

ЛЕКЦИЯ 9. АВТОМОРФИЗМЫ И ЦЕНТРЫ ПРОСТЫХ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ.

Следующие задачи эквивалентны:

- (31) классификация некомпактных неприводимых полупростых симметрических алгебр Ли;
- (32) классификация компактных неприводимых полупростых симметрических алгебр Ли;
- (33) классификация некомпактных простых вещественных алгебр Ли;
- (34) классификация инволютивных автоморфизмов компактных простых вещественных алгебр Ли;
- (35) классификация инволютивных автоморфизмов простых комплексных алгебр Ли.

Задачи (31) и (32) эквивалентны в силу двойственности.

Эквивалентность (32) и (33) следует из существования инволюции Картана у любой некомпактной простой вещественной алгебры Ли и сопряженности максимальных компактных подалгебр.

Эквивалентность (32) и (34) имеет место по определению компактных неприводимых полупростых симметрических алгебр Ли.

Наконец, эквивалентность (34) и (35) устанавливается следующим предложением.

Предложение 1. Пусть G — связная простая комплексная группа Ли и $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Тогда

- 1) всякий инволютивный автоморфизм σ алгебры $\mathfrak{g}$ сохраняет некоторую ее компактную вещественную форму $\mathfrak{k}$;
- 2) если инволютивные автоморфизмы σ и σ' алгебры $\mathfrak{g}$, сохраняющие одну и ту же компактную вещественную форму $\mathfrak{k}$, сопряжены при помощи внутреннего автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$, то они сопряжены при помощи автоморфизма вида $\text{Ad}(k)$, $k \in K$, где $K \subset G$ — связная подгруппа Ли с касательной алгеброй $\mathfrak{k}$.

Доказательство. 1) Автоморфизм σ естественным образом действует в симметрическом пространстве X компактных вещественных форм алгебры $\mathfrak{g}$. Это действие нормализует действие группы G и, следовательно, сохраняет G -инвариантную риманову метрику. Поэтому σ имеет неподвижную точку в X , т.е. сохраняет некоторую компактную вещественную форму.

2) Пусть $\sigma' = \text{Ad}(g)\sigma(\text{Ad}(g))^{-1}$ для некоторого $g \in G$. В терминах группы движений пространства $X = G/K$ это означает, что $\sigma' = g\sigma g^{-1}$. Обозначим через o базисную точку пространства X (соответствующую самой подгруппе K). Тогда σ' сохраняет точки o и go и, значит, — все точки геодезической γ , соединяющей o и go . Следовательно, σ' коммутирует с параллельными сдвигами вдоль γ . Элемент g можно представить в виде произведения подходящего параллельного сдвига вдоль γ и какого-то элемента $k \in K$ (полярное разложение). Так как первый множитель этого разложения коммутирует с σ' , то $\sigma' = k\sigma k^{-1}$. В терминах автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ это означает, что $\sigma' = \text{Ad}(k)\sigma(\text{Ad}(k))^{-1}$, что и требовалось доказать. $\square$

Решение задач (34) и (35) разбивается на два случая в зависимости от того, является ли автоморфизм σ внутренним или внешним. Эрмитовы симметрические пространства относятся к первому случаю, так как для них $\sigma = \text{Ad}(\exp \pi z_0)$ (в обозначениях лекции 7).

Для решения этих задач необходима некоторая подготовка.

Пусть G — односвязная простая компактная группа Ли, $Z = Z(G)$ — ее центр и $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Фиксируем в группе G некоторый максимальный тор T . Известно, что всякий элемент группы G сопряжен элементу из T (в частности, $Z \subset T$) и что два элемента из T сопряжены в G тогда и только тогда, когда они переводятся друг в друга преобразованиями из группы Вейля W .

Положим $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$; тогда $\mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$ — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Пусть Δ — система корней алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ относительно этой картановской подалгебры. Заметим, что все корни принимают вещественные значения на $i\mathfrak{t}$. Мы будем рассматривать векторное пространство $i\mathfrak{t} = \mathbf{E}$ как евклидово пространство относительно формы Киллинга, а корни и веса алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ — как элементы сопряженного пространства $\mathbf{E}^*$.

Фиксируем систему простых корней

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Delta$$

алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Каждое ортогональное преобразование пространства $\mathbf{E}$, сохраняющее систему Π (или, что то же, каждая симметрия схемы простых корней), определяет автоморфизм алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, соответствующим образом переставляющий канонические образующие e_i, h_i, f_i ($i = 1, \dots, n$). Такие автоморфизмы называются *схемными*. Легко видеть, что всякий схемный автоморфизм перестановочен с комплексным сопряжением относительно $\mathfrak{g}$ (см. его явный вид в лекции 5) и, следовательно, сохраняет $\mathfrak{g}$.

