Содержание

Часть I
Элементарная эквивалентность абелевых групп

1 Введение

Две модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одного и того же языка $\mathcal{L}$ первого порядка называются *элементарно эквивалентными*, если в них выполняются одни и те же предложения первого порядка языка $\mathcal{L}$.

Обычно не очень сложной задачей является доказательство того, что две модели не являются элементарно эквивалентными (достаточно предъявить предложение, выполняющееся в одной модели и не выполняющееся в другой). Задача на несколько порядков труднее — доказать, что две (неизоморфные) модели являются элементарно эквивалентными.

Одна из основных задач теории моделей — классификация моделей одного языка с точностью до элементарной эквивалентности. Абсолютно полное решение известно не для такого уж большого класса теорий. Среди них самые интересные — это булевы алгебры и абелевы группы.

Полная классификация абелевых групп с точностью до элементарной эквивалентности была проведена в работе польского математика Шмелевой (см. [1]). Мы в данных лекциях будем в основном пользоваться более современной статьей Эклофа и Фишера (см. [2]).

Сразу же сформулируем тот основной результат, который мы собираемся доказать на ближайших лекциях. Для начала введем набор инвариантов, которые понадобятся для формулировки.

Пусть A — абелева группа, p — простое число, $A[p]$ — подгруппа в A, состоящая из всех элементов A порядка p или 1, kA — подгруппа в A, состоящая из всех элементов вида ka, $a \in A$.

Первым интересующим нас инвариантом является

$$D(p;A) := \lim_{n\to\infty} \dim((p^nA)[p]).$$

Грубо говоря, этот инвариант определяет количество копий прямых слагаемых вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ в насыщенной группе (см. далее).

Второй инвариант — это

$$Tf(p;A) := \lim_{n\to\infty} \dim(p^nA/p^{n+1}A),$$

он определяет количество вхождений группы p-адических целых чисел $\mathbb{Z}(p)$ (см. далее) в насыщенную группу.

Третий инвариант —

$$U(p, n-1; A) := \dim((p^{n-1}A)[p]/(p^n A)[p]),$$

инвариант *Ульма*, задающий количество копий $\mathbb{Z}_{p^n}$ в группе A.

Последним инвариантом является $Exp(A)$ — экспонента группы A.

Теорема 1.1 (теорема Шмелевой об элементарной классификации абелевых групп)**.** *Две абелевы группы A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их элементарные инварианты $D(p;\cdot)$, $Tf(p;\cdot)$, $U(p,n-1;\cdot)$ и $Exp(\cdot)$ попарно совпадают* (*точнее, либо конечны и совпадают, либо одновременно равны бесконечности*).

Приведем очень приблизительно схему доказательства этой теоремы.

Если группы A и B элементарно эквивалентны, то совпадение инвариантов доказывается напрямую (выписыванием соответствующих формул).

Предположим теперь, что инварианты у групп A и B совпадают, а нам требуется доказать их элементарную эквивалентность. В теории моделей среди всех моделей данной теории выделяются *насыщенные* модели. Подробное определение и примеры мы приведем в следующей лекции.

В предположении обобщенной континуум-гипотезы (ОКГ, см. далее) можно доказать, что любая модель элементарно эквивалентна некоторой насыщенной модели мощности α (достаточно большой). Таким образом, группы A и B элементарно эквивалентны насыщенным группам A' и B' одной и той же мощности α. У групп A' и B' по-прежнему одинаковые инварианты. Далее описываются насыщенные абелевы группы, и оказывается, что насыщенные абелевы группы с одинаковыми инвариантами одной и той же мощности элементарно эквивалентны (и даже изоморфны). Таким образом, оказывается, что группы A и B элементарно эквивалентны.

Проблема в том, что не очень хочется пользоваться обобщенной континуум-гипотезой, поэтому придется идти на некоторые небольшие хитрости. Однако и они будут в большой степени основаны на понятии насыщенности, о котором мы поговорим ниже.

2 Основные понятия из логики и теории моделей

2.1 Элементарные расширения

Мы не будем напоминать и повторять самые общепринятые логические понятия, о всех них можно прочитать в книге [3]. Однако перечислим то, что нужно знать для полного понимания лекций:

- Понятие языка первого порядка (переменные $x_1, x_2, \ldots$; константы $c_1, c_2, \ldots$; функциональные символы $f_1, f_2, \ldots$; предикатные символы $P_1, P_2, \ldots$; равенство $=$; кванторы $\forall, \exists$; связки $\wedge, \vee, \to, \neg$);

- Понятие терма, атомной формулы, формулы и их построение;

- Аксиомы, правила вывода;
- Понятие “предложение φ истинно в модели $\mathfrak{A}$”, или “формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ выполняется в модели $\mathfrak{A}$ на последовательности $a_1, \ldots, a_n$ ($\mathfrak{A} \Vdash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$).

Напомним, что теория T в языке $\mathcal{L}$ — это некоторое множество предложений языка $\mathcal{L}$. Теория T называется *полной*, если множество всех ее следствий является максимальным непротиворечивым. *Множество аксиом теории T* — всякое множество предложений, имеющее те же следствия, что и T. *Теория модели* $\mathfrak{A}$ — множество всех предложений, истинных в $\mathfrak{A}$.

Также приведем без доказательства две знаменитейшие и важнейшие теоремы теории моделей:

Теорема 2.1 (теорема компактности)**.** *Множество предложений Φ имеет модель тогда и только тогда, когда обладает моделью каждое ее конечное подмножество.*

Теорема 2.2 (теорема Левенгейма–Скулема–Тарского)**.** *Если теория T имеет бесконечные модели, то она имеет модели произвольной заданной бесконечной мощности $\alpha \geqslant |\mathcal{L}|$.*

Определение 2.1. *Типом* $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется всякое максимальное непротиворечивое множество формул языка $\mathcal{L}$, зависящих от этих переменных.

Если даны произвольная модель $\mathfrak{A}$ и n-ка элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$, то множество $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ всех формул $\gamma(x_1, \ldots, x_n)$, выполняющихся на $a_1, \ldots, a_n$, есть n-тип, причем это единственный тип, *реализуемый последовательностью* $a_1, \ldots, a_n$. Он называется *типом n-ки* $a_1, \ldots, a_n$ в модели $\mathfrak{A}$.

Пример 2.1. Пусть U — упорядоченное поле действительных чисел. Любые два различных элемента $a, b \in U$ имеют различные 1-типы: если $a < b$, то существует такое рациональное r, что $a < r < b$. Таким образом, поле U реализует 2^ω различных типов от одной переменной.

Упражнение 2.1. Пусть T — полная теория в некотором счетном языке, а $\Gamma_1(x_1)$, $\Gamma_2(x_2)$, $\Gamma_3(x_3)$,… — счетная совокупность множеств формул, каждое из которых совместимо с теорией T. Докажите, что теория T имеет счетную модель, реализующую каждое множество $\Gamma_n(x_n)$.

Определение 2.2. Множество формул $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ называется *совместимым с теорией T*, если существует модель теории T, реализующая множество Φ.

Определение 2.3. Модель $\mathfrak{B}$ называется *элементарным расширением* модели $\mathfrak{A}$ (обозначение $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$), если:

1) $\mathfrak{B}$ является расширением модели $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$;

2) Каковы бы ни были формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ языка $\mathcal{L}$ и элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$, формула φ выполняется в модели $\mathfrak{A}$ на последовательности $a_1, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда φ выполняется на ней в модели $\mathfrak{B}$.

Если $\mathfrak{B}$ — элементарное расширение модели $\mathfrak{A}$, мы будем говорить, что $\mathfrak{A}$ — элементарная подмодель в $\mathfrak{B}$.

Упражнение 2.2. Модель $\mathfrak{B}$ является элементарным расширением модели $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и

$$(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \equiv (\mathfrak{B}, a)_{a\in A}.$$

Пример 2.2. Рассмотрим две абелевы группы

$$A = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2 \text{ и } B = \bigoplus_{i=2}^{\infty} \mathbb{Z}_2.$$

Ясно, что $B \subset A$ и B элементарно вложено в A.

Действительно, если взять произвольные константы из B — $b_1, \ldots, b_n$, то они порождают в B (и в A) подгруппу

$$C = \bigoplus_{j_1,\ldots,j_m} \mathbb{Z}_2.$$

Конструкции $C \subset B$ и $C \subset A$ изоморфны, поэтому предложения с константами из C выполняются одновременно в B и A.

Пример 2.3. Теперь рассмотрим прямое произведение счетного числа одинаковых колец с единицей R_i:

$$A = \prod_{i=1}^{\infty} R_i \text{ и } B = \prod_{i=2}^{\infty} R_i.$$

С одной стороны, $A \cong B$, с другой стороны, вложение $B \subset A$ не элементарно, так как единица кольца B не является единицей кольца A.

Упражнение 2.3. Пусть R — кольцо, а $R[X]$ и $R[Y]$ — кольца многочленов относительно переменных $x \in X$ и $y \in Y$. Докажите, что если $X \subset Y$ и множество X бесконечно, то $R[X] \prec R[Y]$.

2.2 Теория множеств и ординалы

В данном пункте мы расскажем очень кратко о теории множеств, необходимой для теории моделей. Наша цель — зафиксировать понятия и одновременно изложить несколько основных результатов об ординалах и трансфинитной индукции (а также о кардиналах — в следующей лекции). Это должно заполнить разрыв между теми сведениями из теории множеств, которые используются обычно в алгебре, и несколько большим объемом сведений, использующимся в теории моделей.

Напомним, что теория множеств состоит из множеств (теория множеств Цермело–Френкеля ZF) или множеств и классов (теория Нейманна-Бернайса–Геделя NBG) с единственным предикатом принадлежности $x \in y$. В наших лекциях нам достаточно будет только теории ZF. Таким образом, все множества, кроме пустого ($\emptyset$ или 0), состоят опять же из множеств.

Обычным образом вводятся понятия

- упорядоченной пары $\langle x, y\rangle$,
- упорядоченной n-ки $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$,

- декартова произведения $X \times Y$,
- n-местного отношения $P \subset X^n$,
- функции $f : X \to Y$,
- частичного порядка,
- линейного порядка,
- полного порядка (каждое непустое подмножество имеет наименьший элемент).

Каждое семейство множеств X частично упорядочено отношением включения $\subset$. Множество X называется *цепью*, если оно этим отношением $\subset$ линейно упорядочено, называется *вполне упорядоченной цепью*, если оно этим отношением вполне упорядочено. Например, вполне упорядоченной цепью является множество

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \text{ или } 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Две цепи X, Y называются *изоморфными*, если существует биективная функция $f : X \to Y$ такая, что из $x \subset y$ следует $f(x) \subset f(y)$.

Рассмотрим теперь ординальные числа или ординалы. *Ординал* есть множество α такое, что

1) $\forall \beta \in \alpha (\beta \subset \alpha)$,

2) α вполне упорядочено отношением $\in$.

Лемма 2.1. *Каждый элемент ординала есть ординал.*

Доказательство. Пусть α — ординал, и $x \in \alpha$. Так как $x \subset \alpha$, то x также вполне упорядочено отношением $\in$. Докажем теперь первое свойство ординала. Пусть $z \in y$, $y \in x$. Мы знаем, что $y \in \alpha$, и, значит, $z \in \alpha$. Отношение $\in$ транзитивно на α, отсюда $z \in x$. $\square$

Лемма 2.2. *Если α, β — ординалы, то $\alpha \subset \beta$ в том и только том случае, если $\alpha \in \beta$ или $\alpha = \beta$.*

Доказательство. Если $\alpha \in \beta$, то $\alpha \subset \beta$ из свойства 1.

Предположим, что $\alpha \subset \beta$, $\alpha \neq \beta$. Пусть γ — наименьший элемент непустого множества $\beta \setminus \alpha$. Чтобы показать, что $\alpha \in \beta$, мы докажем $\alpha = \gamma$. Если $\delta \in \gamma$, то $\delta \in \beta$, и, поскольку γ — наименьший элемент в $\beta \setminus \alpha$, то $\delta \in \alpha$. Следовательно, $\gamma \subset \alpha$. Пусть теперь $\delta \in \alpha$. Так как $\alpha \subset \beta$, то $\delta \in \beta$. Ординал β вполне упорядочен отношением $\in$, и, значит, либо $\gamma \in \delta$, либо $\gamma = \delta$, либо $\delta \in \gamma$. Так как $\gamma \notin \alpha$, $\delta \in \alpha$, то $\gamma \neq \delta$ и $\gamma \notin \delta$. Значит, $\delta \in \gamma$. Это показывает справедливость включения $\alpha \subset \gamma$, что и завершает доказательство. $\square$

Комбинируя две последних леммы, получаем

Лемма 2.3. *Каждый ординал α является вполне упорядоченной цепью.*

Следующий результат гораздо сильнее:

Лемма 2.4. (1) *Каждое множество ординалов вполне упорядочено отношением $\in$.*

(2) *Каждое множество ординалов является вполне упорядоченной цепью.*

Доказательство. Так как (1) очевидно следует из (2), то докажем только (2).

Пусть X — множество ординалов. Тогда отношение $\subset$ частично упорядочивает X. Предположим, что $\alpha, \beta \in X$. Если неверно, что $\beta \subset \alpha$, то существует наименьший ординал $\gamma \in \beta \setminus \alpha$. Так как $\delta \in \gamma$ влечет $\delta \in \beta \cap \alpha$, то $\gamma \subset \alpha$. Но $\gamma \notin \alpha$, так что по лемме 2.2 $\gamma = \alpha$. Следовательно, $\alpha \in \beta$, и отсюда $\alpha \subset \beta$. Это показывает, что множество X линейно упорядочено.

Пусть Y — непустое подмножество множества X. Рассмотрим $\alpha \in Y$.

Случай 1. $\alpha \cap Y = 0$. Пусть $\beta \in Y$, тогда $\beta \notin \alpha$. Кроме того, $\alpha \subset \beta$ или $\beta \subset \alpha$. Если $\beta \subset \alpha$, то $\beta = \alpha$. Следовательно, α является наименьшим элементом в Y.

Случай 2. $\alpha \cap Y \neq 0$. Тогда $\alpha \cap Y$ имеет наименьший элемент γ. Мы имеем $\gamma \cap Y = 0$, так как если $\delta \in \gamma \cap Y$, то $\delta \in \alpha \cap Y$ и $\delta \in \gamma$, что противоречит нашему выбору γ как наименьшего элемента в $\alpha \cap Y$. Так как $\gamma \cap Y = 0$, то из случая 1 вытекает, что γ и является наименьшим элементом в Y. Следовательно, $\subset$ вполне упорядочивает множество X. □

Теперь, когда мы показали, что ординалы вполне упорядочены отношением $\in$, мы будем обычно писать $\alpha < \beta$ вместо $\alpha \in \beta$ и $\alpha \leqslant \beta$ вместо $\alpha \in \beta$ или $\alpha = \beta$.

Заметим, что фактически лемма 2.1 утверждает, что каждый ординал α равен множеству всех меньших ординалов $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Ординал $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ называется *последователем* ординала α. $\alpha + 1$ есть наименьший ординал, строго больший α. Ординал α называется *предельным*, если он не является последователем никакого ординала. Наименьший предельный ординал, больший 0, обозначим за ω. Элементы ω называются конечными ординалами или натуральными числами. Существование ординала ω гарантирует *аксиома бесконечности.*

Установим сейчас очень полезный принцип трансфинитной индукции.

Лемма 2.5 (Трансфинитная индукция)**.** *Пусть $P(\alpha)$ — некоторое свойство ординалов. Предположим, что для каждого ординала β из того, что $P(\gamma)$ справедливо для всех $\gamma < \beta$, следует справедливость $P(\beta)$. Тогда $P(\beta)$ справедливо для всех ординалов α.*

Доказательство. Мы предположим, что $P(\alpha)$ ложно для некоторого α, и придем к противоречию.

Пусть
$$X = \{\gamma \leqslant \alpha \mid P(\gamma) \text{ ложно}\}.$$

Это множество непусто, так как в нем есть элемент α. Следовательно, X имеет наименьший элемент β. Но $P(\gamma)$ выполняется для всех $\gamma < \beta$, и по условию $P(\beta)$ также справедливо. Это противоречит тому, что $\beta \in X$. □

Лемма 2.6. *Если α, β — ординалы, которые являются изоморфными вполне упорядоченными цепями, то $\alpha = \beta$. Более того, тождественная функция является единственным изоморфизмом цепи α на себя.*

Доказательство. Пусть $P(\alpha)$ — следующее свойство:

"единственный ординал, изоморфный α, есть α, и единственным изоморфизмом из α в α является тождественное отображение."

Предположим, что $P(\gamma)$ выполняется для всех $\gamma < \beta$. Пусть f — произвольный изоморфизм из β в δ. Для каждого $\gamma < \beta$ ограничение f на ординал γ есть изоморфизм из γ на $f(\gamma)$. Но так как имеет место $P(\gamma)$, то $\gamma = f(\gamma)$ и f — тождественная функция на β. Следовательно, $\delta = \beta$, и справедливо $P(\beta)$. □

2.3 Кардиналы и их типы

Функция f, определенная на ординале α, называется *α-последовательностью.* Перечисление множества X есть последовательность, множество значений которой совпадает с X.

Сумма $\alpha + \beta$ двух ординалов есть ординал $\gamma \geqslant \alpha$ такой, что цепь $\gamma \setminus \alpha$ изоморфна цепи β. Интуитивно можно представлять себе $\alpha + \beta$ как список ординалов из β, следующий за списком ординалов из α. Пусть f есть α-последовательность, а g обозначает β-последовательность. *Конкатенация* fg последовательностей f и g есть $(\alpha + \beta)$-последовательность, которая, на интуитивном уровне, получается пересчетом сначала f_ξ, $\xi < \alpha$, а затем g_ζ, $\zeta < \beta$. Более формально, fg можно определить так:

$$fg(\xi) = f(\xi) \text{ для } \xi < \alpha;$$
$$fg(\alpha + \zeta) = g(\zeta) \text{ для } \zeta < \beta.$$

Мы всегда будем предполагать справедливость *аксиомы выбора*, которая утверждает, что

Если X_i — непустое множество для каждого $i \in I$, то декартово произведение $\prod_{i \in I} X_i$ непусто.

Аксиома выбора имеет большое число эквивалентных формулировок:

Лемма 2.7 (Принцип вполне-упорядоченности)**.** *Каждое множество может быть вполне упорядочено.*

Лемма 2.8 (Принцип перечисления)**.** *Каждое множество может быть перечислено.*

Лемма 2.9 (Лемма Цорна)**.** *Пусть X — непустая совокупность множеств, замкнутая относительно объединений непустых цепей* (*т.е. если* $0 \neq Y \subset X$ *и* Y *— цепь, то* $\cup Y \in X$); *тогда X обладает максимальным элементом, т.е. таким элементом $x \in X$, что из $x \subset y \in X$ следует $x = y$.*

Упражнение 2.4. Докажите эквивалентность аксиомы выбора, принципа вполне-упорядоченности, принципа перечисления и леммы Цорна.

Упражнение 2.5. Докажите, что у любого линейного пространства есть базис.

Под *мощностью* или *кардиналом* множества X, обозначаемой через $|X|$, понимается наименьший ординал α такой, что X перечислим α-последовательностью. Ординал α называется *кардиналом*, или *начальным ординалом*, если $\alpha = |\alpha|$. Будем ξ-й бесконечный кардинал обозначать через ω_ξ.

Последователь кардинала α, обозначаемый через α^+, есть наименьший кардинал, больший чем α. Таким образом, $(\omega_\xi)^+ = \omega_{\xi+1}$. Кардинал α называется *предельным кардиналом*, если он не является последователем никакого кардинала. *Кардинальная степень* ординала α с показателем β определяется равенством $\alpha^\beta = |{}^\beta\alpha|$ (мощность множества отображений из β в α). Числа λ_ξ определяются по индукции: $\lambda_0\omega_0$, $\lambda_{\xi+1} = 2^{\lambda_\xi}$, если ξ — предельный ординал, $\lambda_\xi = \cup_{\zeta<\xi}\lambda_\zeta$. Эти числа тесно связаны с понятием *строго предельного кардинала.* Кардинал α называется строго предельным, если $2^\beta < \alpha$ для всех $\beta < \alpha$.

Континуум-гипотеза (КГ) утверждает, что $\lambda_1 = \omega_1$, а *обобщенная континуум-гипотеза* (ОКГ) утверждает, что $2^{\omega_\xi} = \omega_{\xi+1}$ для всех ξ. Таким образом, из ОКГ следует, что $\lambda_\xi = \omega_\xi$ для всех ξ. Из ОКГ также следует, что каждый предельный кардинал является строго предельным. Мы не предполагаем, что КГ или ОКГ содержатся в нашей наивной теории множеств. ОКГ интересна тем, что она существенно упрощает арифметику кардинальных чисел.

Перечислим без доказательства несколько утверждений из арифметики кардиналов:

Лемма 2.10. (а) *$\alpha < 2^\alpha$;*

(б) *Если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$ и (если $0 < \gamma$) $\gamma^\alpha \leqslant \gamma^\beta$.*

(в) *$\alpha^0 = 1$, $1^\alpha = 1$, если $\alpha > 0$, то $0^\alpha = 0$.*

(г) *Пусть β — бесконечный кардинал и $\gamma > 0$. Тогда*

$$(\alpha^\beta)^\gamma = (\alpha^\gamma)^\beta = \alpha^\beta \cup \alpha^\gamma = \alpha^{\beta\cup\gamma}.$$

(д) *Если α — бесконечный кардинал и $n > 0$, то $\alpha^n = \alpha$.*

Упражнение 2.6. Докажите лемму 2.10.

