n a_i \pi(m_i) = \pi(u) = 0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^n a_i \otimes \pi(m_i) = 0$. Рассмотрим отображение $f : I \times \overline{M} \to IM/IU$, определённое правилом $f(x, \pi(y)) = xy + IU$ для любых $x, y \in R$. Легко проверить, что отображение f определено корректно и является сбалансированным. Тогда получаем гомоморфизм $\tilde{f} : I \otimes_R \overline{M} \to IM/IU$, продолжающий f. Значит, $0 = \tilde{f}(0) = \tilde{f}(\sum_{i=1}^n a_i \otimes \pi(m_i)) = \sum_{i=1}^n a_i \pi(m_i) + IU = u + IU$, т.е. $u \in IU$.
(2) ⇒ (1) Пусть $\beta : I \otimes M \to M$ — естественный гомоморфизм. Поскольку M плоский, β — мономорфизм. Если $t = \sum_{i=1}^n a_i \otimes \pi(m_i) \in \ker(\alpha)$, где $a_i \in I$, $m_i \in M$, $i = 1, \dots, n$, то $0 = \alpha(t) = \sum_{i=1}^n a_i \pi(m_i) = \pi(\sum_{i=1}^n a_i m_i)$. Тогда $\sum_{i=1}^n (a_i m_i) = \sum_{j=1}^s a'_j u_j$, где $a'_j \in I$, $u_j \in U$. Следовательно, $\sum_{i=1}^n (a_i \otimes m_i) - \sum_{j=1}^s a'_j \otimes u_j \in \ker(\beta) = 0$, значит, $t = (1_I \otimes \pi)(\sum_{j=1}^s a'_j \otimes u_j) = \sum_{j=1}^s a'_j \otimes \pi(u_j) = 0$. □

Следствие 13.4. *Пусть M — плоский левый R-модуль, U — подмодуль модуля M. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *M/U — плоский модуль;*
(2) *$U \cap IM = IU$ для любого правого идеала I кольца R;*
(3) *$U \cap IM = IU$ для любого конечно порождённого правого идеала I кольца R.*

Доказательство.
(1) ⇔ (2) Следует из 12.7(2) и 13.3.
(2) ⇒ (3) Тривиально.
(3) ⇒ (2) Для любого элемента $u \in U \cap IM$ имеем конечную сумму $u = \sum_{i=1}^n a_i m_i$, где $a_i \in I$, $m_i \in M$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $u \in U \cap I_0 M$, где $I_0 = \sum_{i=1}^n a_i R$. Применяя (3) к правому идеалу I_0, получаем: $u \in I_0 U \subseteq IU$. □

Теорема 13.5. *Следующие свойства кольца R эквивалентны:*
(1) *кольцо R регулярно;*
(2) *каждый левый R-модуль является плоским;*
(3) *каждый правый R-модуль является плоским;*

Доказательство.
(1) ⇒ (2) Достаточно, в силу теоремы 12.7, показать, что если M — левый R-модуль, и I — правый идеал кольца R, то естественный гомоморфизм $I \otimes_R M \to M$ является мономорфизмом. Пусть $a = \sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i \in I \otimes_R M$ и $\sum a_i m_i = 0$. Но правый идеал, порождённый элементами $a_1, \dots, a_n$, в силу 13.2 порождён некоторым идемпотентом $e \in I$. Имеем

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i = \sum_{i=1}^n e a_i \otimes m_i = \sum_{i=1}^n e \otimes a_i m_i = e \otimes \left(\sum_{i=1}^n a_i m_i\right) = e \otimes 0 = 0.$$

(1) $\Rightarrow$ (3) Аналогично.
(2) $\Rightarrow$ (1) Полагаем в лемме 13.3 $M = {}_RR$, $U = Ra$, $I = aR$ и получаем $aR \cap Ra = aRa$, откуда $a \in aRa$.
(3) $\Rightarrow$ (1) Аналогично. □

2°. Совершенные кольца.