Заметим, что группа $\text{Sym } \Pi$ схемных автоморфизмов нетривиальна только для простых алгебр Ли типов A_n ($n \geq 2$), D_n ($n \geq 4$) и E_6 , причем во всех случаях, кроме D_4 , она имеет порядок 2, а для D_4 — порядок 6. (Впрочем, это исключение не имеет существенного значения для нашей задачи, так как нас интересуют только автоморфизмы порядка 2.)

Из того, что группа Вейля W действует просто транзитивно на множестве своих камер (или, что эквивалентно, на множестве всех систем простых корней относительно тора T), следует, что ее нормализатор $N(W)$ в группе ортогональных преобразований пространства $\mathbf{E}$ имеет вид

$$N(W) = W \ltimes \text{Sym } \Pi. \quad (1)$$

Далее, из сопряженности максимальных торов в группе G следует, что в каждом смежном классе группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$ всех автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ по (нормальной) подгруппе $\text{Int } \mathfrak{g}$ внутренних автоморфизмов имеется ровно один схемный автоморфизм. Иными словами, имеет место разложение

$$\text{Aut } \mathfrak{g} = \text{Int } \mathfrak{g} \ltimes \text{Sym } \Pi. \quad (2)$$

Введем теперь следующие обозначения:

$Q \subset \mathbf{E}^*$ — решетка корней;

$P \subset \mathbf{E}^* \supset Q$ — решетка весов;

$Q^* = \{x \in \mathbf{E} : \alpha(x) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha \in Q\}$ — решетка, двойственная к Q ;

$P^* = \{x \in \mathbf{E} : \lambda(x) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \lambda \in P\} \subset Q^*$ — решетка, двойственная к P .

Имеется естественное невырожденное спаривание

$$P/Q \times Q^*/P^* \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

из которого следует изоморфизм

$$P/Q \simeq Q^*/P^*.$$

Каждому корню α сопоставляется *кокорень* (называемый также *дуальным корнем*) $\alpha^\vee \in P^*$, ортогональный гиперплоскости $\alpha = 0$ и нормированный таким образом, что $\alpha(\alpha^\vee) = 2$. (Если отождествить пространства $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}^*$ при помощи скалярного умножения, то можно сказать, что $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$.) Простые кокорни $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee$ составляют базис решетки P^* , дуальный базису решетки P , состоящему из фундаментальных весов. По этой причине решетка P^* называется *решеткой кокорней*.

Веса алгебры $\mathfrak{g}$ — это не что иное, как дифференциалы одномерных комплексных представлений (характеров) тора T . Таким образом, решетка весов может пониматься как группа характеров тора T . Корни алгебры $\mathfrak{g}$ как веса ее присоединенного представления порождают группу характеров образа тора T , т.е. тора T/Z . Тем самым определен естественный изоморфизм

$$Z \simeq P/Q. \quad (3)$$

Решетка кокорней P^* — это ядро экспоненциального отображения

$$\mathbf{E} \rightarrow T, \quad x \mapsto \exp 2\pi i x \quad (4)$$

В самом деле, при одномерном представлении тора T с весом λ элемент $\exp 2\pi i x$ переходит в число $e^{2\pi i \lambda(x)}$, равное 1 тогда и только тогда, когда $\lambda(x) \in \mathbb{Z}$, а выполнение этого условия для всех $\lambda \in P$ как раз и означает, что $x \in P^*$.

Расширенной группой Вейля $\widetilde{W}$ называется группа движений пространства $\mathbf{E}$, определяемая по формуле

$$\widetilde{W} = W \ltimes P^*, \quad (5)$$

где элементы группы P^* понимаются как параллельные переносы.

Теорема 1. *Группа $\widetilde{W}$ является дискретной группой отражений. Ее зеркала — это гиперплоскости, задаваемые уравнениями вида*

$$\alpha(x) = k, \quad \alpha \in \Delta, k \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

а одной из ее камер является симплекс

$$D = \{x \in \mathbf{E} : \alpha_i(x) \geq 0 \ (i = 1, \dots, n), \quad \delta(x) \leq 1\}, \quad (7)$$

где δ — старший корень.

Доказательство. Так как линейные части всех преобразований из $\widetilde{W}$ принадлежат группе W , то ее зеркалами могут быть только гиперплоскости, параллельные зеркалам группы W . Более точно, всякое отражение $r \in \widetilde{W}$ есть произведение отражения $r_\alpha \in W$ относительно гиперплоскости, задаваемой уравнением $\alpha = 0$, где $\alpha \in \Delta$, и параллельного переноса на вектор вида $k\alpha^\vee$, $k \in \mathbb{Z}$, что есть отражение относительно гиперплоскости $\alpha(x) = k$. Обратно, всякое такое произведение является отражением и принадлежит группе $\widetilde{W}$. Следовательно, параллельный перенос на любой кокорень является произведением отражений из группы $\widetilde{W}$ и, значит, эта группа порождается отражениями.