Определение 2.4. Для множества X через $\cup X$ обозначается множество

$$\{y \mid \exists x \in X(y \in x)\}.$$

Определение 2.5. Множество X называется *конфинальным* в предельном ординале ξ, если $X \subset \xi$ и $\xi = \cup X$. *Конфинальность* ординала ξ, обозначаемая через $cf(\xi)$, — это наименьший кардинал α, такой, что множество мощности α конфинально в ξ.

Заметим, что $cf(0) = 0$. Определим конфинальность последователя ординала равенством

$$cf(\xi + 1) = 1.$$

Как ведет себя функция конфинальности? Уже из определения видно, что

$$\omega \leqslant cf(\xi) \leqslant \xi,$$

если ξ — бесконечный предельный ординал. Если $\xi = \omega$, мы получаем равенство

$$\omega = cf(\omega).$$

Определение 2.6. Кардинал α называется *регулярным*, если $cf(\alpha) = \alpha$, и *сингулярным*, если $cf(\alpha) < \alpha$.

Заметим, что ω — регулярный кардинал.

Лемма 2.11. *Каждый бесконечный кардинал-последователь α^+ регулярен.*

Доказательство. Пусть X конфинально в α^+. Имеем

$$\alpha^+ \leqslant |X| \cup \bigcup\{|\beta| \mid \beta \in X\}.$$

Но $|\beta| \leqslant \alpha$ для всех $\beta \in X$, так что

$$\bigcup\{|\beta| \mid \beta \in X\} \subset \alpha^+.$$

Это означает, что $|X| = \alpha^+$ и $cf(\alpha^+) = \alpha^+$. □

Если мы рассмотрим предельные кардиналы, отличные от ω, то убедимся, что они обычно бывают сингулярными. Например, легко видеть, что

$$cf(\omega_\omega) = \omega,\ cf(\lambda_\omega) = \omega.$$

3 Насыщенные модели

3.1 Определения и примеры

Теперь перейдем к понятию α-насыщенных и насыщенных моделей.

Определение 3.1. Пусть α — кардинал. Модель $\mathfrak{A}$ называется *α-насыщенной*, если для каждого подмножества $X \subseteq A$ мощности, меньшей α, обогащение $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$ реализует каждый тип $\Sigma(v)$ в языке $\mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in X\}$, который совместим с теорией модели $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$.

При работе с α-насыщенными моделями удобно предполагать, что в обогащении $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$ множество X вполне упорядочено. Таким образом, если ξ — ординал, меньший α, и $X = \{a_\eta \mid \eta < \xi\}$, то модель $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$ обозначается через $(\mathfrak{A}, a_\eta)_{\eta<\xi}$. Мы будем естественным образом употреблять выражения $(\mathfrak{A}, a_\eta)_{\eta<\xi} \equiv (\mathfrak{B}, b_\eta)_{\eta<\xi}$.

Модель $\mathfrak{A}$ называется *насыщенной*, если она $|A|$-насыщенна.

Пример 3.1. Приведем простой пример насыщенной модели — множества M мощности $\varkappa$ с единственным предикатом равенства. Теория множеств с равенством допускает элиминацию кванторов (см. [3]). Если излагать кратко, то это означает, что любая формула $\varphi(a_1, \ldots, a_n; v)$ с одной свободной переменной эквивалентна конъюнкции простейших формул вида $v = a_i$, $v \neq a_j$ и утверждения, что в множестве содержится m различных элементов.

Предположим, что мы обогатили модель M с помощью множества X, $|X| < |M|$. Произвольное множество формул с одной свободной переменной в обогащенном языке является непротиворечивым, если оно не содержит одновременно пар простейших подформул (в конъюнкции) вида $v = a_i$ и $v = a_j$ при $i \neq j$. Таким образом, в результате любое непротиворечивое множество формул будет реализовываться либо на некотором a_i, либо на элементе, который не равен ни одному $a_i \in X$. Так как $|X| < |A|$, то такой элемент обязательно существует.

Значит, рассматриваемая модель — насыщенная.

Пример 3.2. Пусть T — теория алгебраически замкнутых полей характеристики нуль. У нее имеется счетное множество счетных моделей: для каждого $\alpha \leqslant \omega$ существует модель, степень трансцендентности которой над полем рациональных чисел равна α. Покажем, что ни одна модель, кроме той, которая имеет счетную степень трансцендентности, не может быть насыщенной.

Действительно, рассмотрим алгебраически замкнутое поле конечной степени трансцендентности над $\mathbb{Q}$. Расширим его до следующей степени трансцендентности и опишем элемент этого расширения как не являющийся корнем никакого многочлена с коэффициентами из рассматриваемого расширения (для этого нам нужно будет сделать константами образующие данного расширения — их конечное число). Ясно, что в рассматриваемом поле такой тип не реализуется.

Упражнение 3.1. Найдите насыщенную модель для теории, приведенной в предыдущем примере.

Упражнение 3.2. Докажите, что полная теория чисел не имеет ω-насыщенной счетной модели.

Упражнение 3.3. Докажите, что никакое счетное упорядоченное поле не является ω-насыщенным.

3.2 Насыщенные расширения моделей

Следующие теоремы нужны нам для доказательства существования α-насыщенного элементарного расширения модели. Они являются достаточно техническими, к сожалению.

Теорема 3.1 (Интерполяционная теорема Крейга)**.** *Пусть φ и ψ — такие предложения, что $\varphi \vDash \psi$. Тогда найдется такое предложение θ, что*

а) $\varphi \vDash \theta$ *и* $\theta \vDash \psi$.

б) *Всякий предикатный, функциональный или константный символ* (*за исключением равенства*)*, входящий в предложение θ, входит также и в φ, и в ψ.*

Предложение θ будет называться *интерполянтом Крейга* для предложений φ и ψ. Символу равенства разрешается входить в θ. Следующий пример показывает, почему это необходимо.

Пример 3.3. В каждой из следующих трех пар φ и ψ — такие предложения, что символ равенства входит не более, чем в одно из них, и $\varphi \vDash \psi$; ни одна из этих пар, тем не менеее, не имеет интеполянта Крейга, который не содержал бы символа равенства:

(а) $\varphi = (\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$, $\psi = (\exists x)Q(x)$;

(б) $\varphi = (\exists x)Q(x)$, $\psi = (\exists x)(P(x) \vee \neg P(x))$;

(в) $\varphi = (\forall x, y)(x \equiv y)$, $\psi = (\forall x, y)(P(x) \leftrightarrow P(y))$.

Доказательство. Предположим, что для предложений φ и ψ не существует интерполянта Крейга θ, и докажем, что в этом случае невозможно $\varphi \vDash \psi$. С этой целью мы построим модель для предложения $\varphi \wedge \neg\psi$. Без ограничения общности мы можем считать, что язык $\mathcal{L}$ состоит в точности из тех символов, которые входят хотя бы в одно из предложений φ

и ψ. Пусть $\mathcal{L}_1$ — язык символов предложения φ, $\mathcal{L}_2$ — язык симоволов предложения ψ, а $\mathcal{L}_0$ — язык символов, входящих и в φ, и в ψ. Тогда

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_0,\ \ \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}.$$

Построим обогащение $\mathcal{L}'$ языка $\mathcal{L}$, добавив к последнему счетное множество C новых константных символов, и положим

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 \cup C,\ \ \mathcal{L}'_1 = \mathcal{L}_1 \cup C,\ \ \mathcal{L}'_2 = \mathcal{L}_2 \cup C.$$

Рассмотрим пару теорий T (в языке $\mathcal{L}'_1$) и U (в языке $\mathcal{L}'_2$). Говорят, что предложение θ языка $\mathcal{L}'_0$ *отделяет* теории T и U, если

$$T \vDash \theta \text{ и } U \vDash \neg\theta.$$

Теории T и U называют *неотделимыми*, если никакое предложение θ языка $\mathcal{L}'_0$ не отделяет их. Прежде всего мы видим, что

(1) $\{\varphi\}$ и $\{\neg\psi\}$ неотделимы.

Действительно, если предложение $\theta(c_1, \ldots, c_n)$ отделяет $\{\varphi\}$ от $\{\neg\psi\}$, а $u_1, \ldots, u_n$ — переменные, не входящие в $\theta(c_1, \ldots, c_n)$, то предложение $\exists u_1, \ldots, u_n \theta(u_1, \ldots, u_n)$ оказывается интерполянтом Крейга φ и ψ, что противоречит нашему предположению.

Пусть теперь

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$$

— списки, составленные из всех предложений языков $\mathcal{L}'_1$ и $\mathcal{L}'_2$ соответственно. Построим две возрастающие последовательности теорий

$$\begin{aligned} \{\varphi\} &= T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots, \\ \{\neg\psi\} &= U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \end{aligned}$$

в языках $\mathcal{L}'_1$ и $\mathcal{L}'_2$ соответственно, такие, что

(2) T_m и U_m — неотделимые конечные множества предложений.

(3) Если теории $T_m \cup \{\varphi_m\}$ и U_m неотделимы, то $\varphi_m \in T_{m+1}$. Если неотделимы теории T_{m+1} и $U_m \cup \{\psi_m\}$, то $\psi_m \in U_{m+1}$.

(4) Если $\varphi_m = \exists x \sigma(x)$ и $\varphi_m \in T_{m+1}$, то $\sigma(c) \in T_{m+1}$ при некотором (новом) $c \in C$. Если $\psi_m = \exists x \delta(x)$ и $\psi_m \in U_{m+1}$, то $\delta(d) \in U_{m+1}$ при некотором (новом) $d \in C$.

Итак, если даны теории T_m и U_m, то теория T_{m+1}, а затем и U_{m+1} строится очевидным образом. В пункте (4) используются константы c и d, не встречающиеся ни в теориях T_m и U_m, ни в предложениях φ_m и ψ_m. Неотделимость при этом сохраняется. Положим

$$T_\omega = \bigcup_{m<\omega} T_m, \quad U_\omega = \bigcup_{m<\omega} U_m.$$

Теории T_ω и U_ω неотделимы. Отсюда следует, что обе они непротиворечивы. Нам нужно показать, что непротиворечива и теория $T_\omega \cup U_\omega$. Сначала покажем, что

(5) T_ω — максимальная непротиворечивая теория в языке $\mathcal{L}'_1$, а U_ω — максимальная непротиворечивая теория в $\mathcal{L}'_2$. Чтобы убедиться в этом, допустим, что $\varphi_m \notin T_\omega$ и $\neg\varphi_m \notin T_\omega$. Так как теория $T_m \cup \{\varphi_m\}$ отделима от U_m, найдется такое предложение $\theta \in \mathcal{L}'_0$, что

$$T_\omega \models \varphi_m \to \theta, \quad U_\omega \models \neg\theta.$$

Аналогичные рассуждения показывают, что существует такое предложение $\theta' \in \mathcal{L}'_0$, что

$$T_\omega \models \neg\varphi_m \to \theta', \quad U_\omega \models \neg\theta'.$$

Но тогда

$$T_\omega \models \theta \vee \theta', \quad U_\omega \models \neg(\theta \vee \theta'),$$

что противоречит неотделимости теорий T_ω и U_ω. Это означает, что T_ω — максимальная непротиворечивая теория в языке $\mathcal{L}'_1$. Максимальность теории U_ω доказывается аналогично.

Теперь установим следующий факт:

(6) $T_\omega \cap U_\omega$ — максимальная непротиворечивая теория в языке $\mathcal{L}'_0$. Пусть σ — произвольное предложение языка $\mathcal{L}'_0$. Согласно (5), справедливо либо $\sigma \in T_\omega$, либо $\neg\sigma \in T_\omega$, а также или $\sigma \in U_\omega$, или $\neg\sigma \in U_\omega$. В силу неотделимости теорий T_ω и U_ω, невозможно одновременное выполнение условий $\sigma \in T_\omega$ и $\neg\sigma \in U_\omega$ или $\neg\sigma \in T_\omega$ и $\sigma \in U_\omega$. Поэтому имеем либо $T_\omega \cap U_\omega \models \sigma$, либо $T_\omega \cap U_\omega \models \neg\sigma$. Таким образом, (6) доказано.

Теперь мы готовы построить модель для $T_\omega \cup U_\omega$. Пусть $\mathfrak{B}'_1 = (\mathfrak{B}_1, b_0, b_1, \dots)$ — некоторая модель теории T_ω. Применяя пункты (4) и (5), видим, что ее подмодель $\mathfrak{A}'_1 = (\mathfrak{A}_1, b_0, b_1, \dots)$ с универсумом $A_1 = \{b_0, b_1, \dots)$ также служит моделью теории T_ω. Аналогично, теория U_ω имеет модель $\mathfrak{A}'_2 = (\mathfrak{A}_2, d_0, d_1, \dots)$ с универсумом $A_2 = (d_0, d_1, \dots)$. Из (6) следует, что $\mathcal{L}'_0$-обеднения моделей $\mathfrak{A}'_1$ и $\mathfrak{A}'_2$ изоморфны, причем константы b_n соответствуют константам d_n. Поэтому мы можем принять $b_n = d_n$ при каждом n, в результате чего модели $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ будут иметь одно и то же $\mathcal{L}_0$-обеднение.

Пусть $\mathfrak{A}$ — модель языка $\mathcal{L}$, для которой $\mathcal{L}_1$-обеднением является $\mathfrak{A}_1$, а $\mathcal{L}_2$-обеденением — модель $\mathfrak{U}_2$. Поскольку $\varphi \in T_\omega$, $\neg\psi \in U_\omega$, то $\mathfrak{A}$ является моделью предложения $\varphi \wedge \neg\psi$. Противоречие. $\square$

Упражнение 3.4. Докажите интерполяционную теореме Крейга для формул $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и $\psi(x_1, \dots, x_n)$ (она выводится из интерполяционной теоремы Крейга для предложений).

Теорема 3.2 (теорема Робинсона о непротиворечивости)**.** *Пусть $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — языки и $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Предположим, что T — полная теория в языке $\mathcal{L}$, а $T_1 \supset T$ и $T_2 \supset T$ — непротиворечивые теории в языках $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно. Тогда $T_1 \cup T_2$ — непротиворечивая теория в языке $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.*

Доказательство. Допустим, что теория $T_1 \cup T_2$ противоречива. Тогда существуют такие конечные подмножества $\Sigma_1 \subset T_1$ и $\Sigma_2 \subset T_2$, что уже множество $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ противоречиво. Пусть σ_1 — конъюнкция предложений из Σ_1, σ_2 — конъюнкция предложений из Σ_2. Тогда имеем $\sigma_1 \models \neg\sigma_2$. По интерполяционной теореме Крейга, существует такое предложение θ, что $\sigma_1 \models \theta$ и $\theta \models \neg\sigma_2$, причем каждый предикатный, функциональный и константный символ, входящий в θ, входит одновременно и в σ_1, и в σ_2. Следовательно, θ является предложением в языке $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Возвращаясь теперь к теориям T_1 и T_2, видим, что $T_1 \models \theta$. Поскольку теория T_1 непротиворечива, неверно, что $T_1 \models \neg\theta$, поэтому из T не следует $\neg\theta$. С другой стороны, $T_2 \models \neg\theta$, поэтому неверно, что $T \models \theta$. Но это противоречит предположению о полноте теории T в языке $\mathcal{L}$. □

Упражнение 3.5. Докажите, что теорема Робинсона о непротиворечивости не имеет места без предположения о полноте теории T.

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in A\}$. *Элементарной диаграммой* модели $\mathfrak{A}$ называется теория $Th(\mathfrak{A}_A)$, состоящая из всех предложений языка $\mathcal{L}_A$, истинных в модели $\mathfrak{A}_A = (\mathfrak{A}, a)_{a\in A}$.

Лемма 3.1. *Пусть $|\mathcal{L}| \leqslant \alpha$ и $\omega \leqslant |A| \leqslant 2^\alpha$. Тогда существует элементарное расширение $\mathfrak{B}$ модели $\mathfrak{A}$ мощности 2^α такое, что для произвольного подмножества $X \subseteq A$ мощности α в модели $(\mathfrak{B}, a)_{a\in X}$ реализуется любой тип, определенный в $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$.*

Доказательство. Так как $|A| \leqslant 2^\alpha$, то мощность множества подмножеств $X \subset A$, $|X| = \alpha$, не превосходит 2^α, т. е.

$$|\{X \subset A \mid |X| = \alpha\}| \leqslant 2^\alpha.$$

Язык $\mathcal{L}_X = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in X\}$ имеет не более α символов. Следовательно, общее число типов $\Sigma(v)$ в языке $\mathcal{L}_X$ не превосходит 2^α. Для каждого подмножества $X \subset A$ можности α и каждого типа $\Sigma(v)$ над $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$ введем новую константу $c_{X\Sigma}$.

Пусть T — это элементарная диаграмма модели $\mathfrak{A}$ в языке $\mathcal{L}_A$ плюс все предложения из $\Sigma[c_{X\Sigma}] = \{\sigma[c_{X\Sigma}] \mid \sigma(v) \in \Sigma(v)\}$ для каждого подмножества $X \subset A$ мощности α и каждого типа $\Sigma(v)$ над $(\mathfrak{A}, a)_{a\in X}$.

Можно показать, что T совместна и имеет бесконечную модель. Это делается очевидным образом с помощью теоремы компактности и теоремы Робинсона о непротиворечивости.

Так как T содержит не более 2^α символов, она обладает моделью мощности 2^α. Обеднение этой модели до модели языка $\mathcal{L}$ есть искомая модель $\mathcal{B}$. □

Лемма 3.2 (Существование α^+-насыщенной модели мощности 2^α)**.** *Пусть $|\mathcal{L}| \leqslant \alpha$ и $\omega \leqslant |A| \leqslant 2^\alpha$. Тогда существует α^+-насыщенное элементарное расширение $\mathfrak{B}$ модели $\mathfrak{A}$ мощности 2^α.*

Доказательство. Мы построим элементарную последовательность $\mathfrak{B}_\xi$, $\xi < 2^\alpha$, длины 2^α, такую, что

(1) каждая модель $\mathfrak{B}_\xi$ есть элементарное расширение модели $\mathfrak{A}$ мощности 2^α;

(2) для любого подмножества $X \subset B_\xi$ мощности α модель $(\mathfrak{B}_{\xi+1}, a)_{a\in X}$ реализует каждый тип $\Sigma(v)$ над $(\mathfrak{B}_\xi, a)_{a\in X}$.

За $\mathfrak{B}_0$ мы возьмем модель, построенную в предыдущей лемме. Если η — предельный ординал, $0 < \eta < 2^\alpha$, то мы полагаем $\mathfrak{B}_\eta = \cup_{\xi<\eta}\mathfrak{B}_\xi$. Если $\eta = \xi + 1$, то мы берем в качестве $\mathfrak{B}_\eta$ элементарное расширение $\mathfrak{B}_\xi$, существование которого опять же обеспечивается предыдущей леммой, если заменить $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}_\xi$.

Пусть $\mathfrak{B} = \bigcup\limits_{\eta<2^\alpha} \mathfrak{B}_\eta$.

Очевидно, что модель $\mathfrak{B}$ является элементарным расширением модели $\mathfrak{A}$ мощности 2^α. Пусть $X \subset B$ имеет мощность α и пусть $\Sigma(v)$ — тип над $(\mathfrak{B}, a)_{a \in X}$. Так как 2^α имеет конфинальность, большую α, то найдется $\xi < 2^\alpha$, для которого $X \subset B_\xi$. Но $\mathfrak{B}_\xi$ — элементарная подмодель модели $\mathfrak{B}$. Следовательно, $\Sigma(v)$ есть тип над $(\mathfrak{B}_\xi, a)_{a \in X}$. Из нашего построения вытекает, что некоторый элемент $b \in B_{\xi+1}$ реализует Σ, т. е.

$$(\mathfrak{B}_{\xi+1}, a)_{a \in X} \models \Sigma[b].$$

Так как $\mathfrak{B}_{\xi+1} \prec \mathfrak{B}$, то $(\mathfrak{B}, a)_{a \in X} \models \Sigma[b]$. □

Упражнение 3.6. Пусть выполнена ОКГ. Пусть $|\mathcal{L}| \leqslant \alpha$. Тогда каждая теория T в языке $\mathcal{L}$, имеющая бесконечные модели, обладает насыщенной моделью любой регулярной мощности $\beta > \alpha$.

Упражнение 3.7. Найдите счетную элементарную последовательность ω-насыщенных моделей, объединение которых не является ω_1-насыщенным.

3.3 Единственность насыщенных моделей

Лемма 3.3 (Лемма о челноке). *Пусть α — бесконечный кардинал, модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются α-насыщенными, $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$. Пусть $a \in^\alpha A$, $b \in^\alpha B$. Тогда найдутся$\overline{a} \in^\alpha A$ и $\overline{b} \in^\alpha B$, такие, что*

$$Rng(a) \subset Rng(\overline{a}),$$
$$Rng(b) \subset Rng(\overline{b}),$$
$$(\mathfrak{A}, \overline{a}_\xi)_{\xi<\alpha} \equiv (\mathfrak{B}, \overline{b}_\xi)_{\xi<\alpha}.$$

Доказательство. Каждый ординал $\xi < \alpha$ единственным образом представляется в виде суммы $\xi = \lambda + n$, где λ — предельный ординал, $n \in \omega$. Будем говорить, что ординал ξ *четен*, если n четно, и что ξ *нечетен* в противном случае. Нам надо найти две последовательности $\overline{a} \in^\alpha A$ и $\overline{b} \in^\alpha B$ такие, чтобыдля всех ординалов $\xi < \alpha$ выполнялись условия

(а) Если ординал η, $\eta < \xi$, четен, т. е. $\eta = \lambda + 2n$, то $\overline{a}_\eta = a_{\lambda+n}$.

(б) Если ординал η, $\eta < \xi$, нечетен, т. е. $\eta = \lambda + (2n + 1)$, то $\overline{b}_\eta = b_{\lambda+n}$.