Теорема 13.6. *Следующие условия на кольцо R эквивалентны:*
(1) *кольцо R совершенно справа;*
(2) *каждый плоский правый R-модуль проективен;*
(3) *кольцо R удовлетворяет условию минимальности для главных левых идеалов;*
(4) *кольцо R не содержит бесконечных множеств ненулевых ортогональных идемпотентов и каждый ненулевой левый R-модуль содержит минимальный подмодуль.*

Доказательство. Положим $J = J(R)$.
(1) $\Rightarrow$ (2) Пусть D_R — плоский правый R-модуль, P — его проективное накрытие с накрывающим гомоморфизмом $\rho : P \to D$ и $U = \ker(\rho)$. Тогда из того, что P и P/U — плоские модули, в силу 13.4 имеем $UJ = U \cap PJ = U$, так как в силу 11.3(*a*) $J(P) = PJ$. Но UJ должен содержаться в любом максимальном подмодуле модуля U, поэтому из второго определения совершенности (11.4(2)) вытекает, что $U = 0$ и $D = P$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Предположим, что $Ra_1 \supsetneqq Ra_2 \supsetneqq \ldots$ — строго убывающая цепь левых идеалов. Положим $x_1 = a_1$, $a_i = x_i a_{i-1} = \ldots = x_i x_{i-1} \ldots x_1$ для всех $i > 0$. Как при доказательстве предложения 11.1, рассмотрим свободный правый R-модуль F со счётным базисом $e_1, e_2, \ldots$ и его подмодуль G, порождённый элементами $g_1 = e_1 - e_2x_1, g_2 = e_2 - e_3x_2, \ldots$. Покажем, что модуль F/G — плоский. Действительно, в силу 13.4 достаточно проверить, что $GI = G \cap FI$ для любого левого идеала I кольца R. Пусть $g \in G \cap FI$, т.е. для некоторых $y_1, \ldots, y_n \in I$ и $r_1, \ldots, r_s \in R$ выполняется равенство

$$g = (e_1 - e_2x_1)r_1 + \ldots + (e_n - e_{n+1}x_n)r_n = e_1y_1 + \ldots + e_sy_s.$$

Без ограничения общности можно считать, что $s \geq n+1$. Приравнивая коэффициенты при элементах базиса, начиная с e_1 и заканчивая e_{n+1}, последовательно получим $r_1 = y_1 \in I$, $-x_1r_1 + r_2 = y_2 \Rightarrow r_2 \in I$ и т.д. до коэффициентов при e_n, которые дают равенство $-x_{n-1}r_{n-1} + r_n = y_n \Rightarrow r_n \in I$. Отсюда следует, что $g \in GI$. Применяя это рассуждение к идеалу $I = 0$, получаем, что $g_1, g_2, \ldots$ — базис свободного модуля G, в частности, существует изоморфизм $f : G \to F$ такой, что $f(g_i) = e_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$.

В силу (2) модуль F/G проективен, значит, точная последовательность $0 \to G \to F \to G/F \to 0$ расщепляется, и имеется проекция $\pi : F \to G$. Рассмотрим композицию $s = f\pi$. Для любого $i \in \mathbb{N}$ можно записать $s(e_i) = \sum_j e_jr_{i,j}$, $r_{i,j} \in R$, причём каждая такая сумма конечна. Теперь заметим, что

$$e_i = f(g_i) = s(g_i) = s(e_i) - s(e_{i+1})x_i = \textstyle\sum_j e_jr_{i,j} - \sum_j e_jr_{i,j}x_i = \sum_j e_j(r_{i,j} - r_{i+1,j}x_i),$$