Для доказательства того, что симплекс D является камерой группы $\widetilde{W}$, достаточно проверить, что никакое зеркало группы $\widetilde{W}$ не может содержать внутренних точек этого симплекса. Из определения симплекса D следует, что значения всех положительных корней в его внутренних точках строго положительны, а значения старшего корня и,

значит, — всех положительных корней строго меньше 1. Доказываемое утверждение следует теперь из описания зеркал группы $\widetilde{W}$. $\square$

Определение. Система корней $\widetilde{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, где $\alpha_0 = -\delta$ — младший корень, называется *расширенной системой простых корней алгебры $\mathfrak{g}$* .

Элементы системы $\widetilde{\Pi}$ связаны линейной зависимостью

$$k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n = 0 \quad (8)$$

с целыми положительными коэффициентами, в которой $k_0 = 1$. При отождествлении пространства $\mathbf{E}^*$ с $\mathbf{E}$ можно сказать, что $\widetilde{\Pi}$ — это система внутренних нормалей симплекса D (нормированных определенным образом). Она описывается с точностью до подобия ориентированным графом, определяемым аналогично схеме простых корней и называемым расширенной схемой простых корней.

Из того, что группа $\widetilde{W}$ (как и любая дискретная группа отражений) действует просто транзитивно на множестве своих камер, следует, что ее нормализатор $N(\widetilde{W})$ в группе всех движений пространства $\mathbf{E}$ имеет вид

$$N(\widetilde{W}) = \widetilde{W} \rtimes \text{Sym } \widetilde{\Pi}. \quad (9)$$

Заметим, что группа $\text{Sym } \Pi$ естественным образом вкладывается в $\text{Sym } \widetilde{\Pi}$ в виде стабилизатора корня α_0 .

Теорема 2. *Имеет место разложение*

$$\text{Sym } \widetilde{\Pi} = \widehat{Z} \rtimes \text{Sym } \Pi, \quad (10)$$

где $\widehat{Z}$ — нормальная подгруппа, изоморфная центру Z группы G .

Доказательство. Линейные части преобразований из $N(\widetilde{W})$ принадлежат группе $N(W) = W \rtimes \text{Sym } \Pi$ (см. (1)). С другой стороны, эта группа естественным образом вкладывается в $N(\widetilde{W})$ в виде стабилизатора нуля. Следовательно,

$$N(\widetilde{W}) = L \rtimes N(W),$$

где $L \subset \mathbf{E}$ — некоторая решетка (рассматриваемая как группа параллельных переносов).

Найдем решетку L . Параллельный перенос t_c на вектор $c \in \mathbf{E}$ нормализует группу $\widetilde{W}$ тогда и только тогда, когда $t_c r t_c^{-1} \in \widetilde{W}$ для любого отражения $r \in W$. Отражение r_α , связанное с корнем α , задается формулой

$$r_\alpha x = x - \alpha(x)\alpha^\vee. \quad (11)$$

Простое вычисление показывает, что

$$t_c r_\alpha t_c^{-1} = t_{\alpha(c)} \alpha^\vee.$$

Следовательно, $c \in L$ тогда и только тогда, когда $\alpha(c) \in \mathbb{Z}$ для всех корней α . Это означает, что $L = Q^*$ — решетка, двойственная к решетке корней. Таким образом,

$$N(\widetilde{W}) = Q^* \rtimes N(W) = (Q^* \rtimes W) \rtimes \text{Sym } \Pi. \quad (12)$$

С другой стороны, из (9) и определения группы $\widetilde{W}$ следует, что

$$N(\widetilde{W}) = (P^* \rtimes W) \rtimes \text{Sym } \widetilde{\Pi}. \quad (13)$$

Из разложений (12) и (13) следует, что

$$\mathrm{Sym} \tilde{\Pi} \simeq N(\widetilde{W})/(P^* \rtimes W) \simeq (Q^*/P^*) \rtimes \mathrm{Sym} \Pi.$$

Остается заметить, что $Q^*/P^* \simeq Z$. □

Пример. Для группы SU_{n+1} (тип A_n) расширенная схема простых корней — это цикл длины $n+1$ с простыми ребрами. Группа ее симметрии имеет порядок $2(n+1)$ и является полупрямым произведением подгруппы поворотов, изоморфной центру группы SU_{n+1} , и подгруппы порядка 2, происходящей из симметрии самой схемы простых корней.

Замечание. Ясно, что всякая симметрия расширенной системы простых корней должна сохранять коэффициенты линейной зависимости между ними. В частности, младший корень α_0 может перейти только в корень, входящий в эту линейную зависимость с коэффициентом 1. Поэтому порядок центра группы G не превосходит количества таких коэффициентов. На самом деле, как показывает разбор случаев, всегда имеет место равенство, т.е. корни, входящие в линейную зависимость с коэффициентом 1, составляют одну орбиту группы симметрии.