(в) $(\mathfrak{A}, \overline{a}_\eta)_{\eta<\xi} \equiv (\mathfrak{B}, \overline{b}_\eta)_{\eta<\xi}$.

Допустим, что $\xi < \alpha$ и для всех $\eta < \xi$ мы нашли $\overline{a}_\eta$,$\overline{b}_\eta$ такие, что для ξ выполняются условия (а), (б), (в). Определим теперь $\overline{a}_\xi$, $\overline{b}_\xi$. Если $\xi = \lambda + 2n$, то положим $\overline{a}_\xi = a_{\lambda+n}$. Пусть $\Sigma(v)$ — тип $\overline{a}_\xi$ над $(\mathfrak{A}, \overline{a}_\eta)_{\eta<\xi}$. Из соотношения (в) вытекает, что Σ есть тип над $(\mathfrak{B}, \overline{b}_\eta)_{\eta<\xi}$. Следовательно, Σ реализуется некоторым элементом $\overline{b}_\xi \in B$. Очевидно, что

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}_\eta)_{\eta<\xi} \equiv (\mathfrak{B}, \overline{b}_\eta)_{\eta<\xi}.$$

Случай, когда $\xi = \lambda + (2n + 1)$, рассматривается аналогичным образом: мы полагаем $\overline{b}_\xi = b_{\lambda+n}$ и находим $\overline{a}_\xi$. Это определяет $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по трансфинитной индукции. Построенные последовательности $\overline{a} \in^\alpha A$ и $\overline{b} \in^\alpha B$ удовлетворяют заключениям леммы. □

Теорема 3.3 (Единственность насыщенных моделей). *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — элементарно эквивалентные насыщенные модели одинаковой мощности. Тогда $|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{B}|$.*

Доказательство. Пусть $|A| = |B| = \alpha$ и пусть $a \in^\alpha A$, $b \in^\alpha B$ — перечисления множеств A и B соответственно. По лемме о челноке существуют $\overline{a} \in^\alpha A$, $\overline{b} \in^\alpha B$, расширяющие a и b соответственно, такие, что

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}_\xi)_{\xi<\alpha} \equiv (\mathfrak{B}, \overline{b}_\xi)_{\xi<\alpha}.$$

Так как $\overline{a}$, $\overline{b}$ также перечисляют A, B, то модели $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ изоморфны.

□

Упражнение 3.8. Пусть $\|\mathcal{L}\| = \alpha$. Найдите теорию T в языке $\mathcal{L}$, обладающую бесконечными моделями и имеющую насыщенную модель мощности α^+ тогда и только тогда, когда $\alpha^+ = 2^\alpha$.

Теперь перейдем к изучению строения абелевых групп.

4 Делимые и конечно копорожденные группы

4.1 Прямые слагаемые

Подгруппа B группы A называется ее *прямым слагаемым*, если существует подгруппа C группы A такая, что $A = B \oplus C$.

Лемма 4.1. *Если существует проекция $\pi : A \to B$, то B является прямым слагаемым в A.*

Доказательство. Дополнительным слагаемым является ядро $\ker \pi$. □

Почти тривиальным критерием того, что B — прямое слагаемое в A, является наличие в смежных классах A по B таких представителей, что они составляют подгруппу. Мы будем иногда пользоваться таким критерием:

Предложение 4.1. *Для подгруппы B группы A экививалентны следующие условия ($\rho : B \to A$ — вложение):*

а) *B — прямое слагаемое группы A;*

б) *существует гомоморфизм $\pi : A \to B$ такой, что $\pi\rho = 1_B$;*

в) *если $\gamma : U \to V$ — вложение абелевых групп, $\alpha : V \to A$, $\beta : U \to B$, то существует гомоморфизм $\varphi : V \to B$ такой, что $\varphi\gamma = \beta$.*

Доказательство. Выведем сначала в) из а). Если справедливы предположения пункта в) и $\pi : A \to B$ — проекция, то для $\varphi = \pi\alpha$ имеем $\varphi\gamma = \pi\alpha\gamma = \pi\rho\beta = \beta$. Предположим теперь, что выполнено в), и возьмем $U = B$, $V = A$, $\gamma = \rho$, $\alpha = 1_A$, $\beta = 1_B$. Тогда сразу получится ситуация пункта б). Из б) пункт а) следует очевидно. □

Определение 4.1. Подгруппа G группы A называется *вполне характеристической*, если $\varphi(G) \subseteq G$ для любого эндоморфизма группы A.

Примером характеристической подгруппы может, например, служить периодическая часть группы A.

Упражнение 4.1. Найдите все характеристические подгруппы в группе $\mathbb{Z}_{p^\infty}$; в группе $\mathbb{Q}$; в группе $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4.2. *Если $A = B \oplus C$ и G — вполне характеристическая подгруппа группы A, то*

$$G = (G \cap B) \oplus (G \cap C).$$

Доказательство. Пусть π, θ — проекции, связанные с прямым разложением $A = B \oplus C$. Так как G — вполне характеристическая, θG и πG — подгруппы в G. Из включений $\pi G \subseteq B$ и $\theta G \subseteq C$ следует, что $\pi G \cap \theta G = 0$, а $g = \pi g + \theta g$ дает $G = \pi G + \theta G$, так что $G = \pi G \oplus \theta G$. Очевидно $\pi G \subseteq G \cap B$ и $\theta G \subseteq G \cap C$, откуда следуют равенства. □

Упражнение 4.2. Распространите лемму 4.2 на бесконечные прямые суммы.

Упражнение 4.3. Назовем подгруппу G группы A *инвариантной относительно проекций*, если всякая проекция π группы A на прямое слагаемое отображает группу G в себя.

а) Докажите, что подгруппа G инвариантна относительно проекций тогда и только тогда, когда $\pi G = G \cap \pi A$ для любой проекции π.

б) Пересечение подгрупп, инвариантных относительно проекций, и подгруппа, порожденная такими подгруппами, являются подгруппами, инвариантными относительно проекций.

в) Лемма 4.2 справедлива для подгрупп, инвариантных относительно проекций.

г) Прямые слагаемые, инвариантные относительно проекций, являются вполне характеристическими подгруппами.

Теорема 4.1 (Капланский, [4])**.** *Если факторгруппа A/B является прямой суммой,*

$$A/B = \bigoplus_{i \in I} (A_i/B),$$

и подгруппа B служит прямым слагаемым для каждой группы A_i, скажем, $A_i = B \oplus C_i$, то B служит прямым слагаемым для A:

$$A = B \bigoplus \left(\bigoplus_{i \in I} C_i \right).$$

Доказательство. Очевидно, подгруппы B и все C_i вместе порождают группу A. Пусть $b + c_1 + \cdots + c_n = 0$ для некоторых элементов $b \in B$, $c_j \in C_j$. Переходя к факторгруппе по B, получаем $(c_1 + B) + \cdots + (c_n + B) = B$. Так как $c_j + B \in A_j/B$, то $c_1 + B = \cdots = c_n + B = B$. Значит, $c_j \in B$ для каждого j, поэтому $c_j \in B \cap C_j = 0$. Но тогда и $b = 0$, откуда искомая сумма — прямая. □

Если B — прямое слагаемое группы A, то дополнение к B однозначно с точностью до изоморфизма, но не единственно. Следующий результат показывает, что из одного дополнения легко получить все остальные.

Лемма 4.3. *Пусть $A = B \oplus C$ — прямое разложение с проекциями π, θ. Если разложению $A = B \oplus C_1$ соответствуют проекции π_1, θ_1, то*

$$\pi_1 = \pi + \pi\varphi\theta, \quad \theta_1 = \theta - \pi\varphi\theta, \tag{1}$$

где φ — некоторый эндоморфизм группы A. Обратно, если эндоморфизмы имеют вид (1), *то $A = B \oplus \theta_1 A$.*

Доказательство. Если проекции π_1, θ_1 связаны с разложением $A = B \oplus C_1$, то положим $\varphi = \theta - \theta_1$. Очевидно, $B \subseteq \ker\varphi$, поэтому $\varphi = \varphi\pi + \varphi\theta = \varphi\theta$. Если $a = b + c = b_1 + c_1$, где $b, b_1 \in B$, $c \in C$, $c_1 \in C_1$, то $\varphi a = c - c_1 = b_1 - b \in B$, откуда $\pi\varphi = \varphi$. Поэтому $\theta_1 = \theta - \varphi = \theta - \pi\varphi\theta$ и $\pi_1 = 1_A = \theta_1 = \pi + \theta - \theta_1 = \pi + \pi\varphi\theta$. Обратно, если π_1, θ_1 имеют вид (1), то $\pi_1 + \theta_1 = 1_A$, $\pi_1^2 = \pi_1$, $\theta_1^2 = \theta_1$, $\pi_1\theta_1 = \theta_1\pi_1 = 0$, т.е. $A = \pi_1 A \oplus \theta_1 A$. Здесь $\Im\pi_1 \subseteq \Im\pi$, $\pi_1 B = \pi B = B$, следовательно, $\pi_1 A = B$. □

Теорема 4.2 (Гретцер и Шмидт)**.** *Если B — прямое слагаемое группы A, то пересечение $\widetilde{C}$ всех прямых слагаемых C к подгруппе B есть максимальная вполне характеристическая подгруппа в A, не пересекающаяся с B.*

Доказательство. Пусть разложению $A = B \oplus C$ соответствуют проекции π, θ и пусть φ — эндоморфизм группы A. По лемме 4.3 $C_1 = (\theta - \pi\varphi\theta)A$ есть снова дополнение к B, поэтому для элемента $c \in \widetilde{C}$ имеем $(\theta - \pi\varphi\theta)c = c$, $\theta c = c$ (так как одновременно $c \in C$ и $c \in C_1$). Отсюда $\pi\varphi c = 0$. Это показывает, что $\varphi c \in C$, а так как C было произвольным дополнением к B, то $\varphi c \in \widetilde{C}$, т.е. $\widetilde{C}$ — вполне характеристическая подгруппа группы A. Очевидно, $B \cap \widetilde{C} = 0$. Если X — какая-то вполне характеристическая подгруппа группы A со свойством $B \cap X = 0$, то по лемме 4.2 $X = (X \cap B) \oplus (X \cap C) = X \cap C$. Следовательно, $X \subseteq C$, откуда $X \subseteq \widetilde{C}$. □

Следствие 4.1. *Дополнение к прямому слагаемому группы A единственно тогда и только тогда, когда оно — вполне характеристическая подгруппа.*

Если нужно показать, что подгруппа B группы A является ее прямым слагаемым, то обычно невозможно найти искомую проекцию. Тогда чаще всего ищут дополнение к B среди всех подгрупп, которые не пересекаются с B.

Назовем *B-высокой подгруппой* подгруппу H группы A, для которой

$$H \cap B = 0, \quad H_1 \cap B \neq 0 \text{ для всех } H \subset H_1 \subseteq A.$$

Это означает, что H — максимальная подгруппа, не пересекающаяся с B. Тогда, в частности, $H + B = H \oplus B$. Существование B-высоких подгрупп гарантируется леммой Цорна. Более того, подгруппу H можно выбрать так, чтобы она содержала заданную подгруппу G такую, что $G \cap B = 0$.

Лемма 4.4. *Если B — подгруппа группы A и C является B-высокой подгруппой в A, то из включений $a \in A$, $pa \in C$ (p — простое число) следует, что $a \in B \oplus C \subseteq A$.*

Доказательство. Если $a \in C$, то доказывать нечего. Если $a \notin C$, то подгруппа $\langle C, a\rangle$ содержит, согласно выбору подгруппы C, элемент $b \in B$, $b \neq 0$. Значит, $b = c + ka$ для некоторого $c \in C$ и целого k. Здесь $(k, p) = 1$, так как $pa \in C$, $B \cap C = 0$. Следовательно, $rk + sp = 1$ для некоторых целых чисел r, s, и, таким образом, $a = r(ka) + s(pa) = r(b - c) + s(pa) \in B \oplus C$. □

Лемма 4.5 (Гретцер)**.** *Пусть группы A, B, C — такие же, как в предыдущей лемме. Тогда $A = B \oplus C$ тогда и только тогда, когда из равенства $pa = b + c$ ($a \in A$, $b \in B$, $c \in C$) непременно следует $pb' = b$ для некоторого $b' \in B$.*

Доказательство. Если $A = B \oplus C$, $a = b' + c'$ ($b' \in B$, $c' \in C$), то $pa = pb' + pc' = b + c$ дает $pb' = b$. Обратно, если из равенства $pa = b + c$ всегда следует $pb' = b$ для некоторого $b' \in B$, то $a - b'$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы и, следовательно, $a - b' \in B \oplus C$, $a \in B \oplus C$. Это означает, что факторгруппа $A/(B \oplus C)$ не содержит элементов простого порядка, т. е. будет группой без кручения. Но если x — произвольный элемент группы A, не лежащий в $B \oplus C$, то пересечение $\langle C, x\rangle \cap B$ содержит ненулевой элемент $c'' + lx = b''$ для некоторого $c'' \in C$ и целого числа l. Тогда $l \neq 0$, так как $B \cap C = 0$, поэтому из включения $lx = b'' - c'' \in B \oplus C$ следует, что $A/(B \oplus C)$ — периодическая группа. Таким образом, $A = B \oplus C$. □

4.2 Делимые абелевы группы

Определение 4.2. Абелева группа A называется *делимой*, если для любого $a \in A$ и любого $0 \neq n \in \omega$ элемент a делится на n (т. е. существует $b \in B$ такое, что $a = nb$).

Подгруппа B абелевой группы A называется *делимой*, если она сама является делимой группой.

Группа A называется *редуцированной*, если она не содержит нетривиальных делимых подгрупп.

Упражнение 4.4. Докажите, что группа делима тогда и только тогда, когда в ней нет максимальных подгрупп.

Упражнение 4.5. Докажите, что группа делима тогда и только тогда, когда у нее нет конечных эпиморфных образов.

Делимые абелевы группы очень близко связаны с понятием инъективности.

Определение 4.3. Группа D называется *инъективной*, если для любых абелевых групп A, B, вложения $\alpha : A \to B$ и гомоморфизма $\xi : A \to D$ существует гоморфизм $\eta : B \to D$ такой, что $\xi = \eta\beta$. Если отождествить A и αA, то инъективность группы D можно интерпретировать как возможность продолжить любой гомоморфизм $\xi : A \to D$ до гомоморфизма группы B, содержащей A, в группу D.

Мы хотим показать, что делимые группы инъективны.

Теорема 4.3 (Бэр)**.** *Делимые группы инъективны.*

Доказательство. Пусть дана делимая группа D и ситуация, описанная в определении инъективности (группа B, ее подгруппа A, а также гомоморфизм $\xi : A \to D$). Рассмотрим все группы G, расположенные между A и B ($A \subseteq G \subseteq B$), для которых существует продолжение $\theta : G \to D$ гомоморфизма ξ. Частично упорядочим пары (G, θ), полагая $(G, \theta) \leqslant (G', \theta')$, если G есть подгруппа в G' и $\theta = \theta'|_G$. Множество этих пар не пусто, так как ему принадлежит пара (A, ξ), и удовлетворяет условиям леммы Цорна, так как любая цепь (G_i, θ_i), $i \in I$, имеет верхнюю грань — пару (G, θ), где $G \cup_{i\in I} G_i$, $\theta = \cup_{i\in I}\theta_i$. Значит, по лемме Цорна, в рассматриваемом множестве существует максимальный элемент (G_0, θ_0). Если $G_0 \subset B$ и для элемента $b \in B \setminus G_0$ выполнено включение $nb \in G_0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то возьмем минимальное n с этим свойством и положим $g = nb \in G_0$. В силу делимости группы D имеем для некоторого $x \in D$ равенство $nx = \theta_0(g)$. Легко проверить, что отображение

$$c + rb \mapsto \theta_0(c) + rx \quad (c \in G_0,\ 0 \leqslant r < n),$$

является гомоморфизмом группы $\langle G_0, b\rangle$ в группу D.

Если ни для какого $n \in \mathbb{N}$ не выполняется $nb \in G_0$, то подгруппа $\langle G_0, b\rangle$ изоморфна прямой сумме $G_0 \oplus \langle b\rangle$. Тогда продолжение гомоморфизма θ_0 построить еще легче — например, можно отобразить элемент b в ноль.

В любом случае получается, что мы построили продолжение для максимальной пары (G_0, θ_0), что противоречит предположению.

Значит, $G_0 = B$, $\theta_0 = \eta$. □

Упражнение 4.6. А любая ли инъективная абелева группа делима?

Теперь мы можем показать, что делимые группы выделяются прямыми слагаемыми.

Теорема 4.4. *Если подгруппа D группы A делима, то она выделяется в A прямым слагаемым.*

Доказательство. По предыдущей теореме для естественного вложения $\alpha : D \to A$ и тождественного отображения $1_D : D \to D$ существует гомоморфизм $\eta : A \to D$ такой, что $1_D = \eta \circ \alpha$. Легко доказать, что $A = D \oplus \ker \eta$. □

Основными примерами делимых групп являются квазициклическая $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ и аддитивная группа рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Можно сказать, что этим исчерпываются все примеры делимых групп, так верна следующая

Теорема 4.5 (о строении делимых групп). *Всякая делимая группа D является прямой суммой квазициклических групп и групп $\mathbb{Q}$. Мощности множеств компонент групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для разных p, а также групп $\mathbb{Q}$ составляет полную и независимую систему инвариантов группы D.*

Доказательство. Очевидно, что периодическая часть T группы D — делимая группа. Значит, $D = T \oplus E$, где группа E не имеет кручения и снова делима. Если p-компоненту группы T обозначить через T_p, то получим

$$D = \oplus_p T_p \oplus E.$$

Достаточно теперь показать, что T_p — прямая сумма групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, а E — прямая сумма групп $\mathbb{Q}$.

Выберем в цоколе группы T_p максимальную независимую систему элементов $\{a_i\}_{i\in I}$. В силу делимости в группе T_p для каждого $i \in I$ существует такая бесконечная последовательность элементов $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, \dots$, что $pa_{i1} = a_i$, $pa_{i2} = a_{i1}, \dots$ Отсюда мы заключаем, что каждый элемент a_i может быть вложен в подходящую группу $A_i \cong \digamma_{p^\infty}$, а именно, в $(a_i, a_{i1}, a_{i2}, \dots)$. Так как $\langle a_i \rangle$ — цоколь группы A_i, а элементы $\{a_i\}_{i\in I}$ независимы, то подгруппы A_i порождают в группе T_p подгруппу, являющуюся их прямой суммой $A' = \oplus_{i\in I} A_i$. Группа A' является делимой, т. е. прямым слагаемым группы T_p. Но A' содержит цоколь группы T_p, поэтому $A' = T_p$, поэтому для T_p утверждение доказано.

Теперь выберем максимальную независимую систему $\{b_j\}_{j\in J}$ элементов группы E. Так как E — делимая группа без кручения, то для любого $n \in \mathbb{Z}$ существует ровно один элемент x, для которого $nx = b_j$. Это означает, что каждый элемент b_j может быть вложен в подгруппу $B_j \cong \mathbb{Q}$ группы E. Аналогично, так как $\{b_j\}$ — независимая система элементов, то все B_j вместе порождают в E подгруппу, изоморфную прямой сумме $\mathbb{Q}$: $B = \oplus_{j\in J} B_j$. Эта подгруппа — прямое слагаемое группы E, содержащее максимальную независимую систему элементов группы E, поэтому $B = E$.

Число прямых слагаемых, изоморфных $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, легко найти, взяв подгруппу всех элементов порядка p (p-цоколь группы). Число прямых слагаемых, изоморфных $\mathbb{Q}$, также однозначно находиться, если профакторизовать группу по ее подгруппе кручения, а далее взять максимальное независимое множество элементов. $\square$

Упражнение 4.7. Приведите пример убывающей цепи делимых групп, пересечение которых не является делимой группой.

Упражнение 4.8. Делимые периодические группы изоморфны тогда и только тогда, когда их цоколи изоморфны.

Упражнение 4.9. Если A и B — делимые группы, каждая из которых содержит подгруппу, изоморфную другой группе, то $A \cong B$.

Упражнение 4.10. p-группа является редуцированной тогда и только тогда, когда ее циклические подгруппы удовлетворяют условию максимальности.

4.3 Конечно копорожденные группы

Назовем группу C *коциклической*, если существует такой элемент $c \in C$, что для любого гомоморфизма $\varphi : C \to A$, если $\varphi(c) \neq 0$, то φ — мономорфизм. В этом случае элемент c называется *кообразующим* группы C. Так как всякая подгруппа служит ядром некоторого гомоморфизма, то получается, что кообразующий должен принадлежать всем ненулыевым подгруппам группы C. Следовательно, пересечение всех ненулевых подгрупп группы C содержит ненулевой элемент; это наименьшая ненулевая подгруппа группы C. Обратно, если группа содержит наименьшую ненулевую подгруппу, то она является коциклической.

Легко доказать, что коциклическими группами являются группы $\mathbb{Z}_{p^k}$ и $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Система элементов L группы A называется *системой кообразующих*, если для любой группы B всякий гомоморфизм $\varphi : A \to B$, для которого $L \cap \ker\varphi = \emptyset$ или $= 0$, является мономорфизмом. Это, очевидно, эквивалентно тому, что всякая ненулевая подгруппа из A

содержит ненулевой элемент из L. Ясно, что подгруппа $\langle L\rangle$ должна быть существенной подгруппой группы A (пересекаться с каждой подгруппой группы A), и существенная подгруппа всегда является системой кообразующих.

Группа называется *конечно копорожденной*, если она обладает конечной системой кообразующих.