откуда $r_{i,j} - r_{i+1,j}x_i = \delta_{i,j}$. Выберем такое $t \in \mathbb{N}$, что $t > 1$ и $r_{1,t} = 0$. Тогда имеем

$$0 = r_{1,t} = r_{2,t}x_1 = r_{3,t}x_2x_1 = \ldots = r_{t,t}x_{t-1}\ldots x_1 = -(r_{t+1,t}x_t + 1)x_{t-1}\ldots x_1.$$

Следовательно, $a_{t-1} = x_{t-1}\ldots x_1 = -r_{t+1,t}x_tx_{t-1}\ldots x_1 = r_{t+1,t}a_t \in Ra_t$. Но тогда $Ra_t = Ra_{t-1}$, что противоречит предположению.
(3) $\Rightarrow$ (4) Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — бесконечная ортогональная система ненулевых идемпотентов. Положим $f_n = e_1 + \ldots + e_n$ и $I_n = R(1 - f_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $e_{n+1}f_n = f_ne_{n+1} = 0$, поэтому $f_nf_{n+1} = f_{n+1}f_n = f_n$ и $(1 - f_{n+1})(1 - f_n) = 1 - f_n - f_{n+1} + f_n = 1 - f_{n+1}$, т.е. $I_{n+1} \subseteq I_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, $e_{n+1}(1 - f_n) = e_{n+1}$, но $e_{n+1}(1 - f_{n+1}) = 0$, т.е. $e_{n+1} \in I_n \setminus I_{n+1}$. Противоречие доказывает первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения предположим, что ${}_RM \neq 0$ и M не содержит минимальных подмодулей. Выберем произвольно $m_1 \in M \setminus \{0\}$. Далее будем строить последовательно элементы $m_2, m_3 \ldots \in M$ следующим способом. Пусть элемент m_n уже найден. Поскольку $Rm_n \neq 0$ и Rm_n не является простым модулем, можно выбрать $m_{n+1} \in Rm_n$ так, что $0 \neq Rm_{n+1} \neq Rm_n$. По построению $m_{n+1} = r_nm_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторых $r_1, r_2, \ldots \in R$. Положим теперь $I_n = Rr_n \ldots r_1$. Тогда, конечно, $I_n \subsetneqq I_{n-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поскольку $Rm_{n+1} = I_nm_1$, а $Rm_n = I_{n-1}$. Противоречие.
(4) $\Rightarrow$ (1) Сначала покажем, что идеал J является T-нильпотентным справа. Предположим противное: существует последовательность $x_1, x_2 \ldots \in J$ такая, что множество S всех произведений вида $x_nx_{n-1}\ldots x_1$, $n \in \mathbb{N}$, не содержит нуля. Тогда множество левых идеалов I кольца R, для которых $I \cap S = \varnothing$, непусто и удовлетворяет условиям леммы Цорна. Пусть I_0 — максимальный элемент этого множества, V — простой подмодуль модуля R/I_0 и U — такой левый идеал кольца R, что $U/I_0 = V$. Ввиду максимальности элемента I_0 существует такое число n, что $x_n \ldots x_1 \in U$. Но $JV = 0$, поэтому $JU \subseteq I_0$ и, в частности, $x_{n+1}x_n \ldots x_1 \in I_0$. Противоречие.

Далее нам понадобится некоторый общий факт.

Лемма 13.7. *Если e, f — идемпотенты кольца R и $ef, fe \in J(R)$, то существует такой идемпотент $g \in R$, что $f - g \in J(R)$ и $eg = ge = 0$.*

Доказательство леммы 13.7. Поскольку $fe \in J(R)$, элемент $(1 - fe)$ обратим. Положим $h = (1 - fe)^{-1}f(1 - fe)$. Прямое вычисление показывает, что $h^2 = h, he = 0$ и

$$f - h = (1 - fe)^{-1}((1 - fe)f - f(1 - fe) = (1 - fe)^{-1}(fe - fef) \in J(R).$$

Очевидно также, что $eh = ef + e(h - f) \in J(R)$. Теперь пусть $g = h - eh$. Снова вычисляем $g^2 = h - heh - eh + eheh = g$, $f - g = f - h + eh \in J(R)$, $eg = eh - eh = 0$ и $ge = he - ehe = 0$. □