Теорема 4.6 (Курош, Яхья)**.** *Для группы A эквивалентны следующие условия:*

1) A — конечно копорожденная группа;

2) A — существенное расширение конечной группы;

3) A — прямая сумма конечного числа коциклических групп;

4) подгруппы группы A удовлетворяют условию минимальности.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1) и L — конечная система кообразующих группы A. В группе A нет элементов бесконечного порядка, так как иначе в циклической группе, порожденной элементом бесконечного порядка, можно было бы выбрать подгруппу, не содержащую ни одного элемента из L. Следовательно, L — конечная система элементов конечных порядков, откуда $\langle L\rangle$ — конечная подгруппа. Так как A — существенное расширение $\langle L\rangle$, то выполнено условие 2).

Пусть теперь выполнено условие 2), т. е. A — существенное расширение конечной подгруппы B. Очевидно, A является периодической p-группой с конечным числом разных p-компонент, и чтобы доказать 3), мы можем предположить, что A и B — p-группы. Так как $A[p]=B[p]$ — конечная группа, то для фиксированного элемента a уравнение $px=a$ может иметь не больше конечного числа решений в A. Если $h(a)=\infty$, то решения $x_1,\dots,x_k$ не могут все иметь конечную высоту, так как если для элемента $y\in A$ выполнено равенство $p^ny=a$, то $p^{n-1}y$ — это один из элементов $x_1,\dots,x_k$. Следовательно, начав с элемента a бесконечной высоты, мы можем построить квазициклическую подгруппу группы A. Объединение D всех квазициклических подгрупп группы A является делимой подгруппой, поэтому $A=D\oplus C$. Так как $C[p]$ — конечная группа, то существует максимум m ее высот, поэтому $p^{m+1}C=0$. Следовательно, C — прямая сумма коциклических групп, где число слагаемых конечно в силу конечности цоколя.

Покажем теперь, что из 3) следует 4). Если $r(A)=1$, т. е. $A=\mathbb{Z}_{p^k}$, где $2\leqslant k\leqslant\infty$, то утверждение очевидно. Для $r(A)=n>1$ доказательство проведем по индукции. Предположим, что в группах ранга $\leqslant n-1$ условие минимальности выполнено. Пусть $A=\mathbb{Z}_{p^k}\oplus B$, где $r(B)\leqslant n-1$, и пусть $G_1\subseteq G_2\supseteq\dots$ — убывающая последовательность подгрупп группы A. Тогда $B\cap G_1\supseteq B\cap G_2\subseteq\dots$, и начиная с какого-то номера m имеем $B\cap G_m=B\cap G_{m+1}=\dots$. Из соотношений

$$G_i/(B\cap G_m)=G_i(B\cap G_i)\cong(B+G_i)/B\subseteq A/B=\mathbb{Z}_{p^k}\quad(i\geqslant m),$$

следует, что группы $G_i/(B\cap G_m)$, а значит, и G_i, начиная с какого-то индекса совпадают. Этим условие 4) доказано.

Наконец, предположим, что выполнено условие 4). Группа A не содержит элементов бесконечного порядка, так как если a — такой элемент, то последовательно вложенных подгрупп $\langle a\rangle\supset\langle 2a\rangle\supseteq\langle 4a\rangle\dots$ не стабилизируется. Так как цоколь группы A не может быть бесконечной группой, то $S(A)$ — конечная группа. Следовательно, A обладает конечной системой кообразующих.

□

Предложение 4.2. *Пусть $a_1, \dots, a_n$ — конечное множество элементов группы A, M — подгруппа в A, максимальная относительного того свойства, что она не содержит ни одного из элементов $a_1, \dots, a_n$. Тогда в факторгруппе A/M выполнено условие минимальности для подгрупп. Если $n = 1$, то A/M — коциклическая группа.*

Доказательство. Всякая подгруппа группы A, строго содержащая M, содержит один из элементов $a_1, \dots, a_n$. Другими словами, всякая ненулевая подгруппа группы A/M содержит один из элементов $a_1 + M, \dots, a_n + M$. Другими словами, мы имеем в группе A/M конечную систему кообразующих. Значит, A/M обладает условием минимальности. □

Лемма 4.6 (Лось). *Всякую группу можно вложить в качестве сервантной подгруппы в прямое произведение коциклических групп.*

Доказательство. Пусть $B_i \mid i \in I$ — семейство всех коциклических факторгрупп данной группы A, и пусть $B = \prod_{i \in I} B_i$. Эпиморфизмы $\eta_i : A \to B_i$ индуцируют гомоморфизм

$$\eta = \prod \eta_i : A \to B.$$

Так как для любого элемента $a \in A$, $a \neq 0$, существует такой гомоморфизм η_i, что a не лежит в его ядре (см. предыдущее предложение), то η является мономорфизмом. Чтобы доказать сервантность подгруппы $\Im\eta$ в B, предположим, что $a \in A$, $a \notin p^n A$, и выберем в A подгруппу M, максимальную относительно свойств $p^n A \subseteq M$, $a \notin M$. Тогда A/M — коциклическая группа, а из включения $p^n A \subseteq M$ мы получим, что $A/M \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, где $k \leqslant n$. Так как $A/M = B_i$ для некоторого i, а элемент $a + M$ имеет в группе A/M высоту, не большую $k - 1$, то включение $\eta a \in p^n B$ невозможно. □

Упражнение 4.11. Определите строение групп, содержащих не более конечного числа элементов любого фиксированного порядка.

Упражнение 4.12. Охарактеризуйте группы, в которых множество конечно порожденных подгрупп удовлетворяет условию минимальности.

Упражнение 4.13. Множество эндоморфных образов группы удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда группа есть прямая сумма конечного числа групп $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_{p^k}$.

Упражнение 4.14. Множество вполне характеристических подгрупп удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда группа является прямой суммой групп $\mathbb{Q}$, групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для конечного числа разных p и групп $\mathbb{Z}_{p^k}$, где все p^k делят одно фиксированное число m.

4.4 Вложение в делимые подгруппы

Теорема 4.7. *Всякую группу можно вложить в качестве подгруппы в делимую группу.*

Доказательство. Бесконечную циклическую группу $\mathbb{Z}$ можно, очевидно, вложить в делимую группу $\mathbb{Q}$. Следовательно, любая свободная группа $\oplus\mathbb{Z}$ вложима в делимую группу $\oplus\mathbb{Q}$. Так как любая абелева группа A есть фактор свободной группы по подгруппе: $A \cong F/N$. Если вложить группу F в делимую D, то $A = F/N$ вложима в фактору делимой по подгруппе, т. е. делимой группе. □

Предложение 4.3. *Если C — такая подгруппа группы B, что факторгруппа B/C изоморфна подгруппе H группы G, то существует такая содержащая B группа A, что $A/C \cong G$.*

Доказательство. Пусть D — делимая группа, содержащая группу B. Тогда D/C содержит B/C. Если B/C нельзя расширить внутри D/C до группы, изоморфной G, то мы всегда можем найти такую делимую группу E, что в $D/C \oplus E$ такое расширение возможно. Если группа A/C изоморфна G и содержит $B/C \cong H$, то A ($\subseteq D \oplus E$) — группа с нужным свойством. □

Упражнение 4.15. делимая группа D, содержащая группу A, минимальна в точности тогда, когда D/A — периодическая группа и D содержит цоколь группы A.

Упражнение 4.16. Если группа A является эндоморфиным образом всякой группы, содержащей A, то A — делимая группа. Верно ли обратное?

5 Сервантные подгруппы

5.1 Основные понятия

Подгруппа G группы A называется *сервантной*, если уравнение $nx = g \in G$, имеющее решение во всей группе A, имеет решение и в G. Это означает, что подгруппа G сервантна в A, если из $n|g \in G$ в группе A вытекает, что $n|g$ в подгруппе G.

Подгруппа G сервантна в группе A тогда и только тогда, когда

$$nG = G \cap nA \text{ для любого } n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Естественным обобщение сервантности является p-сервантность. Подгруппа G группы A называется p-сервантной, если

$$p^kG = G \cap p^kA, \quad k = 1, 2, \dots$$

Другими словами, p-высоты элементов одинаковы в G и A.

Если G является p-сервантной в A для каждого простого p, то она сервантна. Действительно, если $n = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$ — каноническое разложение числа n,

$$nG = p_1^{m_1}G \cap \dots \cap p_k^{m_k}G = (G \cap p_1^{m_1}A) \cap \dots \cap (G \cap p_k^{m_k}A) = \\ = G \cap (p_1^{m_1}A \cap \dots \cap p_k^{m_k}A) = G \cap nA.$$

Приведем некоторые основные факты, касающиеся сервантных подгрупп:

1) Всякое прямое слагаемое является сервантной подгруппой.

2) Периодическая часть группы и ее p-компоненты являются сервантными подгруппами (но не обязательно прямыми слагаемыми).

3) Подгруппы групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $\mathbb{Q}$ не имеют нетривиальных сервантных подгрупп.

4) Если A/G — группа без кручения, то G — сервантная подгруппа группы A.

Доказательство. Из $n \neq 0$ и $na = g \in G$ вытекает $a \in G$. □

5) В группах без кручения пересечения сервантных подгрупп сервантны.

Доказательство. В группе без кручения уравнение $nx = g$ имеет не более одного решения. Поэтому если это уравнение имеет решение в группе A, то это решение содержится в каждой сервантной подгруппе группы A. □

Поэтому в любой группе без кручения A существует минимальная сервантная подгруппа, содержащая множество S. Это пересечение всех сервантных подгрупп, содержащих S. Она называется *сервантной подгруппой, порожденной множеством* S.

6) Сервантность является индуктивным свойством (замкнута относительно объединений вложенных цепочек).

Доказательство. Пусть $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_i \subseteq \dots$ — цепочка вложенных сервантных подгрупп группы A. Пусть G — объединение этих подгрупп. Если уравнение $nx = g$ имеет решение в группе A, j — такой индекс, что $g \in G_j$, то уравнение $nx = g$ имеет решение в группе G_j, а поэтому и в группе G. □

7) p-Сервантная p-подгруппа всегда сервантна.

Доказательство. Это сразу же следует из равенства $G = qG$, верной для любой p-группы и любого простого $q \neq p$. □

Лемма 5.1 (Прюфер, [4]). *Пусть B, C — такие подгруппы группы A, что $C \subseteq B \subseteq A$. Тогда*

1) Если C сервантна в B, а B сервантна в A, то C сервантна в A.

2) Если B сервантна в A, то B/C сервантна в A/C.

3) Если C сервантна в A и B/C сервантна в A/C, то B сервантна в A.

Доказательство. При предположениях п.1

$$nC = C \cap nB = C \cap (B \cap nA) = (C \cap B) \cap nA = C \cap nA$$

для любого целого n, что доказывает сервантность C в A.

Утверждение 2) вытекает из равенств

$$\begin{aligned} n(B/C) = (nB + C)/C = ((B \cap nA) + C)/C = (B \cap (nA + C))/C = \\ = (B/C) \cap n(A/C). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что выполнены условия пункта 3) и $na = b \in B$ для некоторого $a \in A$ и некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $n(a + C) = b + C$ и по предположению для некоторого

$b' \in B$ имеет место равенство $n(b'+C) = b + C$. Из $nb' = bc$ $(c \in C)$ получаем $n(b'-a) = c$. Следовательно, $nc' = c$ для некоторого $c' \in C$. Наконец, $n(b'-c') = b$, где $b'-c' \in B$, что завершает доказательство. □

Упражнение 5.1. Если $G \cap H$ и $G + H$ — сервантные подгруппы группы A, то сами подгруппы G и H также сервантны.

Упражнение 5.2. Пересечение прямых слагаемых не обязано быть сервантной подгруппой.

Упражнение 5.3. Если подгруппа G сервантна в группе A, то подгруппа nG сервантна в группе nA.

Упражнение 5.4. Данная группа сервантна во всякой содержащей ее группе тогда и только тогда, когда она делимая группа.

5.2 Ограниченные сервантные подгруппы

Результаты этого раздела имеют отдельное исключительное значение — они наиболее часто цитируются в теории абелевых p-групп.

Предложение 5.1 (Селе, [4]). *Предположим, что подгруппа B группы A является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^k. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

а) *B — сервантная (p-сервантная) подгруппа группы A;*
б) *для B выполнено равенство $B \cap p^k A = 0$;*
в) *B — прямое слагаемое группы A.*

Доказательство. Если B есть p-сервантная подгруппа группы A, то $p^m B = B \cap p^m A$ для любого целого числа m, в том числе и для $m = k$, когда $p^k B = 0$. Следовательно, из а) вытекает б). Пусть выполнено условие б) и пусть C — такая B-высокая подгруппа группы A, что $p^k A \subseteq C$. Если для некоторого $a \in A$ имеет место равенство $pa = b + c$ $(b \in B, c \in C)$, то $p^k a = p^{k-1}b + p^{k-1}c$, откуда $p^{k-1}b = 0$, так как $p^k a \in C$. Из предположения относительно строения группы B следует, что существует такой элемент $b' \in B$, что $pb' = b$. Теперь простое использование леммы 4.5 и того факта, что $qB = B$ для всех простых чисел $q \neq p$, показывает, что $A = B \oplus C$, т. е. выполнен пункт в). Из в) очевидным образом получаем а). □

Следствие 5.1 (Куликов). *Всякий элемент порядка p и конечной высоты можно вложить в конечное циклическое прямое слагаемое группы.*

Доказательство. Пусть элемент a имеет порядок p и высоту $k < \infty$, пусть $p^k b = a$. Тогда $\langle b \rangle$ — сервантная подгруппа конечного порядка, и можно применить предложение 5.1. □

Теорема 5.1 (Куликов). *Всякая ограниченная сервантная подгруппа является прямым слагаемым.*

Доказательство. Если B — ограниченная группа, то ее можно записать как $B = B_1 \oplus C$, где B_1 — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^k, а порядки всех элементов C меньше p^k. Если B — сервантная подгруппа группы A, то и B_1 сервантна в A. Из предложения 5.1 тогда следует, что $A = A_1 \oplus B_1$. Отсюда $B = B_1 \oplus C_1$, где $C_1 = B \cap A_1 \cong C$. Здесь C_1 — сервантная подгруппа группы A_1 и по предположению индукции C_1 — прямое слагаемое группы A_1. Следовательно, B — прямое слагаемое группы A. $\square$

Упражнение 5.5. Опишите группы, в которых каждая подгруппа сервантна.

Упражнение 5.6. Назовем группу *сервантно простой*, если она не имеет нетривиальных сервантных подгрупп. Опишите все сервантно простые группы.

Упражнение 5.7. В группе выполняется условие максимальности (минимальности) для сервантных подгрупп тогда и только тогда, когда эта группа имеет конечный ранг.

5.3 Факторгруппы по сервантным подгруппам

Теорема 5.2. *Подгруппа B группы A сервантна в A тогда и только тогда, когда каждый смежный класс группы A по B содержит элемент того же порядка, что сам этот смежный класс.*

Доказательство. Пусть B — сервантная подгруппа в A, $a^* \in A/B$. Если $o(a^*) = \infty$, то любой представитель смежного класса a^* имеет бесконечный порядок. Если $o(a^*) = n < \infty$, то для любого представителя $g \in a^*$ имеем $ng \in B$. Из сервантности получаем, что $nb = ng$ для некоторого $b \in B$. Элемент $a = g - b \in a^*$ имеет порядок $\leqslant n$, т. е. n.

Обратно, если выполнено сформулированное в теореме условие и $ng = b \in B$, то выберем в смежном классе $g + B$ представитель a, имеющий порядок, равный порядку этого смежного класса. Тогда $na = 0$ и для элемента $g - a \in B$ выполняется равенство $n(g - a) = b$. $\square$

Теорема 5.3 (Куликов, [4]). *Если B — сервантная подгруппа группы A и A/B — прямая сумма циклических групп, то B — прямое слагаемое в A.*

Доказательство. В силу леммы 4.1 можно ограничиться случаем, когда A/B — циклическая группа, порожденная элементом a^*. По теореме 5.2 можно выбрать элемент $a \in a^*$ того же порядка, что и a^*. Тогда элементы подгруппы $\langle a \rangle$ составят полную систему представителей смежных классов A/B. Значит, $A = B \oplus \langle a \rangle$. $\square$

Следствие 5.2. *Если подгруппа B группы A сервантна и A/B конечно порождена, то B — прямое слагаемое в A.*

Теорема 5.4. *Для подгруппы B группы A эквивалентны условия:*

1) *B сервантна в A;*

2) *Подгруппа B служит прямым слагаемым для $n^{-1}B$ для любого n;*

3) *Если C — группа, лежащая между B и A и факторгруппа C/B конечно порождена, то B служит прямым слагаемым для C.*

Доказательство. Группа $(n^{-1}B)/B$ ограничена, поэтому является суммой циклических, поэтому 1)⇒2) следует из теоремы 5.3.

Для доказательства 2)⇒3) можно ограничиться случаем, когда C/B — конечная группа. Так как $C \subseteq n^{-1}B$ для некоторого n, то 3) непосредственно следует из 2).

Так как из 3) следует, что каждый смежный класс A по B содержит элемент того же порядка, что и этот смежный класс, то 1) следует из теоремы 5.2. □

Сервантные подгруппы были определены в терминах разрешимости уравнений $nx = b \in B$, разрешимых во всей группе. Очевидно (приведите пример), что для произвольных систем уравнений это свойство места не имеет. Однако, если мы ограничимся системами, содержащими лишь конечное число неизвестных, то получим следующий результат.

Теорема 5.5 (Прюфер, [4])**.** *Если система уравнений*

$$\sum_{j=1}^{m} n_{ij}x_j = b_i \quad (b_i \in B, i \in I), \tag{3}$$

над сервантной подгруппой B группы A имеет решение в группе A, то она имеет решение и в группе B.

Доказательство. Пусть $x_j = a_j$, $j = 1, \ldots, m$, — решение данной системы в группе A. В силу теоремы 5.4, п. 3), подгруппа B служит прямым слагаемым для подгруппы $\langle B, a_1, \ldots, a_m\rangle = C$, т. е.$C = B \oplus B_1$. Компоненты элементов a_j из прямого слагаемого B дают нужное нам решение. □

Упражнение 5.8. если B сервантна в A, то

$$(A/B)[n] \cong A[n]/B[n] \text{ для любого натурального } n.$$

Упражнение 5.9. Если $A = B + C$ и $B \cap C$ — сервантная подгруппа группы B, то $A[n] = B[n] + C[n]$ для любого n.

Упражнение 5.10. Периодическая группа обладает ненулевой циклической факторгруппой тогда и только тогда, когда она имеет ненулевое циклическое прямое слагаемое.

6 Базисные подгруппы

6.1 Основные понятия

Пусть A — произвольная абелева группа, p — простое число. Система $\{a_i\}_{i\in I}$ группы A, не содержащая нуля, называется *p-независимой*, если для любой конечной подсистемы $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ и для любого натурального числа r из

$$n_1a_{i_1} + \cdots + n_ka_{i_k} \in p^rA \quad (n_la_{i_l} \neq 0)$$

следует

$$p^r|n_{i_l} \quad (l = 1, 2 \ldots)$$

Ясно, что всякая p-независимая система элементов группы A может быть расширена до максимальной.

Заметим, что любая p-независимая система обязательно независима. Действительно, если элементы $a_1, \dots, a_h$ являются p-независимыми и $n_1 a_1 + \dots + n_h a_h = 0$, причем $n_h a_h \neq 0$, то условие имеет место для любого $r > 0$, откуда следует, что $n_i = 0$ для всех i.

Заметим также, что p-независимая система содержит элементы либо бесконечного порядка, либо порядков, равных степеням числа p. Действительно, если элемент a имеет порядок m и входит в p-независимую систему, а p^s — максимальная степень числа p, делящая m, то $p^s a$ принадлежит любой подгруппе $p^r A$ (для всякого r), откуда либо $p^r | p^s$ для всех r (что невозможно), либо $p^s A = 0$.

Лемма 6.1 (Фукс, [4])**.** *Подгруппа, порожденная p-независимой системой группы A, p-сервантна в A.*

Если независимая система элементов, содержащая только элементы бесконечного порядка или порядков степеней числа p, порождает p-сервантную подгруппу, то эта система p-независима.

Доказательство. Пусть C — подгруппа, порожденная p-независимой системой $\{a_i\}_{i \in I}$. Предположим, что $c \in C \cap p^r A$, т.е. $c = n_1 a_1 + \dots + n_k a_k \in p^r A$, где $n_i a_i \neq 0$. В силу p-независимости системы существуют такие целые числа m_i, что $n_i = p^r m_i$ для всех $i = 1, \dots, k$, откуда $c = p^r(m_1 a_1 + \dots + m_k a_k) \in p^r C$. Следовательно, C — p-сервантная подгруппа в A.

Чтобы проверить справедливость второго утверждения, предположим, что $\{a_i\}_{i \in I}$ — независимая система элементов группы A, у которой порядок каждого элемента либо бесконечен, либо равен степени числа p. Положим

$$C = \oplus_{i \in I} \langle a_i \rangle.$$

По предположению C — p-сервантная подгруппа. Если $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k \in p^r A$ и $n_i a_i \neq 0$, то из p-сервантности подгруппы C следует, что $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k = p^r(m_1 a_1 + \dots + m_k a_k)$ для некоторых целых чисел m_i. В силу независимости $n_i a_i = p^r m_i a_i$, $i = 1, \dots, k$. Из предположения относительно порядков a_i имеем $p^r | n_i$. □

Мы подошли к определению p-базисных подгрупп. Подгруппа B группы A называется *p-базисной*, если выполняются следующие три условия:

1) Подгруппа B является прямой суммой циклических p-групп и бесконечных циклических групп.

2) B есть p-сервантная подгруппа группы A.

3) Факторгруппа A/B является p-делимой группой.

Согласно этому определению подгруппа B обладает базисом, который мы назовем *p-базисом* группы A.

Если на группе A задана p-адическая топология, то из условий 1)–3) следует, что группа B хаусдорфова в своей p-адической топологии, которая совпадает с топологией, индуцированной группой A, и что группа B плотна в A. Очевидно, что A является базисной подгруппой сама для себя, если для нее выполнено условие 1), а 0 является p-подгруппой, если A p-делима.

Лемма 6.2. *Система элементов $\{a_i\}_{i\in I}$ служит p-базисом для группы A тогда и только тогда, когда она является для нее максимальной p-независимой системой.*

Доказательство. Ясно, что нам нужно рассмотреть только элементы бесконечного порядка и порядков, равных степеням числа p.

Предположим сначала, что $\{a_i\}_{i\in I}$ есть базис. Из леммы 6.1 и условий 1), 2) получаем, что система $\{a_i\}_{i\in I}$ является p-независимой. Из 3) следует, что для любого ненулевого элемента $g \in A$ имеет место соотношение $g+n_1a_1+\dots+n_ka_k \in pA$. Поэтому если расширить систему добавлением к ней элемента g, то получится уже не p-независимая система.

Обратно, пусть $\{a_i\}_{i\in I}$ — максимальная p-независимая система элементов группы A. Тогда она независима, и условие 1), очевидно, выполняется. Из леммы 6.1 следует выполнение условие 2). Чтобы доказать 3), предположим, что $g \in A$ и имеет порядок p^t. В силу максимальности системы $\{a_i\}_{i\in I}$ имеет место некоторое соотношение $n_0g + n_1a_1 + \dots + n_ka_k \in p^rA$, где $n_0g \neq 0$, $n_ia_i \neq 0$ и $p^r \not| n_j$ для некоторого j. В силу p-независимости элементов $\{a_i\}_{i\in I}$ $p^r \not| n_0$. Пусть $n_0 = p^sm_0$, $0 \leqslant s < r$, $(m_0, p) = 1$. Тогда $n_1a_1+\dots+n_ka_k \in p^sA$, откуда $n_i = p^sm_i$ для всех i. Таким образом,

$$p^s(m_0g + m_1a_1 + \dots + m_ka_k) = p^rb$$

для некоторого $b \in A$ и $p^s(m_0g - p^{r-s}b + m_1a_1 + \dots + m_ka_k) = 0$. Предположим, что мы уже доказали делимость элементов из A на число p по модулю $B = \langle \dots, a_i, \dots \rangle$ в случае, когда их порядок есть степень числа p, меньшая p^t. Тогда получается, что $m_0g - p^{r-s}b + m_1a_1 + \dots + m_ka_k + B$, т. е. $m_0g + B$ делится на p. Так как $(m_0, p) = 1$, то элемент $g + B$ тоже делится на p, т. е. по индукции получаем, что каждый элемент группы A, имеющий конечный порядок, делится на p по модулю B.

Если элемент g имеет бесконечный порядок, то тем же способом показываем, что элемент $m_0g + B$, а значит, и $g + B$ делится на p. □

Теорема 6.1 (Фукс, [4])**.** *Всякая группа для любого простого числа p содержит p-базисные подгруппы.*

Доказательство. В группе всегда существует максимальная p-независимая система. По предыдущей лемме она порождает p-базисную подгруппу. □

Вскоре мы увидим, что группа может содержать много разных p-базисных подгрупп, однако все они изоморфны.

Пусть B — базисная p-подгруппа группы A. Соберем в разложении группы B все прямые слагаемые одного порядка и образуем их прямую сумму:

$$B = B_0 \oplus B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus \dots, \tag{4}$$

где

$$B_0 = \oplus\mathbb{Z}, \quad B_k = \oplus\mathbb{Z}_{p^k}. \tag{5}$$

Для всякого n подгруппа $B_1\oplus\dots\oplus B_n$ является p-сервантной, а следовательно, сервантной в A. Так как это ограниченная группа, то по теореме 5.1 она выделяется в A прямым слагаемым:

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus A_n. \tag{6}$$

Однако подгруппа B_0 в общем случае не является прямым слагаемым группы A. Мы покажем, что подгруппы A_n, входящие в (6), могут быть выбраны так, чтобы

$$A_n = A_{n+1} \oplus B_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Более того, справедлива следующая

Теорема 6.2 (Бэр; Бойер; [4]). *Пусть B — подгруппа группы A, для которой выполнены равенства* (4) *и* (5). *Подгруппа B является p-базисной подгруппой группы A тогда и только тогда,когда:*

а) B_0 *есть p-сервантная подгруппа группв A и*

б) *если $B_n^* = B_0 \oplus B_{n+1} \oplus B_{n+2} \oplus \dots$, то*

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n \oplus (B_n^* + p^n A).$$

Доказательство. Для p-базисной подгруппы условие а), очевидно, выполнено. В силу условия 3) каждый элемент $a \in A$ имеет вид $a = b + p^n g$, $b \in B$, $g \in A$, где n — любое, поэтому подгруппы B_1, B_2, $\dots$, B_n, B_n^*, $p^n A$ вместе порождают группу A. Если элемент $a \in B_n^+ + p^n A$ также принадлежит и $B_1 \oplus \dots \oplus B_n$, то запишем $a = c + p^n h$, $c \in B_n^*$, $h \in a$. Тогда $p^n h \in B$, и, более того, $p_n h \in B_n^*$, что следует из p-сервантности группы B в группе A и строения группы B. Отсюда $a \in B_n^* \cap (B_1 \oplus \dots \oplus B_n) = 0$ и утверждение б)济 выполено.

Обратно, если для подгруппы B выполнены условия а) и б), то условие 1) p-базисности выполнено тривиальным образом. Из а) вытекает, что подгруппа B_0 является p-сервантной в $(B_n^* + p^n A)$, а из б) — что $B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus B_0$ есть p-сервантная подгруппа группы A. Но тогда и подгруппа B как объединение возрастающей цепи p-сервантных подгрупп группы A является p-сервантной в A. Наконец, для доказательства условия 3) запишем элемент $a \in A$ как $a = b_1 + \dots + b_n + c + p^n g$, где $b_i \in B_i$, $c \in B_n^*$, $g \in A$. Тогда $a + B = p^n g + B = p^n(g + B)$ и условие 3) выполнено. $\square$

Упражнение 6.1. Если B есть p-базисная подгруппа группы A, то nB — p-базисная подгруппа группы nA для любого $n > 0$.

Упражнение 6.2. p-базис группы A порождает базис группы A/pA. Если A — группа без кручения, то любой базис группы A/pA порождается некоторым p-базисом группы A.

Упражнение 6.3. Подгруппа C группы A является p-сервантной в группе A тогда и только тогда, когда p-базисная подгруппа группы C является p-сервантной подгруппой в A.

6.2 Базисные подгруппы p-групп

Сконцентрируем на время наше внимание на p-группах, где базисные подгруппы особенно важны. Если A — p-группа, а q — простое число, отличное от p, то, очевидно, единственной базисной q-группой в A является 0. Поэтому не вызовет затруднений, если мы в случае p-групп будем называть p-базисные подгруппы просто базисными.

Иногда бывает удобно говорить о базисной подгруппе периодической группы. Под этим подразумевается прямая сумма $\oplus_p B_p$, где каждая B_p — базисная p-подгруппа p-компоненты группы A. Таким образом, базисная подгруппа периодической группы A определяется следующими условиями:

1) B — прямая сумма конечных циклических групп;
2) B сервантна в A;
3) A/B — делимая группа.

Пример 6.1. Пусть B_n — прямая сумма циклических групп одного и того же порядка p^n, A — периодическая часть прямого произведения групп B_n, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда группа $B = \oplus_{n \in \mathbb{N}} B_n$ является базисной подгруппой в A.

Доказательство. Условия 1) и 2) выполняются очевидным образом, поэтому докажем условие 3). Докажем, что каждый элемент $a \in A$ делится на p по модулю B. Пусть $a = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, порядок элемента a равен p^k. Тогда рассмотрим элемент $a - b_1 - b_2 - \cdots - b_k = (0, \ldots, 0, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots)$. Каждый b_{k+l} делится на p, так как $p^k b_{k+l} = 0$. □

Существование базисных подгрупп в p-группах можно интерпретировать так: каждая группа A может быть построена с помощью сервантной подгруппы B, являющейся прямой суммой циклических p-групп, и делимой фактор-группы A/B. Так как подгруппа B имеет базис, а факторгруппа A/B изоморфна прямой сумме групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, то естественно объединить порождающие обеих групп в единую систему порождающих.

Запишем
$$B = \bigoplus_{i \in I} \langle a_i \rangle, \quad A/B = \bigoplus_{j \in J} C_j^*, \text{ где } C_j = \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

Если прямое слагаемое C_j^* порождается смежными классами $c_{j1}^*, \ldots, c_{jn}^*, \ldots$, где $pc_{j1}^* = 0$, $pc_{j(n+1)}^* = c_{jn}^*$, то в силу сервантности подгруппы B можно выбрать элементы $c_{jn} \in c_{jn}^*$ того же порядка, что и c_{jn}^* в A/B. Тогда получится следующая система соотношений:
$$pc_{j1} = 0, \quad pc_{j(n+1)} = c_{jn} - b_{jn} \quad (b_{jn} \in B), \tag{7}$$
где элемент b_{jn} должен иметь порядок $\leqslant p^n$, так как $o(c_{jn}) = p^n$.

Систему элементов $\{c_{jn}, a_i\}_{j \in J, i \in I, n \in \omega}$ мы будем называть *квазибазисом* группы A. Эта терминология оправдывается следующим результатом:

Теорема 6.3 (Фукс, [4]). *Если a_i, c_{jn} — квазибазис p-группы A, то любой элемент $a \in A$ можно записать в виде*
$$a = s_1 a_{i_1} + \cdots + s_m a_{i_m} + t_1 c_{j_1 n_1} + \cdots + t_r c_{j_r n_r}, \tag{8}$$
где s_i, t_j — целые числа, ни одно t_j не делится на p, все индексы $i_1, \ldots, i_m$ и индексы $j_1, \ldots, j_r$ различны. Запись (8) единственна в том смысле, что в ней однозначно определены все элементы sa_i и tc_{jn}.

Доказательство. Пусть $a \in A$. Выразим сначала смежный класс $a^* = a + B$ через c_{jn}^*: $a^* = t_1 c_{j_1 n_1}^* + \cdots + t_r c_{j_r n_r}^*$, где ни одно $t \in \mathbb{Z}$ не делится на p. Тогда члены tc_{jn}^*, а, значит, и tc_{jn} определяются элементом a однозначно. Если выразить элемент $a - t_1 c_{j_1 n_1} - \cdots - t_r c_{j_r n_r}$ в виде линейной комбинации базисных элементов a_i группы B, то получится равенство (8), где ca_i опять определены однозначно, так как B — прямая сумма циклических групп. □

Упражнение 6.4. Систему элементов $\{a_i\}_{i\in I}$ группы A назовем *сервантно независимой*, если она независима и порождает в A сервантную подгруппу. Докажите, что

а) система $\{a_i\}$ сервантно независима тогда и только тогда, когда из $mb = n_1 a_{i_1} + \dots + n_k a_{i_k}$ вытекает $n_j a_{i_j} = m n'_j a_{i_j}$;

б) всякую сервантно независимую систему можно вложить в максимальную;

в) сервантно независимая система S элементов p-группы A является максимальной тогда и только тогда, когда $A/\langle S\rangle$ — делимая группа;

г) максимальная сервантно независимая система элементов служит базисом для некоторой p-базисной подгруппы группы A.

Упражнение 6.5. Если базисная подгруппа B p-группы A является характеристической подгруппой группы A, то либо $B = A$, либо $B = 0$.

Упражнение 6.6. а) Всякая счетная подгруппа p-группы A без элементов бесконечной высоты содержится в некоторой базисной подгруппе группы A.

б) Это утверждение неверно, если отбросить условие счетности.

6.3 Различные p-базисные подгруппы

Лемма 6.3. *Для произвольной абелевой группы A и ее p-базисной подгруппы B*

$$A = B + p^n A \text{ для любого целого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. Непосредственно следует из p-делимости группы A/B. □

Лемма 6.4. *Для произвольной абелевой группы A и ее p-базисной подгруппы B*

$$B/p^n B \cong A/p^n A \text{ для любого целого } n \geqslant 0.$$

Доказательство. В силу леммы 6.3 и второй теоремы об изоморфизме $A/p^n A = (B + p^n A)/p^n A \cong B/(B \cap p^n A)$. При этом $B \cap p^n A = p^n B$, так как B сервантна. □

Теорема 6.4 (Куликов, Фукс)**.** *Для заданного простого числа p все p-базисные подгруппы данной группы изоморфны.*

Доказательство. Пусть

$$B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i, \quad B_0 = \oplus\mathbb{Z}, \quad B_i = \oplus\mathbb{Z}_{p^i}$$

— базисная подгруппа группы A. Мощность множества слагаемых, изоморфных $\mathbb{Z}_{p^n}$, равна мощности множества слагаемых, изоморфных $\mathbb{Z}_{p^n}$, в группе $B/p^k B$, при любом $k > n$. Из леммы 6.4 следует, что $B/p^k B \cong A/p^k A$, поэтому мощности не зависят от выбора группы B.

Чтобы доказать единственность с точностью до изоморфизма группы B_0, установим сначала справедливость равенства

$$pB_0 = B_0 \cap (T_p + pA), \tag{9}$$

где T_p — p-компонента группы A. Включение $\subseteq$ очевидно. Пусть $b_0 \in B_0 \cap (T_p + pA)$, $b_0 = c + pa$, $c \in T_p$, $a \in A$. Существует число n, для которого $p^n b_0 = p^{n+1}a \in B_0 \cap p^{n+1}A = p^{n+1}B_0$, т. е. $p^n b_0 = p^{n+1}b$ при некотором $b \in B_0$. В силу того, что B_0 — группа без кручения, $b_0 = pb \in pB_0$, что доказывает (9). Далее,

$$B_0/pB_0 = B_0/(B_0 \cap (T_p + pA)) \cong (B_0 + T_p + pA)/(T_p + pA) = A/(T_p + pA);$$

здесь мы использовали тот факт, что $B_0 + T_p + pA \supseteq B + pA = A$. Мы приходим к тому, что ранг группы B_0, равный рангу группы B_0/pB_0, не зависит от выбора подгруппы B. □

Упражнение 6.7. Приведите пример редуцированной группы A и нетривиальной ее подгруппы B, являющейся p-базисной для A при любом простом p.

Упражнение 6.8. Не всякий гомоморфизм базисной подгруппы p-группы A в группу A можно продолжить до эндоморфизма группы A.

Упражнение 6.9. Охарактеризуйте группы с конечным числом p-базисных подгрупп.

7 Топология на группах; прямые и обратные пределы

7.1 Некоторые сведения о топологии

Нас в основном будут интересовать в дальнейшем *линейные* топологии. Это такие топологии, что имеет база (фундаментальная система) окрестностей нуля, состоящая из подгрупп, причем смежные классы по этим подгруппам образуют базу открытых множеств. Непрерывность групповых операций очевидна, потому что из включения $x - y \in a + U$ следует $(x+U)-(y+U) \subseteq a+U$. Если $\{U_i \mid i \in I\}$ — система окрестностей нуля группы A, то группа A хаусдорфова тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_{i \in I} U_i = 0.$$

В некоторых случаях рассматривается топология, удовлетворяющая *первой аксиоме счетности*, т. е. такая, что существует счетная база открытых окрестностей нуля. Если $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ — такая система, то U_1, $U_1 \cap U_2$, $U_1 \cap U_2 \cap U_3, \ldots$, $U_1 \cap \cdots \cap U_n, \ldots$ — тоже. Таким образом, мы можем всегда считать эту последовательность убывающей.

$\mathbb{Z}$-адической топологией группы A называется такая топология этой группы, для которой системой окрестностей нуля является множество подгрупп nA, $n \in \mathbb{Z}$. Соответственно, *p-адической топологией* называется топология, задаваемая множеством подгрупп $p^n A$, $n \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 7.1. В каких случаях группа A хаусдорфова в своей $\mathbb{Z}$-адической (p-адической) топологии?

Упражнение 7.2. Докажите, что $\mathbb{Z}$-адическая и p-адическая топологии на группе A совпадают, если $qA = A$ для любого простого $q \neq p$.

Упражнение 7.3. Пусть p и q — различные простые числа. На каких группах p-адическая и q-адическая топологии совпадают?

Предложение 7.1. *Пусть группа A полна в некоторой топологии. Подгруппа группы A замкнута тогда и только тогда, когда она полна в индуцированной топологии.*

Упражнение 7.4. Докажите предложение 7.1.

Предложение 7.2. *Пусть B — замкнутая подгруппа группы A, удовлетворяющей первой аксиоме счетности. Тогда факторгруппа A/B полна в индуцированной топологии.*

Доказательство. По предположению существует такая база $\{U_m\}_m$ окрестностей нуля, что $\cap_m U_m = 0$. Группы $\overline{U_m} = (U_m + B)/B$ образует базу окрестностей нуля в A/B. Пусть $a_1 + B, \ldots, a_n + B$ — последовательность Коши в A/B. Можно без ограничения общности считать $a_{m+1} - a_m + B \in U_m + B$ Для любого m. Положим $c_1 = a_1$ и предположим, что элементы $c_1, \ldots, c_m \in A$ уже выбраны так, что $c_i \in a_i + B$, $c_i - c_{i_1} \in U_{i-1}$. Тогда $a_{m+1} - c_m = u_m + b_m$ для некоторых $u_m \in U_m$, $b_m \in B$. Положим $c_{m+1} = a_{m+1} - b_m$ и получим продолжение последовательности. Таким образом, существует последовательность $\{c_m\}$ со свойствами $c_i \in a_i + B$, $c_i - c_{i_1} \in U_{i-1}$. Другими словами, с помощью последовательности Коши в группе A/B можно получить последовательность Коши в группе A. Если a — предел последовательности $\{c_m\}$, то $a + B$ — предел последовательности $\{a_m + B\}$. □

На прямом произведении групп A_t можно определить важную для нас *блочную топологию.* Без ограничения общности можно считать, что базы окрестностей нуля каждой группы A_t занумерованы одним и тем же множеством индексов I: в группе A_t имеем базу окрестностей нуля $\{U_{ti}\}$, $i \in I$. Блочной топологией на $G = \prod_t A_t$ называется топология с базой окрестностей нуля, состоящей из подгрупп

$$\prod_t U_{ti} = U_i^*.$$

Эта топология линейна. Она хаусдорфова, когда все группы A_t хаусдорфовы; удовлетворяет первой аксиоме счетности, когда все группы удовлетворяют первой аксиоме счетности.

Важным частным случаем является случай, когда все группы A_t снабжены $\mathbb{Z}$-адической (p-адической) топологией. Тогда блочная топология в $\prod_t A_t$ также является $\mathbb{Z}$-адической (p-адической).

Предложение 7.3. *Прямое произведение полно в блочной топологии тогда и только тогда, когда каждая его компонента полна.*

Доказательство. Пусть группа $G = \prod_t A_t$ полна в блочной топологии, и пусть $\{a_i\}_{i\in I}$ — последовательность Коши в группе A_t. Тогда $\{\rho_t a_i\}_{i\in I}$ — последовательность Коши в G (ρ_t означает координатное вложение). Пусть эта последовательность имеет пределом элемент $g \in G$. Тогда, очевидно, $\pi_t g$ – предел последовательности $\{a_i\}$.

Обратно, если все группы A_t полны, и $\{g_i\}_{i\in I}$ — последовательность Коши в G, то составим предел из покомпонентных пределов. □

Следствие 7.1. *Прямое произведение групп полно в $\mathbb{Z}$-адической (p-адической) топологии тогда и только тогда, когда каждая его компонента полна в $\mathbb{Z}$-адической (p-адической) топологии.*

7.2 Кольцо и группа p-адических чисел; p-адические модули

Пусть p — простое число, а $\mathbb{Q}_p$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p. Ненулевые идеалы кольца $\mathbb{Q}_p$ являются главными идеалами, порожденными числами p^k, $k \in \mathbb{N}$. Если рассматривать идеалы (p^k) как фундаментальную систему окрестностей нуля, то кольцо $\mathbb{Q}_p$ превратится в топологическое кольцо, и можно будет образовать пополнение $\mathbb{Q}_p^*$ кольца $\mathbb{Q}_p$ в этой топологии.

Элементы кольца $\mathbb{Q}_p^*$ могут быть представлены в следующем виде. Пусть $\{t_0, t_1, \ldots, t_{p-1}\}$ — полная система представителей смежных классов кольца $\mathbb{Q}_p$ по идеалу $\mathbb{Q}_p^*$. Например, подходит система $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Тогда $\{p^k t_0, \ldots, p^k t_{p-1}\}$ — полная система представителей смежных классов идеала $p^k\mathbb{Q}_p$ по идеалу $p^{k+1}\mathbb{Q}_p$. Пусть $\pi \in \mathbb{Q}_p^*$, $a_n \in \mathbb{Q}_p$ — последовательность, сходящаяся к π. В силу определения последовательности Коши почти все элементы последовательности (a_n) принадлежат одному смежному классу по идеалу $p\mathbb{Q}_p$, например, смежному классу с представителем s_0. Почти все разности $a_n - s_0$, принадлежащие $p\mathbb{Q}_p$, лежат в одном смежном классе кольца $p\mathbb{Q}_p$ по идеалу $p^2\mathbb{Q}_p$, например, в смежном классе с представителем ps_1. Продолжая так же дальше, получим, что π однозначно определяет последовательность $s_0, ps_1, p^2s_2, \ldots$. Поставим элементу π в соответствие формальный ряд $s_0 + ps_1 + p^2s_2 + \ldots$. Частичные суммы этого ряда

$$b_n = s_0 + s_1p + s_2p^2 + \cdots + s_np^n$$

Образуют в $\mathbb{Q}_p$ последовательность Коши, которая сходится в $\mathbb{Q}_p^*$ к π, так как $\pi - b_n \in p^k\mathbb{Q}_p^*$, $n \geqslant k$. Ясно, что различным элементам из $\mathbb{Q}_p^*$ сопоставляются различные ряды. А так как каждый ряд с коэффициентами из фиксированной системы представителей определяет элемент из $\mathbb{Q}_p^*$, то мы можем отождествить элементы кольца $\mathbb{Q}_p^*$ с рядами вида

$$\pi = s_0 + ps_1 + p^2s_2 + \ldots \quad (s_i \in \{0, \ldots, p-1\}).$$

Получающееся так кольцо является коммутативной областью целостности и называется *кольцом целых p-адических чисел* $\mathbb{Q}_p^*$.