Завершение доказательства теоремы 13.6 Во-первых, вспомним лемму 5.11 (в левостороннем варианте): если V — минимальный левый идеал кольца R, то либо $V^2 = 0$, либо $V = Re$, где $0 \neq e = e^2 \in R$. Для полупростого кольца

$\overline{R} = R/J$ первый вариант невозможен, поэтому каждый простой подмодуль в левом модуле $\overline{R}$ выделяется прямым слагаемым. Покажем, что модуль $\overline{R}$ разлагается в конечную прямую сумму простых подмодулей. Действительно, стартуем с произвольного простого подмодуля $V_1 = R\overline{e}_1$, где $\overline{e}_1$ — идемпотент кольца $\overline{R}$. Пусть теперь $R = V_1 \oplus U_1$. Если $U_1 = 0$ или U_1 — простой модуль, разложение получено, иначе $R = V_1 \oplus V_2 \oplus U_2$ и т.д. На каждом шаге мы получили идемпотенты $\overline{e}_i$ такие, что $V_i = R\overline{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Согласно лемме 9.6, $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ — ортогональное множество идемпотентов, причём их можно поднимать по модулю J (предложение 10.2). Из леммы 13.7 следует, что их можно поднимать последовательно: если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — такое ортогональное множество идемпотентов кольца R, что $e_i + J = \overline{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, то можно поднять $\overline{e}_{n+1}$ до такого идемпотента e_{n+1}, что $ee_{n+1} = e_{n+1}e = 0$, где $e = e_1 + \ldots + e_n$. Поскольку $e_i e = ee_i = e_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, идемпотенты $e_1, \ldots, e_{n+1}$ образуют ортогональное множество. Поскольку в R по условию нет бесконечных ортогональных множеств ненулевых идемпотентов, процесс оборвётся на некотором шаге, и окажется, что R/J — конечная прямая сумма простых модулей. □

Задачи к лекции 13.

Задача 13.1. Пусть даны коммутативное кольцо R и R-модули и B. Докажите, что $A \otimes_R B \cong B \otimes_R A$ (как абелевы группы).

Задача 13.2. Верно ли утверждение предыдущей задачи без предположения о коммутативности кольца R для бимодулей ${}_R A_R$ и ${}_R B_R$?

Задача 13.3. Пусть даны произвольное кольцо R, модули A_R и ${}_R B$ и подмдули $U \subseteq A$ и $V \subseteq B$. Обозначим через $L(U, V)$ подгруппу в $\otimes_R B$, порожденную элементами вида $a \otimes v$ и $u \otimes b$, где $a \in A, b \in B, u \in U, v \in V$, Докажите, что $(A/U) \otimes_R (B/V) \cong (A \otimes B)/L(U, V)$.

Задача 13.4. a) Покажите, что абелева группа тогда и только тогда является плоской (как $\mathbb{Z}$-модуль), когда она является группой без кручения.
b) Приведите пример плоской, но не проективной абелевой группы.

Задача 13.5. Докажитеь, что коммутативное кольцо R регулярно тогда и только тогда, когда каждый идеал I кольца R идемпотентен (т. е. $I^2 = I$)

Задача 13.6. Верно ли утверждение предыдущей задачи без предположения о коммутативности кольца R?

Задача 13.7. Показжитеь, что всякий двусторонний идеал A кольца R, T-ннльпотентный слева и справа и конечно-порожденный как левый или правый идеал, является нильпотентным.

Список литературы

[1] Андрунакиевич В.А, Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука. 1979.

[2] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Мир, 1976.

[3] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М.: Наука, 1969.

[4] Каш Ф. Модули и кольца, М.: Мир, 1У81.

[5] Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.

[6] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории (т.1,2). М: Мир, 1977.

[7] Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.

Содержание