Упражнение 7.5. Как устроены сложение, вычитание, умножение в кольце $\mathbb{Q}_p^*$? Какие элементы этого кольца обратимы?

Аддитивную группу кольца $\mathbb{Q}_p^*$ будем обозначать через $\mathbb{Z}(p)$.

Всякую p-группу можно естественным образом превратить в $\mathbb{Q}_p^*$-модуль: если $\pi = s_0 + ps_1 + p^2s_2 + \cdots + p^ns_n + \ldots$, а элемент $a \in A$ имеет порядок p^n, то

$$\pi a = (s_0 + ps_1 + \cdots + p^{n-1}s_{n-1})a,$$

где элемент в правой части равенства не изменится, если мы возьмем сумму большего числа членов ряда.

Модули над кольцом $\mathbb{Q}_p^+$ называются также *p-адическими модулями.*

Понятие базисной подгруппы может быть довольно очевидным образом распространено на p-адические модули. Так как все p-адические модули q-делимы для всех $q \neq p$, то только p-базисные подмодули могут дать что-то нетривиальное. В p-адическом модуле A базисный подмодуль B задается точно так же, как выше базисная подгруппа, только условие 1) заменяется на

1′) B есть сумма циклических p-адических модулей,

т. е. B имеет компоненты $\mathbb{Z}_{p^k}$ или $\mathbb{Z}(p)$.

Из доказанных выше результатов непосредственно выводится

Теорема 7.1. *Всякий p-адический модуль содержит базисные подмодули, которые все изоморфны между собой.*

Упражнение 7.6. Докажите теорему 7.1.

7.3 Прямые и обратные пределы

Пусть A_i — система групп, занумерованных индексами $i \in I$, где частично упорядоченное множество I является направленным в том смысле, что для любых $i, j \in I$ существует такое $k \in I$, что $i \leqslant k$ и $j \leqslant k$. Предположим, что для каждой пары индексов i, j со свойством $i \leqslant j$ задан гомоморфизм

$$\pi_i^j : A_i \to A_j,$$

причем выполнены условия:

1) π_i^i всегда является тождественным отображением группы A_i;

2) если $i \leqslant j \leqslant k$, то
$$\pi_j^k \pi_i^j = \pi_i^k.$$

В этом случае система $\{A_i, \pi_i^j\}$ называется *прямым спектром.*

Составим прямую сумму $A = \oplus_{i \in I} A_I$ из соответствующего прямого спектра и рассмотрим в ней подгруппу B, порожденную всеми элементами из A вида

$$a_i - \pi_i^j a_i \quad (i \leqslant j).$$

Прямым (или *инъективным*) *пределом* прямого спектра A называется факторгруппа A/B:
$$\lim_{\longrightarrow} A_i = A/B = A_*.$$

Элементарные свойства прямых пределов (без доказательства):

а) Подгруппа B состоит из всех элементов

$$a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \quad (a_i \in A_i),$$

для которых в множестве I существует такое $i \geqslant i_1, \ldots, i_k$, что

$$\pi_{i_1}^i a_{i_1} + \cdots + \pi_{i_k}^i a_{i_k} = 0.$$

б) Существуют такие гомоморфизмы

$$\pi_i : A_i \to A_*,$$

что для всех $i \leqslant j$ верно $\pi_i = \pi_j \pi_i^j$. На самом деле этому условию удовлетворяют гомоморфизмы $\pi_i : a_i \mapsto a_i + B$. Такие гомоморфизмы мы будем называть каноническими.

в) Каждый элемент $a_* \in A_*$ представим в виде $a_* = a_i + B$ для некоторого $a_i \in A_i$.

г) Группы $\Im\pi_i$, $i \in I$ в совокупности покрывают A_*.

д) Если $\pi_i a_i = 0$ для некоторого $i \in I$, то в I существует такое $j \geqslant i$, что $\pi_i^j a_i = 0$.

е) Если каждый гомоморфизм π_i^j является монофорфизмом, то и все π_i — мономорфизмы. Если каждый гомоморфизм π_i^j является эпиморфизмом, то и все π_i — эпиморфизмы.

Упражнение 7.7. Докажите утверждения а)–е).

Теорема 7.2 (Универсальное свойство прямого предела). *Если A_* — предел прямого спектра A_i, G — группа, и даны гомоморфизмы $\sigma_i : A_i \to G$, для которых при $i \leqslant j$ выполнено $\sigma_j = \pi_i^j \sigma_i$, то существует один и только один гомоморфизм $\sigma : A_* \to G$ такой, что $\sigma_i = \sigma\pi_i$ для всех $i \in I$.*

Группа A_* вместе с гомоморфизмами π_i определяется этими свойствами однозначно с точностью до автоморфизма.

Доказательство. Если элемент a_* представляется в виде $a_* = a_i + B$, то положим $\sigma a_* = \sigma_i a_i$. Мы видим, что образ элемента a_i не зависит от выбора $i \in I$, поэтому таким способом мы определим отображение из A_* в G. Очевидно, σ сохраняет операцию сложения, поэтому это гомоморфизм. Кроме того, $\sigma\pi_i a_i = \sigma a_* = \sigma_i a_i$, то есть выполняется нужное нам равенство. Если $\sigma' : A_* \to G$ тоже дает нам все равенства из условия, то $(\sigma - \sigma')\pi_i = 0$ для всех $i \in I$, т. е. $\sigma - \sigma'$ переводит любую подгруппу $\Im\pi_i$ в 0. По п. г) $\sigma - \sigma' 0$, и единственность гомоморфизма доказана.

Чтобы доказать последнее утверждение теоремы, предположим, что группа A_0 и гомоморфизмы $\tau_i : A_i \to A_0$ удовлетворяют тому же свойству, что и A_* и π_i. По доказанному мы имеем такой однозначно определенным гомоморфизм $\sigma : A_* \to A_0$, что $\tau_i = \sigma\pi_i$ для всех $i \in I$, а также имеем такой однозначно определенным гомоморфизм $\sigma_0 : A_0 \to A_*$, что $\pi_i = \sigma_0\tau_i$. Отсюда получаем, что $\pi_i = \sigma_0\sigma\pi_i$ для всех i, откуда $\sigma_0\sigma = E$. Поэтому σA_* служит для A_0 прямым слагаемым. Из единственности гомоморфизма $A_0 \to G$ для любой группы G вытекает, что $\sigma A_* = A_0$. Таким образом, σ — изоморфизм между A_* и A_0. □

Пример 7.1. Пусть A — произвольная группа, A_i — система всех ее конечно порожденных подгрупп, причем множество I частично упорядочено так, чтобы $i \leqslant j$ тогда и только тогда, когда A_i — подгруппа в A_j. Пусть $\pi_i^j : A_i \to A_j$ — естественное вложение. Тогда $A = \{A_i \mid i \in I\}$ является прямым спектром, а

$$\varinjlim A_i = A_* = A.$$

Пример 7.2. Пусть $\langle c_n \rangle$ — циклическая группа порядка p^n, рассмотрим гомоморфизм $\langle c_n \rangle \to \langle c_{n+1} \rangle$ такой, что $c_n \mapsto pc_{n+1}$. Ясно, что можно построить гомоморфизмы π_i^j для всех $i < j$ так, чтобы они были согласованы с введенным гомоморфизмом и правилами 1) и 2). Тогда прямой предел данного спектра — группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Упражнение 7.8. Докажите утверждения примеров.

Нам понадобятся в дальнейшем не прямые, а обратные пределы, поэтому введем следующие определения и свойства. Обратные пределы в некотором смысле двойственны прямым пределам.

Снова предположим, что A_i — система групп, занумерованных индексами $i \in I$, где I снова является направленным. Предположим, что для каждой пары индексов i, j со свойством $i \leqslant j$ задан гомоморфизм

$$\pi_i^j : A_j \to A_i,$$

причем выполнены условия:

1) π_i^i всегда является тождественным отображением группы A_i;

2) если $i \leqslant j \leqslant k$, то
$$\pi_i^j \pi_j^k = \pi_i^k.$$

В этом случае система $\{A_i, \pi_i^j\}$ называется *обратным спектром. Обратным или проективном пределом* данного спектра

$$\varprojlim A_i = A^*.$$

называется подмножество прямого произведения $A = \prod_{i \in I} A_i$, состоящее из всех веторов $(\dots, a_i, \dots)$, для которых
$$\pi_i^j a_j = a_i, \quad i \leqslant j.$$

A^* является подгруппой группы A.

Приведем простые свойства обратных пределов:

а) Существуют такие гомоморфизмы

$$\pi_i : A^* \to A_i,$$

что для всех $i \leqslant j$ верно $\pi_i = \pi_i^j \pi_j$. На самом деле этому условию удовлетворяют гомоморфизмы $\pi_i : a \mapsto a_i$.

б) Если каждый гомоморфизм π_i^j является монофорфизмом, то и все π_i — мономорфизмы.

Доказательство. Предположим, что π_i^j — мономорфизм, и пусть $\pi_i a = 0$ для некоторых $a \in A^*$ и $i \in I$. Если $j \in J$, то возьмем $k \in I$ такое, что $i, j \leqslant k$. Теперь $\pi_i^k \pi_k a = \pi_i a = 0$, поэтому $\pi_k a = 0$. Отсюда $\pi_j a = \pi_j^k \pi_k a = 0$ для каждого j, поэтому $a = 0$. □

в) Если все группы $\{A_i \mid i \in I\}$ в обратном спектре являются (хаусдорфовыми) топологическими группами, а все π_i^j — непрерывные гомоморфизмы, то обратный предел A^* есть замкнутая подгруппа группы $\prod_i A_i$ (если считать эту группу снабженной топологией произведения), а канонические гомоморфизмы π_i непрерывны.

Доказательство. Если элемент $a = (\dots, a_i, \dots) \in \prod_i A_i$ не лежит в обратном пределе A^*, то в множестве I существуют такие элементы $i < j$, что $a_i \neq \pi_i^j a_j$. В силу хаусдорфовости в группе A_i можно найти такие открытые непересекающиеся подмножества U, V, что $a_i \in U$, $\pi_i^j a_j \in V$. Теперь множество всех элементов $(\dots, b_i, \dots) \in \prod_i A_i$, где $b_i \in U$, $\pi_i^j b_i \in V$, является непустым открытым подмножеством в $A \setminus A^*$, содержащим a. □

Справедливо утверждение, двойственное теореме 7.2.

Теорема 7.3 (Универсальное свойство обратного предела). *Если A^* — обратный предел обратного спектра A_i, G — группа, и даны гомоморфизмы $\sigma_i : G \to A_i$, для которых при $i \leqslant j$ выполнено $\sigma_i = \pi_i^j \sigma_j$, то существует один и только один гомоморфизм $\sigma : G \to A^*$ такой, что $\sigma_i = \pi_i \sigma$ для всех $i \in I$.*

Группа A^* вместе с гомоморфизмами π_i определяется этими свойствами однозначно с точностью до автоморфизма.

Пример 7.3. Пусть $C_n = \langle c_n \rangle$ — циклические группы порядка p^n и пусть отображение $\pi_n^{n+1} : C_{n+1} \to C_n$ таково, что $\pi_n^{n+1}(c_{n+1}) = c_n$. Тогда ясно, что такое π_n^m, $m \geqslant n$. Теперь $\{C_n, n \in \mathbb{N}; \pi_n^m\}$ — обратный спектр, и

$$C^* \cong \mathbb{Z}(p).$$

Доказательство. Если π_n — каноническое отображение $C^* \to C_n$ и если $\sigma_n : \mathbb{Z}(p) \to C_n$ таково, что $\sigma_n(1) = c_n$ $(1 \in \mathbb{Z}(p))$, то существует такой однозначно определенный гомоморфизм $\sigma : \mathbb{Z}(p) \to C^*$, что $\pi_n \sigma = \sigma_n$. Так как никакой отличный от нуля элемент из $\mathbb{Z}(p)$ не может лежать во всех ядрах $\ker \sigma_n$, то $\ker \sigma = 0$. Если $c = (c_1', \dots, c_n', \dots) \in C^*$, где $c_n' = k_n c_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$, то в силу выбора гомоморфизма π_n^{n+1} имеем $k_{n+1} \equiv k_n \mod p^n$, существует такое целое p-адическое число τ, что $\tau \equiv k_n \mod p^n$ для каждого n. Таким образом, $\sigma_n \tau = c_n'$, и σ — эпиморфизм. □

Упражнение 7.9. Обратный предел групп без кручения всегда есть группа без кручения, но обратный предел периодических групп может быть группой без кручения.

8 Алгебраически компактные группы

8.1 Определения и критерии алгебраической компактности

Короткая точная последовательность

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

называется *сервантно точной*, если образ группы A в B — сервантная подгруппа.

Группа Y называется *сервантно инъективной*, если для всякой сервантно точной строки

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$$

и гомоморфизма $\varphi : A \to Y$ существует гомоморфизм $\psi : B \to Y$, замыкающий соответствующую коммутативную диаграмму.

Группа называется *алгебраически компактной*, если она выделяется прямым слагаемым из всякой группы, содержащей ее в качестве сервантной подгруппы. Ясно, что все делимые группы алгебраически компактны. Алгебраически компактны все делимые группы.

Получается, что прямое слагаемое алгебраически компактной группы алгебраически компактно. Группа алгебраически компактна тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть алгебраически компактна.

Приведем различные характеризации алгебраически компактных групп.

Теорема 8.1. *Следующие условия для группы A эквивалентны:*

1) Группа A сервантно инъективна.

2) Группа A алгебраически компактна.

3) Группа A — прямое слагаемое прямого произведения коциклических групп.

4) Группа A в алгебраическом смысле является прямым слагаемым группы, допускающей компактную (не обязательно линейную) топологию.

5) В группе A любая система уравнений, у которой любая конечная подсистема имеет решение, также имеет решение.

Доказательство. Доказательство будем вести по циклу.

Предположим сначала, что выполнено условие 1) и A — сервантная подгруппа группы G. Из наличия сервантно точной последовательности $0 \to A \to G \to G/A \to 0$ и из условия 1) мы получаем, что тождественное отображение $1_A : A \to A$ можно продолжить до гомоморфизма $G \to A$. То есть A — прямое слагаемое в G, что доказывает 2).

Предположим теперь, что выполнено условие 2). По лемме 4.6 группу A можно вложить в качестве сервантной подгруппы в прямое произведение коциклических групп. Значит, из п. 2) вытекает 3).

Предположим, что выполнено 3). Так как прямое произведение компактных групп само компактно в топологии произведения и так как свойство быть прямым слагаемым транзитивно, то свойство 4) будет доказано, если мы покажем, что ими обладают коциклические группы. Но это очевидно, так как группа $\mathbb{Z}_{p^k}$ компактна в дискретной топологии, а группа $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — прямое слагаемое группы действительных чисел, взятых по модулю 1 (которая, в свое время, компактна).

Чтобы вывести 5) из 4), возьмем систему уравнений

$$\sum_{j \in J} n_{ij} x_j = a_i, \quad (i \in I, a_i \in A), \tag{10}$$

где n_{ij} — целые числа, которые при фиксированном $i \in I$ почти все равны нулю. Предположим, что всякая ее конечная подсистема имеет решение в группе A. По условию существует такая группа B, что группа $C = A \oplus B$ допускает компактную топологию. Систему уравнений (10) мы можем рассматривать как систему уравнений над группой C. Решение i-го уравнения системы (10) можно рассматривать как элемент $(\dots, c_j, \dots)$ группы $C^J = \overline{C}$, где элементы $x_j = c_j$, $j \in J$ удовлетворяют i-му уравнению. Таким образом, множество всех решений i-го уравнения является подмножеством X_j компактного пространства $\overline{C}$. Кроме того, подмножество X_j замкнуто, так как оно определяется уравнением. Предположение, что всякая конечная подсистема системы (10) разрешима, дает то, что всякое конечное подмножество множества X имеет непустое пересечение. В силу компактности пространства $\overline{C}$ все множества X_i имеют непустое пересечение, поэтому система уравнений (10) имеет решение в C. Компоненты этого решения в прямом слагаемом A группы‘C дают решение в A.

Наконец, предположим, что выполнено условие 5). Пусть $0 \to B \to C \to C/B \to 0$ — сервантно точная последовательность и $\eta : B \to A$ — гомоморфизм. Пусть c_j, $j \in J$, —- система образующих группы C по модулю B и

$$\sum_{j \in J} n_{ij} c_j = b_i \quad (i \in I)$$

— все соотношения между элементами c_j и элементами группы B. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j\in J} n_{ij}x_j = \eta b_j \quad (\in A). \tag{11}$$

Конечная подсистема системы (11) содержит всегда лишь конечное число неизвестных $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$. В силу сервантности подгруппа B выделяется прямым слагаемым в подгруппе $B' = \langle B, c_{j_1}, \dots, c_{j_k}\rangle$, т. е. $B' = B \oplus C'$ (см. теорему 5.4) и образы компонент в B элементов $c_{j_1}, \dots, c_{j_k}$ при гомоморфизме η дают решение в группе A. Следовательно, система 11 удовлетворяет предположениям п. 5). Мы заключаем, что в системе (11) существует решение всей системы $x_i = a_i$. Соответствие $c_j \mapsto a_j$ продолжает гомоморфизм η на группу C. Следовательно, выполнено условие 1). □

Для редуцированной группы A условие 3) может быть усилено.

Следствие 8.1. *Редуцированная алгебраически компактная группа является прямым слагаемым прямого произведения циклических p-групп.*

Доказательство. Если A — редуцированная алгебраически компактная группа, то для некоторой группы B имеем $A \oplus B = C = C_1 \oplus C_2$, где C_1 — прямое произведение циклических групп $\mathbb{Z}_{p^k}$, а C_2 — прямое произведение квазициклических групп. Очевидно, C_2 является максимальной делимой подгруппой группы C. Так как это означает, что C_2 — вполне характеристическая подгруппа, откуда $C_2 = (A \cap C_2) \oplus (B \cap C_2)$. Первое слагаемое здесь должно быть нулевым, поэтому $C_2 \subseteq B$, откуда $A \oplus (B/C_2) \cong C_1$. □

Следствие 8.2. *Прямое произведение групп алгебраически компактно тогда и только тогда, когда каждая его компонента алгебраически компактна.*

Следствие 8.3. *Всякую группу можно вложить в качестве сервантной подгруппы в алгебраически компактную группу.*

Предложение 8.1 (Сансяда). *Группа A алгебраически компактна тогда и только тогда, когда она служит прямым слагаемым для всякой такой группы G, что A сервантна в G, а G/A изоморфна $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.*

Доказательство. Надо проверить только достаточность условия. Предположим, что группа A обладает указанным свойством. Тогда группа A должна выделяться прямым слагаемым из любой группы G такой, что A — сервантная в G и G/A делима (см. леммы 4.1 и теорему о строении делимых групп).

Рассмотрим теперь случай, когда A — сервантная подгруппа в G и G/A — периодическая группа. Если B/A — базисная подгруппа группы G/A, то из теоремы 5.3 имеем $B = A \oplus B'$ для некоторой подгруппы $B' \subseteq B$. Теперь $G/B \cong (G/A)/(B/A)$ — делимая группа, поэтому G/B' содержит $B/B' \cong A$ в качестве сервантной подгруппы, фактор по которой делим. Следовательно, $G/B' = B/B' \oplus G'/B'$ для некоторой подгруппы $G' \subseteq G$. Так как $G = B+G' = A+B'+G' = A+G'$ и $A\cap G' = (A\cap B)\cap G' = A\cap(B\cap G') = A\cap B' = 0$, то $G = A \oplus G'$.

Пусть теперь A — сервантная подгруппа в G и G/A — группа без кручения. Тогда по предложению 4.3 существует такая группа $H \subseteq G$, что H/A — делимая группа без кручения. По первой части доказательства этого предложения тогда A служит прямым слагаемым для H, а значит, и для G.

Наконец, если G/A — произвольная группа, а T/A — ее периодическая часть, то A служит прямым слагаемым для T, т. е. $T = A \oplus T'$, а так как $T/T' \cong A$ — прямое слагаемое группы G/T', то $G = A \oplus G'$ для некоторой $G' \subseteq G$. □

Упражнение 8.1. Если группа A алгебраически компактна и B — ее сервантная подгруппа, то группа A/B алгебраически компактна.

Упражнение 8.2. Докажите, что группа A алгебраически компактна, если она сервантно инъективна относительно класса точных последовательностей

$$0 \to B \to C \to D \to 0,$$

где D — счетная группа.

Упражнение 8.3. Групп A не обязана быть алгебраически компактной, если ее подгруппа C и факторгруппа A/C алгебраически компактны.

8.2 Полные группы и некоторые их свойства

Определение 8.1. *Ульмовской подгруппой* группы A называется подгруппа

$$U(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} nA.$$

Факторгруппа $A/U(A)$ называется *первым ульмовским фактором* группы A.

Лемма 8.1. *Группа $A' = A/U(A)$ хаусдорфова в своей $\mathbb{Z}$-адической топологии.*

Доказательство. Хаусдорфовость группы в $\mathbb{Z}$-адической топологии равносильна условию $\cap_n nA' = 0$. Если это не так, то $a + U(A)$ делится на любое натуральное n в A', т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$

$$a + U(A) = n(b + U(A)) = nb + U(A),$$

иначе говоря,

$$a = nb + u, u \in U(A).$$

Так как u делится на n, то a делится на n, откуда $a \in U(A)$. □

Теперь мы рассмотрим группы, полные в их $\mathbb{Z}$-адической и p-адической топологии. Окажется, что это вовсе не новый класс групп: алгебраически компактные группы, и только они, являются полными в этих топологиях.

Теорема 8.2. *Группа полна в $\mathbb{Z}$-адической топологии тогда и только тогда, когда она редуцированная алгебраически компактная группа.*

Доказательство. Предположим сначала, что A — редуцированная алгебраически компактная группа. Из следствия 8.1 мы знаем, что она служит прямым слагаемым прямого произведения циклических групп $\mathbb{Z}_{p^k}$. Так как каждая группа $\mathbb{Z}_{p^k}$ полна в своей $\mathbb{Z}$-адической топологии, то применение следствия 7.1 показывает, что группа A полна в своей $\mathbb{Z}$-адической топологии.

Предположим теперь, что группа A полна в своей $\mathbb{Z}$-адической топологии. Тогда группа A хаусдорфова и, следовательно, редуцирована. Пусть группа G содержит A в качестве сервантной подгруппы, причем G/A — делимая группа. Для завершения доказательства нам надо только показать, что A служит для G прямым слагаемым. Если группа G хаусдорфова в своей $\mathbb{Z}$-адической топологии, то в силу плотности A в G каждый элемент g группы G является пределом последовательности некоторых элементов группы A. Ясно, что эта последовательность является последовательностью Коши в группе A, откуда $g \in A$ и $G = A$.

Если группа G не хаусдорфова, то группа $G' = G/U(G)$ хаусдорфова и содержит $(A + U(G))/U(G) \cong A$ в качестве сервантной подгруппы (заметим, что $A \cap U(G) = 0$). Из того, что уже было показано, вытекает $A + U(G) = G$, т. е. $G = A \oplus U(G)$. □

Замечание 1. Часть теоремы 8.2, касающуюся необходимости, можно немного усилить, заметив, что группа A полна в $\mathbb{Z}$-адической топологии, если она полна в некоторой (хаусдорфовой) топологии, более грубой, чем $\mathbb{Z}$-адическая топология.

В самом деле, пусть $a_1, \dots, a_n, \dots$ — последовательность Коши в $\mathbb{Z}$-адической топологии, где, как можно предполагать, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $a_n - a_{n+1} = n!g_n$ ($g_n \in A$). Положим

$$b_{nk} = g_n + (n+1)g_{n+1} + \dots + (n+1)\dots(n+k)g_{n+k},$$

Тогда последовательность $b_{n0}, \dots, b_{nk}, \dots$ будет снова последовательностью Коши в $\mathbb{Z}$-адической топологии, так как $n!|(n+1)\dots(n+k)$ и мы будем иметь $a_n = n!b_{nk} + a_{n+k+1}$ для любых n и k.

Всякая последовательность Коши в $\mathbb{Z}$-адической топологии является последовательностью Коши и в более грубой топологии, поэтому при $k \to \infty$ имеем $a_n = n!b_n + a$, где a и b_n — пределы, соответственно, последовательностей a_n и b_{nk}. Следовательно, $a - a_n \in n!A$ и элемент a служит пределом для последовательности a_n и в $\mathbb{Z}$-адической топологии.

Так как $\mathbb{Z}$-адическая топология группы A индуцирует на подгруппе B топологию, более грубую, чем $\mathbb{Z}$-адическая топология группы B, то из теоремы 8.2, предыдущего замечания, предложений 7.1 и 7.2, получаем

Следствие 8.4. *Если A — редуцированная алгебраически компактная группа, а B — такая ее подгруппа, что $U(A/B) = 0$, то B и A/B — редуцированные алгебраически компактные группы.*

Следствие 8.5. *Если θ — эндоморфизм полной группы A, то $\ker\theta$ и $\Im\theta$ — полные группы.*

Доказательство. Положим $B = \ker\theta$, применим теорему 8.4 и заметим, что $A/\ker\theta$ — полная группа в силу предложения 7.2. □

Предложение 8.2. *Обратный предел редуцированных алгебраически компактных групп является редуцированной алгебраически компактной группой. В частности, $\mathbb{Z}(p)$ — редуцированная алгебраически компактная группа.*

Доказательство. В силу п. в) параграфа об обратных пределах обратных предел является замнутой подгруппой произведения в топологии произведения, а значит, и в блочной топологии. В силу предположений и следствия 8.2 прямое произведение является редуцированной алгебраически компактной группой. Остается применить следствие 8.4. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о вложении группы A в ее $\mathbb{Z}$-адическое пополнение. Как мы уже видели в прошлой лекции, это делается или с помощью последовательностей Коши, или с помощью обратных пределов.

Теорема 8.3. *Для группы A группа*

$$\hat{A} = \lim_{\rightarrow} A/nA$$

является полной. Каноническое отображение $\mu : a \mapsto (\dots, a + nA, \dots) \in \hat{A}$ имеет ядро $U(A)$, μA — сервантная подгруппа группы $\hat{A}$, $\hat{A}/\mu A$ — делимая группа.

Доказательство. Так как группы A/nA — ограниченные, и, следовательно, алгебраически компактные, то первая часть теоремы вытекает из предложения 8.2. Очевидно, $ma = 0$ дает $a \in nA$ для любого n, откуда $\ker \mu = U(A)$. Если для элемента $\hat{a} = (\dots, a_n + nA, \dots)$ выполнено равенство $m\hat{a} = \mu a$ для $a \in A$, то $ma_n - a \in nA$ для любого n, в частности, для $n = m$, откуда $a \in mA$, что дает сервантность подгруппы μA в $\hat{A}$.

Чтобы доказать делимость группы $\hat{A}/\mu A$, достаточно показать, что индуцированная топология в группе $\hat{A}$ совпадает с $\mathbb{Z}$-адической топологией, так как тогда из плотности подгруппы μA в группе $\hat{A}$ сразу будет следовать делимость $\hat{A}/\mu A$.

Поскольку группы A/nA Ограниченные, а следовательно, дискретные, то окрестностями нуля в группе $\hat{A}$ служат группы $U_n = \pi_n^{-1}0$, где π_n — n-ая координатная проекция $\hat{A} \to A/nA$. Покажем, что $U_n = n\hat{A}$. Так как включение $n\hat{A} \subseteq U_n$ очевидно, предположим, что $\hat{a} \in U_n$, т. е. $a = (\dots, a_m + mA, \dots)$, где $a_n = 0$. Для любого m существует такой элемент $c_m \in A$, что $a_{(m+1)!n} - a_{m!n} = m!nc_m$. Положим $b_1 = 0$ и $b_{m+1} = b_m + m!c_m$ при $m > 1$. Тогда по индукции получится $a_{n!m} = nb_m$ для каждого $m \geqslant 1$ и $\hat{b} = (\dots, b_m + m!A, \dots) \in \hat{A}$. Для этого элемента $\hat{b}$ выполнено равенство $n\hat{b} = \hat{a}$, откуда $U_n \subseteq n\hat{A}$. $\square$

Лемма 8.2. *Если C есть p-сервантная подгруппа группы A, то группа A/C является p-делимой тогда и только тогда, когда некоторая (более того, любая) p-базисная подгруппа группы C служит p-базисной подгруппой для A.*

Доказательство. Если A/C есть p-делимая группа, а группа B является базисной для C, то непосредственно проверяется, что B есть p-базисная подгруппа для A.

Обратно, если C содержит p-базисную подгруппу B группы A, то A/C — эпиморфный образ p-делимой группы A/B. $\square$

Лемма 8.3. *Пусть $A_0 = A/U(A)$ — первый ульмовский фактор группы A. Тогда если B есть p-базисная подгруппа группы A, то ее образ B_0 при естественном эпиморфизме $\varphi : A \to A_0$ является p-базисной подгруппой группы A_0, причем φ индуцирует изоморфизм между B и B_0.*

Доказательство. Так как элементы из $U(A)$ делятся на любую степень числа p, то $B \cap U(A) = 0$. Поэтому $\varphi|_B$ — изоморфизм B и ее образа B_0. В частности, B_0 — прямая сумма циклических групп бесконечных порядков и порядков, равных степеням p. Если $\{a_i\}_{i\in I}$ — базис группы B, то $\{\varphi(a_i)\}_{i\in I}$ — базис группы B_0, который должен быть p-независимым в группе A_0, так как если

$$n_1\varphi(a_{i_1}) + \cdots + n_k\varphi(a_{i_k}) \in p^r A_0, \quad n_i\varphi(a_i) \neq 0,$$

то

$$n_1 a_{i_1} + \cdots + n_k a_{i_k} \in p^r A,$$

откуда $p^r | n_i$.

Поэтому B_0 есть p-сервантная подгруппа группы A_0 (см. лемму 6.1).

Наконец, фактор-группа A_0/B_0 является p-делимой группой, так как она изоморфна

$$(A/U(A))/((B + U(A))/U(A)) \cong A/(B + U(A)),$$

а эта группа — эпиморфный образ группы A/B. □

Следствие 8.6. *p-базисная подгруппа группы A для любого простого числа p при каноническом отображении μ изоморфно отображается на p-базисную подгруппу группы $\hat{A}$.*

Доказательство. Так как $\ker\mu = U(A)$, то из леммы 8.3 следует, что μ дает изоморфное отображение p-базисной подгруппы группы A на p-базисную подгруппу группы μA. Так как $\hat{A}/\mu A$ — делимая группа, а μA — сервантная подгруппа группы $\hat{B}$, то остается применить лемму 8.2. □

Упражнение 8.4. Пусть $m > 0$ — целое число. Докажите, что группа A является полной тогда и только тогда, когда mA — полная группа.

Упражнение 8.5. Опишите $\mathbb{Z}$-адические пополнения следующих групп:

$$\mathbb{Z},\ \mathbb{Q}^{(p)},\ \bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathbb{Z}_{p^n},\ \bigoplus_{p}\mathbb{Z}_p.$$

Упражнение 8.6. Обратный предел нередуцированных алгебраически компактных групп не обязан быть алгебраически компактной группой.

8.3 Строение алгебраически компактных групп

Мы наконец подошли к структурной теореме для алгебраически компактных групп. Как мы уже упоминали выше, можно ограничиться только редуцированными алгебраически компактными группами. Дальнейшее упрощение возможно ввиду следующего предложения.

Предложение 8.3. *Редуцированная группа A алгебраически компактна тогда и только, когда она имеет вид*

$$\prod_p A_p,$$

где каждая группа A_p полна в своей p-адической топологии. Группы A_p однозначно определяются группой A.

Доказательство. Предположим сначала, что группа A алгебраически компактна. Тогда рассмотрим $A \oplus B = C$, где C — прямое произведение циклических p-групп (см. следствие 8.1). Соберем слагаемые, относящиеся к одному и тому же p и образуем из них прямое произведение C_p. Это подгруппа группы C, причем очевидно, что $C = \prod C_p$. Подгруппы C_p являются вполне характеристическими в C поэтому по лемме 4.2 $C_p = A_p \oplus B_p$, где $A_p = A \cap C_p$, $B_p = B \cap C_p$. Таким образом, $C = \prod A_p \oplus \prod B_p$. Очевидно, подгруппы A_p при переменном p порождают в группе A подгруппу A_0, являющуюся их прямой суммой. Если рассматривать группу C как топологическую группу с $\mathbb{Z}$-адической топологией, то ясно, что замыкание в C подгруппы A_0 должно содержать $\prod A_p$, так как $\prod A_p/A_0$ — делимая группа. Так как $U(B) = 0$, то подгруппа A замкнута в C, откуда получаем включение $\prod A_p \subseteq A$. Аналогично получаем, что $\prod B_p \subseteq B$. Следовательно, $A = \prod A_p$, $B = \prod B_p$. Как прямое слагаемое полной группы группа A_p должна быть полной в своей $\mathbb{Z}$-адической топологии, которая здесь совпадает с p-адической топологией, так как $\mathbb{Z}$-адическая и p-адическая топологии на группе $\mathbb{Z}_{p^k}$ совпадают.

Обратно, пусть A_p — группа, полная в своей p-адической топологии. Тогда группу A_p можно следующим естественным образом превратить в модуль над кольцом $\mathbb{Q}_p^*$ целых p-адических чисел. Пусть $a \in A_p$ и $\pi = s_0 + s_1 p + s_2 p^2 + \cdots + s_n p^n + \cdots \in \mathbb{Q}_p^*$. Последовательность

$$s_0 a, (s_0 + s_1 p)a, \ldots, (s_0 + s_1 p + \cdots + s_n p^n)a, \ldots$$

является последовательностью Коши в группе A_p, откуда она в этой группе имеет предел, и этот предел мы будем считать значением πa. Понятно, что $qA_p = A_p$ для всех простых $q \neq p$, поэтому p-адическая и $\mathbb{Z}$-адическая топология на A_p совпадают. По теореме 8.2 группа A_p алгебраически компактна, а по следствию 8.2 прямое произведение A групп A_p алгебраически компактно.

Наконец, единственность компонент A_p в разложении сразу следует из

$$A_p = \bigcap_{q \neq p} q^n A, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Это — следствие соотношений $qA_p = A_p$ при $q \neq p$ и $\cap_n p^n A_p = 0$. □

Группа A_p из предыдущей теоремы называется p-адической компонентой группы A. Это p-адическая алгебраически компактная группа в том смысле, что она полна в своей p-адической топологии. Как показывает предыдущее доказательство, эта группа должна быть p-адическим модулем. Он может быть полностью охарактеризован с помощью базисных подгрупп.

Предложение 8.4. *Пусть группа A не содержит ненулевых делимых p-подгрупп, B — p-базисная подгруппа группы A. Если χ, η — эндоморфизмы группы A, индуцирующие одно и то же отображение на B, то эти эндоморфизмы совпадают.*

Доказательство. Ядро эндоморфизма $\chi - \eta$ содержит B, поэтому $Im(\chi - \eta)$ — эпиморфный образ группы A/B. Следовательно, $Im(\chi - \eta)$ — делимая подгруппа группы A, то есть 0. □

Теорема 8.4. *Существует взаимно-однозначное соответствие группами A_p (полными p-адическими модулями) и прямыми суммами B_p циклических p-адических модулей; если дана группа A_p, то мы ставим ей в соответствие ее базисный подмодуль; заданной группе B_p мы ставим в соответствие ее p-адическое пополнение.*

Доказательство. Из теоремы 7.1 сразу следует, что соответствие $A_p \mapsto B_p$, где A_p — p-адический модуль, B_p — его базисный подмодуль, является однозначным. С другой стороны, пополнение $\hat{B}$ прямой суммы B циклических p-адических модулей в p-адической топологии существует и определено с точностью до изоморфизма. Группа $\hat{B}$ алгебраически компактна (см. теорему 8.2). Если отождествить группу B с ее образом в $\hat{B}$ при естественном изоморфизме, то достаточно просто сослаться на следствие 8.6, чтобы получить, что B — базисная подгруппа группы $\hat{B}$. Отсюда мы заключаем, что если последовательно применить соответствия $A_p \mapsto B_p$, а далее $B_p \mapsto A_p$, то мы получим исходную прямую сумму циклических p-адических модулей.

Нам осталось проверить что две алгебраически компактные группы A_p и A'_p с изоморфными базисными подгруппами B_p изоморфны между собой. Рассмотрим сервантно точную строку

$$0 \to B_p \to A_p \to A_p/B_p \to 0$$

и вложение $\rho : B_p \to A'_p$. Это вложение продолжается до гомоморфизма $\varphi : A_p \to A'_p$. Аналогично получаем гомоморфизм $\psi : A'_p \to A_p$, продолжающий вложение $B_p \to A_p$. Тогда получим, что $\psi\varphi : A_p \to A_p$ является гомоморфизмом, тождественным на B_p. Следовательно, по предложению 8.4 это тождественное отображение. Таким образом, $A_p \cong A'_p$. □

Ввиду приведенной выше теоремы p-адические алгебраически компактные группы A_p могут быть охарактеризованы теми же инвариантами, что и их базисные подмодули B_p, а именно, множеством инвариантов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, которые являются мощностями количества компонент в разложении базисного модуля в прямую сумму $\mathbb{Z}(p)$ и $\mathbb{Z}_{p^k}$. Эта счетная система кардинальных чисел является полной и независимой системой инвариантов группы A_p. Чтобы построить группу A_p, мы можем взять прямую сумму таких модулей, а далее — ее p-адическое пополнение.

Получается, что группа A_p изоморфна p-адическому пополнению группы

$$\left(\bigoplus_{\alpha_0} \mathbb{Z}(p)\right) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \left(\bigoplus_{\alpha_k} \mathbb{Z}_{p^k}\right).$$

Таким образом, любая алгебраически компактная группа A есть

$$A = \prod_{p\text{ — простое}} A_p \oplus A_d,$$

где A_d — делимая группа, имеющая вид

$$A_d = \left(\bigoplus_{\gamma_0} \mathbb{Q}\right) \oplus \bigoplus_{p \text{ — простое}} \left(\bigoplus_{\gamma_p} \mathbb{Z}_{p^\infty}\right),$$

а каждая из групп A_p изоморфна p-адическому пополнению группы

$$\left(\bigoplus_{\beta_p} \mathbb{Z}(p)\right) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \left(\bigoplus_{\alpha_{p,k}} \mathbb{Z}_{p^k}\right).$$

Будем далее считать, что рассматриваемая нами алгебраически компактная группа имеет именно такие инварианты.

Упражнение 8.7. Определите инварианты следующей алгебраически компактной группы:

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^k}\right)^{\mu} \oplus \mathbb{Z}(p)^{\nu},$$

где μ, ν — бесконечные кардиналы.

Упражнение 8.8. Если A и A' — алгебраически компактные группы, каждая из которых изоморфна сервантной подгрупп другой, то $A \cong A'$.

9 Строение $\varkappa$-насыщенных групп и доказательство основной теоремы

9.1 Строение $\varkappa$-насыщенных групп

Лемма 9.1. *Если $\varkappa$ — несчетный кардинал, группа A $\varkappa$-насыщенна, то эта группа алгебраически компактна.*

Доказательство. Действительно, пусть имеется любая счетная система уравнений $U_1, U_2, \dots$ с константами из A и переменными $x_1, \dots, x_n, \dots$, и пусть каждая ее конечная подсистема решается A.

Рассмотрим набор формул $\varphi_k(x_1)$ от одной переменной, где $\varphi_k(x_1)$ утверждает, что существуют $x_2, \dots, x_n$ такие, что все уравнения $U_1, U_2, \dots, U_k$ выполняются на последовательности $x_1, \dots, x_n$ (где все переменные уравнений $U_1, \dots, U_k$ содержатся среди $x_1, \dots, x_n$).

По предположению каждое конечное подмножество формул $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}$ выполняется в группе A на некотором элементе x_0. Значит, множество всех формул совместно и является типом. Таким образом, благодаря насыщенности группы A, все формулы выполняются на некотором элементе x_0. Значит, группа A алгебраически компактна. □

Благодаря структурной теореме об алгебраически компактных группах мы теперь будем считать, что наша группа A задается набором инвариантов из предыдущего пункта:

$$A \longleftrightarrow \{\gamma_0; \gamma_p \mid p \text{ простое }; \beta_p \mid p \text{ простое }; \alpha_{p,k} \mid p \text{ простое }, k \in \mathbb{N}\}.$$

Лемма 9.2. *Пусть группа A является алгебраически компактной и имеет инварианты, описанные выше. Тогда*

а) $\alpha_{p,n} = \dim(p^{n-1}B_p[p]/p^n B_p[p]) = \dim(p^{n-1}A_p[p]/p^n A_p[p]) = \dim(p^{n-1}A[p]/p^n A[p])$.

б) *Если A $\varkappa$-насыщенна и $\alpha_{p,n}$ бесконечно, то $\alpha_{p,n} \geqslant \varkappa$.*

Доказательство. а) Первое равенство очевидно, так как все слагаемые порядка, меньшего p^n, обнуляются при умножении на p^{n-1}; все слагаемые порядка, большего p^n, также дают нулевой вклад; слагаемые порядка p^n дают полный вклад.

Аналогично понятно второе равенство.

Докажем третье.

Обозначим инвариант Ульма $\dim(p^{n-1}A[p]/p^n A[p])$ через $f(p,n,A)$. Нам нужно доказать, что $f(p,n,A) = f(p,n,A_p)$ для всех натуральных n. Для начала заметим, что если $A = A_r \oplus A_d$, где A_r — редуцированна, а A_d делима, то $f(p,n,A) = f(p,n,A_r)$, так как $p^k A_d = A_d$. Теперь $A_r = \prod_q A_q$ и $f(p,n,A_r) = f(p,n,\prod_q A_q) = \sum_q f(p,n,A_q) = f(p,n,A_p)$, так как $p^k A_q = A_q$ при $q \neq p$ для всех k.

б) Пусть $\{x_\nu \mid \nu < \varkappa\}$ — множество, состоящее из $\varkappa$ свободных переменных, и пусть $\mathcal{F}$ — множество всех формул

$$\exists(p^{n-1}y = x_\nu) \wedge px_\nu = 0$$

для всех $\nu < varkappa$ плюс все формулы вида

$$\forall y(p^n y \neq \sum_{i=1}^{k} m_i x_{\nu_i}),$$

где $k \geqslant 1$, $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k$ и $(m_1, \ldots, m_k) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^k \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.

$\mathcal{F}$ очевидно является конечно выполнимым, так как размерность $\dim(p^{n-1}A[p]/p^n A[p])$ бесконечна. Таким образом, так как группа A насыщенна, то множество $\mathcal{F}$ выполнимо в A, что означает $\dim(p^{n-1}A[p]/p^n A[p]) \geqslant \varkappa$.

□

Теперь обратим наше внимание на числа β_p, которые отвечают за число копий групп p-адических чисел в разложении группы B_p. Покажем, что

$$\beta_p = \dim(B_p/(T \cap B_p) + pB_p) = \dim(A_p/(T \cap A_p) + pA_p),$$

где T — группа кручения группы A.

Сначала рассмотрим первое равенство. Благодаря тому, что все $\mathbb{Z}_{p^k}$ лежат в группе кручения, можно считать, что мы имеем $B_p = \oplus_{\beta_p} \mathbb{Z}(p)$ — прямую сумму β_p экземпляров групп p-адических чисел. К ненулевым классам в рассматриваемом факторе относятся элементы, которые не делятся на p и имеют бесконечный порядок. Представителями таких классов являются ряды с ненулевым первым членом, факторизация происходит по рядам с нулевым первым членом, поэтому в результате получается ровно сумма β_p штук групп $\mathbb{Z}_p$.

Очевидно, что второе равенство приводит к тому же.

Каноническая проекция $\pi_p : A_r = \prod_q A_q \to A_p$ индуцирует изоморфизм

$$A_r/(T \cap A_r) + pA_r \to A_p/(T \cap A_p) + pA_p,$$

так как $pA_q = A_q$ для всех $p \neq q$. Более того, проекция $\pi_r A \to A_r$ индуцирует изоморфизм

$$A/T + pA \to A_r/(T \cap A_r) + pA_r,$$

так как $pA_d = A_d$. Таким образом,

$$\beta_p = \dim(A/T + pA).$$

Для любого $k \geqslant 1$ умножение на p определяет изоморфизм

$$p^{k-1}A/(p^{k-1}T + p^k A) \to p^k A/(p^k T + p^{k+1}A,$$

поэтому

$$\beta_p = \dim(p^k A/(p^k T + p^{k+1}A).$$

В общем случае нет причин ожидать, что данная размерность элементарно определима, но если $p^k T = p^{k+1}T$ для некоторого k, то

$$\dim(p^k A/(p^k T + p^{k+1}A) = \dim(p^k A/p^{k+1}A).$$

получается, что есть предложение первого порядка (или множество предложений), которое выражает, что данная размерность является фиксированным конечным кардиналом (или бесконечна).

Мы докажем, что в противоположном случае (т. е. когда для всех k $p^k T \neq p^{k+1}T$) для $\varkappa$-насыщенной группы A имеет место $\beta_p \geqslant \varkappa$.

Для начала мы изучим, что означает условие $p^k T \neq p^{k+1}T$.

Лемма 9.3. *Пусть A — группа и пусть T — подгруппа кручения в A. Для любого целого $k \geqslant 0$*

а) *$p^k T = p^{k+1}T$ тогда и только тогда, когда для любого $n \geqslant k$*

$$\dim(p^n T[p]/p^{n+1}T[p]) = 0.$$

б)

$$\dim(p^k A/p^{k+1}A) = \dim(p^{k+1}A/p^{k+2}A) + \dim(p^k A[p]/p^{k+1}A[p]).$$

в) *Если $p^k T = p^{k+1}T$, то*

$$\dim(p^k A/p^{k+1}A) = \dim(p^n A/p^{n+1}A)$$

для всех $n \geqslant k$.

г) *Если для всех целых $k \geqslant 0$ $p^k T \neq p^{k+1}T$, то $\dim(p^n A/p^{n+1}A)$ бесконечна для всех целых $n \geqslant 0$.*

Доказательство. а) Импликация слева направо очевидна. Чтобы доказать обратное, сначала запишем $T = \oplus_q T_q$, где T_q — q-примарная часть в T. Если $p^k T \neq p^{k+1}T$, то также $p^k T_p \neq p^{k+1}T_p$ (так как $pT_q = T_q$ при $q \neq p$). Выберем $x \in p^k T_p \setminus p^{k+1}T_p$ такой, что порядок этого x минимален, например, это p^n. Получаем

$$p^{n-1}x \in p^{k+n-1}T[p] \setminus p^{k+n}T[p];$$

действительно, если это не так, то $p^{n-1}x = p^{k+n}a$ для некоторого $a \in T$, откуда $p^{n-1}(x - p^{k+1}a) = 0$, противоречие с минимальностью порядка x.

б) Следующая последовательность точна:

$$0 \to p^k A[p]/p^{k+1}A[p] \to p^k A/p^{k+1}A \xrightarrow{f} p^{k+1}A/p^{k+2}A \to 0,$$

где f — умножение на p. Тогда утверждение очевидно.

Упражнение 9.1. Докажите точность данной последовательности.

в) Следует из б) и того факта, что $p^n A[p]/p^{n+1}A[p]$ изоморфно $p^n T[p]/p^{n+1}A[p]$ для всех n.

г) Можно доказать по индукции, используя б), что

$$\dim(p^n A/p^{n+1}A) \geqslant \sum_{j=n}^{m} \dim(p^j T[p]/p^{j+1}T[p])$$

для всех целых чисел $m \geqslant n$. Тогда г) непосредственно следует из а). □

Для любой группы A, так как $\dim(p^k A/p^{k+1}A)$ является монотонно убывающей функцией по k, мы можем определить

$$Tf(p, A) = \begin{cases} \text{окончательное значение } \dim(p^k A/p^{k+1}A), \text{ если оно конечно,} \\ \infty, \text{ в ином случае} \end{cases}.$$

Лемма 9.4. *Пусть A — алгебраически компактная группа и пусть T — подгруппа кручения в A. Пусть кардиналы β_p определены, как выше.*

а) *Для любого целого $k \geqslant 0$ $\beta_p = \dim(p^k A/(p^k T + p^{k+1}A))$.*

б) *Если $p^k T = p^{k+1}T$ для некоторого $k \geqslant 0$, то β_p равно финальной размерности $\dim(p^n A/p^{n+1}A)$.*

в) *Если $Tf(p, A)$ конечна, то $\beta_p = Tf(p, A)$.*

г) *Если A $\varkappa$-насыщена ($\varkappa \geqslant \omega$), то $\beta_p \geqslant \varkappa$.*

Доказательство. а) Было доказано выше.

б) Если $p^k T = p^{k+1}T$, то по а) $\beta_p = \dim(p^n A/p^{n+1}A)$ для всех $n \geqslant k$.

в) Если $Tf(p, A)$ конечно, то по лемме 9.3, г) существует k такое, что $p^k T = p^{k+1}T$, далее результат следует из б).

г) Пусть $\{x_\nu \mid \nu < \varkappa\}$ — множество из $\varkappa$ свободных переменных, и пусть $\mathcal{F}$ — множество формул вида

$$\forall y \left(n \left(\left(\sum_{i=1}^{t} m_i x_{\nu_i} \right) - py \right) \neq 0 \right),$$

где $n > 0$, $t > 0$, $\nu_1 < \cdots < \nu_t$, $(m_1, \ldots, m_t) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^t \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$.

Докажем, что множество $\mathcal{F}$ конечно выполнимо в A; для этого достаточно доказать, что для фиксированных n и t множество формул

$$\forall y \left(n \left(sum_{i=1}^{t} m_i x_i - py \right) \neq 0 \right)$$

выполнимо в A.

Предположим, что $n = p^k d$, $(d,p)=1$; выберем $a_1,\dots,a_t \in A$ такие, что $p^k a_1,\dots,p^k a_n$ представляют независимые элементы из $p^kA/p^{k+1}A$ (это возможно по предположению п.г)).

Так как

$$p^{k+1} \not| \sum_{i=1}^{t} nm_i a_i,$$

можно заключить, что $\mathcal{F}$ конечно выполнимо в A. Так как A $\varkappa$-насыщена, то $\mathcal{F}$ выполнима в A, что означает

$$\beta_p = \dim(A/(T+pA)) \geqslant \varkappa.$$

□

Теперь посмотрим на A_d, максимальную делимую подгруппу в A. Как мы помним, в наших предположениях

$$A_d = \oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\gamma_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\gamma_0)}.$$

Для начала рассмотрим число копий γ_p групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ в прямом разложении A_d. Ясно, что $\gamma_p = \dim A_d[p]$. Пусть снова $T = \oplus_q T_q$ — разложение группы кручения в сумму примарных компонент. Следовательно, для любого $k \geqslant 0$

$$p^kT = p^{k+1}T \Longleftrightarrow p^kT_p = p^{k+1}T_p \Longleftrightarrow p^kT_p \text{ делима.}$$

Значит, если $p^kT = p^{k+1}T$, то $\gamma_p = \dim(p^kT[p]) = \dim(p^kA[p])$. Если для всех $k \geqslant 0$ $p^kT \neq p^{k+1}T$ и группа A $\varkappa$-насыщенна, мы докажем, что $\gamma_p \geqslant \varkappa$. Для начала мы докажем предварительную лемму о значении условия $p^kT = p^{k+1}T$.

Лемма 9.5. *Пусть A — группа, T — подгруппа кручения в A. Для любого целого $k \geqslant 0$*

а) *Если $p^kT = p^{k+1}T$, то $\dim(p^kA[p]) = \dim(p^nA[p])$ для всех $n \geqslant k$.*

б)

$$\dim(p^kA[p]) = \dim(p^{k+1}A[p]) + \dim(p^kA[p]/p^{k+1}A[p]).$$

в) *Если для всех целых $k \geqslant 0$ $p^kT \neq p^{k+1}T$, то $\dim(p^nA[p])$ бесконечна для всех целых $n \geqslant 0$.*

Упражнение 9.2. Докажите лемму 9.5.

Так как размерность $\dim(p^kA[p])$ монотонно убывает по k, то имеет смысл определить

$$D(p,A) = \begin{cases} \text{финальное значение } \dim(p^kA[p]), \text{ если значение конечно,} \\ \infty, \text{ в ином случае.} \end{cases}$$

Лемма 9.6. *Пусть $A = \prod_q A_q \oplus A_d$ — алгебраически компактная группа, T — ее подгруппа кручения. Пусть числа γ_p определены, как выше. Тогда*

а) *Для любого целого $k \geqslant 0$ $\gamma_p = \dim(p^kA_d[p])$.*

б) *Если $p^kT = p^{k+1}T$ для некоторого $k \geqslant 0$, то γ_p равно финальному значению $\dim(p^nA[p])$.*

в) *Если $D(p,A)$ конечно, то $\gamma_p = D(p,A)$.*

г) *Если группа A $\varkappa$-насыщена и $D(p,A) = \infty$, то $\gamma_p \geqslant \varkappa$.*

Доказательство. а) Было доказано перед леммой 9.5.

б) Если $p^kT = p^{k+1}T$, то $p^nT \subseteq A_d$ для всех $n \geqslant k$, следовательно, $p^nA[p] = p^nT[p] = p^nA_d[p]$.

в) Если $D(p, A)$ конечно, то по лемме 9.5, в), $p^kT = p^{k+1}T$ для некоторого $k \geqslant 0$; далее результат следует из б).

г) Нам нужно доказать, что $\dim(A_d[p]) \geqslant \varkappa$. Так как группа A $\varkappa$-насыщенна, достаточно доказать, что множество формул

$$\mathcal{F} = \{px_\nu = 0 \mid \nu < \varkappa\} \cup \\ \cup \{\sum_{i=1}^{t} m_i x_{\nu_i} \neq 0 \mid t > 0; \nu_1 < \ldots \nu_t < \varkappa; (m_1, \ldots, m_t) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}^t \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \cup \\ \cup \{\exists y(p^r y = x_\nu) \mid \nu < \varkappa; 1 \leqslant r < \omega\}$$

конечно выполнимо в A. Однако это очевидно, так как мы предполагаем, что $\dim(p^kA[p])$ бесконечна для всех целых k. □

В качестве последнего шага в изучении структуры группы A мы рассмотрим число γ_0 — число копий группы $\mathbb{Q}$. Группа A наывается группой *ограниченного порядка*, если существует целое n такое, что $nA = 0$. Определим

$$Exp(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ имеет ограниченный порядок,} \\ \infty, & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Упражнение 9.3. Докажите, что конечномерное векторное пространство над бесконечным полем не может быть покрыто конечным числом собственных подпространств.

Лемма 9.7. *Пусть A — алгебраически компактная группа, γ_0 — такое, как выше.*

а) *Если $Exp(A) = 0$, то $\gamma_0 = 0$.*

б) *Если A $\varkappa$-насыщенна, $Exp(A) = \infty$, то $\gamma_0 \geqslant \varkappa$.*

Доказательство. а) Очевидно.

б) Нам нужно доказать, что имеется множество независимых элементов бесконечного порядка в A_d мощности $\varkappa$. Так как A $\varkappa$-насыщенна, достаточно доказать, что

$$\mathcal{F} = \{\exists y(ry = x_\nu) \mid 1 \leqslant r < \omega; \nu < \varkappa\} \cup \\ \cup \{\sum_{i=1}^{t} m_i x_{\nu_i} \neq 0 \mid t < \omega; \nu_1 < \ldots \nu_t < \varkappa; (m_1, \ldots, m_t) \neq (0, \ldots, 0)\}$$

конечно выполнимо в A. Чтобы доказать это, достаточно доказать, что для фиксированных r и t и любых $(m_1^{(j)}, \ldots, m_t^{(j)}) \neq (0, \ldots, 0)$, $j = 1, \ldots, k$, множество формул

$$\{\sum_{i=1}^{t} m_i^{(j)} x_i \neq 0 \mid j = 1, \ldots, k\} \cup \{\exists y(ry = x_i) \mid i = 1, \ldots, t\}$$

выполнимо в A.

Выберем $r_1, \ldots, r_t \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $\sum_{i=1}^{t} m_i^{(j)} r_i \neq 0$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Пусть

$$s = \prod_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{t} m_i^{(j)} r r_i,$$

выберем $a \in S$ такое, что $sa \neq 0$. Тогда, если $x_i = r r_i a$, то

$$\sum_{i=1}^{t} m_i^{(j)} x_i = \left(\sum_{i=1}^{t} m_i^{(j)} r r_i \right) a \neq 0$$

для всех $j = 1, \ldots, k$; так как r делит x_i, то доказательство завершено. □

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 9.1. *Пусть $\varkappa$ — несчетный кардинал, пусть A — $\varkappa$-насыщенная группа. Тогда A алгебраически компактна, т. е. она изоморфна группе описанного выше вида, где*

$$\begin{cases} \alpha_{p,n} & = U(p; n-1; A), \text{ если } U(p;n;A) \text{ конечно}, \\ \alpha_{p,n} & \geqslant \varkappa \text{ в ином случае.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_p & = Tf(p;A) \text{ если } Tf(p;A) \text{ конечно}, \\ \beta_p & \geqslant \varkappa \text{ в ином случае.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_p & = D(p;A) \text{ если } D(p;A) \text{ конечно}, \\ \gamma_p & \geqslant \varkappa \text{ в ином случае.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 & = 0 \text{ если } Exp(A) = 0, \\ \gamma_0 & \geqslant \varkappa \text{ в ином случае.} \end{cases}$$

Следствие 9.1. *Пусть A_1 и A_2 — насыщенные группы мощности $\varkappa \geqslant \omega$. Группы A_1 и A_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $Exp(A_1) = Exp(A_2)$, и для любых p, n $U(p;n;A_1) = U(p,n,A_2)$, $Tf(p;A_1) = Tf(p,A_2)$, $D(p;A_1) = D(p;A_2)$.*

9.2 Доказательство основной теоремы

Теорема 9.2. *Если группы A и B элементарно эквивалентны, то их элементарные инварианты совпадают.*

Доказательство. $U(p, n-1, A) \geqslant k$ тогда и только тогда, когда существуют $a_1, \ldots, a_k \in A$ такие, что $p^{n-1}a_1, \ldots, p^{n-1}a_k$ все имеют порядок p и независимы по модулю p^n. Иными словами, должно быть выполнено предложение

$$\exists x_1, \ldots x_l \left(\bigwedge_{i=1}^{k} (p^{n-1} | x_i \wedge p x_i = 0) \wedge \bigwedge_{(m_1,\ldots,m_k)\in S} \neg \left(p^n | \sum_{i=1}^{k} m_i x_i \right) \right),$$

где A — множество ненулевых k-последовательностей натуральных чисел таких, что $0 \geqslant m_i < p$.

Если A элементарно эквивалентно B, то ясно, что для каждого k

$$U(p, n-1; A) \geqslant k \Leftrightarrow U(p, n-1; B) \geqslant k.$$

Таким образом, $U(p, n-1; A) = U(p, n-1; B)$.

Остальные инварианты оставим читателям в качестве упражнения. □

Упражнение 9.4. Напишите оставшиеся формулы их теоремы 9.2.

Обратное к теореме 9.2 утверждение напрямую выводится из следствия 9.1, если считать, что любая группа элементарно эквивалентна насыщенной группе.

Нас будет интересовать доказательство, не использующее континуум-гипотезу. Для него понадобится еще некоторая хитрость.

Лемма 9.8. *Пусть A и B — алгебраически компактные группы, A — сервантная подгруппа в B. Для данного разложения группы A вида $A = \prod_p A_p \oplus A_d$ существует делимая группа C_d и для каждого простого p прямая сумма циклических $\mathbb{Z}(p)$-модулей C'_p такие, что*

$$B = \prod_p \overline{(A'_p \oplus C'_p)} \oplus (A_d \oplus C_d).$$

Доказательство. Так как группа A алгебраически компактна и сервантна в группе B, то она выделяется в B прямым слагаемым, дополнительно прямое слагаемое C также алгебраически компактно. Отсюда следует утверждение леммы. □

Группу A мы назовем *кажущейся $\varkappa$-насыщенной*, если она удовлетворяет условиям теоремы 9.1.

Упражнение 9.5. Существует ли группа, которая кажется $\varkappa$-насыщенной, но не является таковой?

Лемма 9.9. *Пусть A — сервантная подгруппа в B. Предположим, что A и B имеют одни и те же элементарные инварианты, и обе кажутся $\varkappa$-насыщенными, $\varkappa > \omega$. Пусть $S \subset A$ и $T \subset B$ — подмножества мощностей, меньших $\varkappa$. Тогда существует автоморфизм φ группы B такой, что*

1) для всех $a \in S$ $\varphi(a) = a$;

2) $\varphi(T) \subset A$.

Доказательство. По предыдущей лемме

$$B = \prod_p \overline{(A'_p \oplus C'_p)} \oplus (A_d \oplus C_d).$$

Из мощностных соображений существуют делимые группы E_d, E'_d, F_d, F'_d такие, что

(1) $E_d \oplus E'_d = A_d$, $F_d \oplus F'_d = C_d$, $E_p \oplus E'_p = A'_p$, $F_p \oplus F'_p = C'_p$.

(2) $|E_d| < \varkappa$, $|F_d| < \varkappa$, $|E_p| < \varkappa$, $|F_p| < \varkappa$.

(3) $S \subset \prod_p \overline{E}_p \oplus E_d$, $T \subset \prod_p \overline{(E_p \oplus F_p)} \oplus E_d \oplus F_d$.

Отсюда

$$B = \prod_p \overline{(E_p \oplus E'_p \oplus F_p \oplus F'_p)} \oplus E_d \oplus E'_d \oplus F_d \oplus F'_d.$$

Далее оставляем построение автоморфизма в качестве упражнения. □

Упражнение 9.6. Закончите доказательство леммы 9.9.

Теорема 9.3. *Пусть A — сервантная подгруппа в B, и пусть A и B имеют одни и те же элементарные инварианты. Тогда A является элементарной подгруппой в B.*

Доказательство. Элементарно расширяя группы A и B до ω_1-насыщенных групп A' и B', мы получим ситуацию, когда результат надо доказывать, считая, что $A' \subset B'$ и обе группы ω_1-насыщенны, A' — сервантная подгруппа в B' (см. упражнение 9.7). Таким образом, достаточно доказать результат для ω_1-насыщенных групп.

Ясно, что достаточно показать, что для данных $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $b \in B$ существует автоморфизм φ группы B такой, что $\varphi(a_1) = a_1, \ldots, \varphi(a_n) = a_n$ и $\varphi(b) \in A$. Но это является прямым следствием из леммы 9.9, с использованием того факта, что, по теореме 9.1, ω_1-насыщенная группа кажется ω_1-насыщенной. □

Упражнение 9.7. Докажите, что если подгруппа A сервантна в B, то их можно элементарно расширить до подгруппы A' в группе B' так, чтобы A' была сервантна в B'.

Теорема 9.4. *Если группы A и B имеют один и те же элементарные инварианты, то A элементарно эквивалентна B.*

Доказательство. Взяв ω_1-насыщенные расширения групп A и B, мы видим, что достаточно доказать результат только для ω_1-насыщенных групп A и B. Пусть A' получается из A взятием разложения для A из теоремы 9.1 и выкидыванием всего, кроме ω_1 копий любого слагаемого из A_p или A_d для тех копий, которые входят в разложение по крайней мере ω_1 раз.

Ясно, что A' является сервантной подгруппой в A с теми же элементарными инвариантами. По теореме 9.3 $A \prec A'$. Пусть B' получается из B тем же способом. Ясно, что $B' \prec B$ и, понятно, что $A' \cong B'$. Следовательно, $A \equiv B$. □

Список литературы

[1] Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups. — Fundamenta Mathematica. — 1955. — v. 41. — p. 203–271.

[2] Eklof P. C., Fischer E. R. The elementary theory of abelian groups. — Annals of Math logic. — 1972. — v. 4. — p. 115–171.

[3] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977. *Английский вариант*: Chang C.C. Keisler H.J. Model Theory, North-Holland, Amsterdam, London; American Elsevier, New York.

[4] Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы, том I. Изд-во Мир, Москва, 1974.