ЛЕКЦИЯ 10. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛУПРОСТЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ВНУТРЕННЕГО ТИПА.

Как мы знаем (см.предыдущую лекцию), локальная классификация неприводимых полупростых симметрических пространств равносильна классификации инволютивных автоморфизмов простых компактных алгебр Ли.

Сохраним обозначения и предположения предыдущей лекции. В частности, будем считать, что

G — односвязная простая компактная группа Ли,
$Z = Z(G)$ — ее центр,
T — фиксированный максимальный тор,
$\mathbf{E} = i\mathfrak{t}$.

Займемся вначале внутренними автоморфизмами. Группа $\operatorname{Int} G = \operatorname{Int}\mathfrak{g}$ внутренних автоморфизмов естественным образом отождествляется с группой G/Z. Всякий ее элемент сопряжен элементу из T/Z, и два элемента из T/Z сопряжены в G/Z тогда и только тогда, когда они переводятся друг в друга преобразованиями из группы Вейля W. Таким образом, наша задача — классифицировать элементы порядка 2 в группе T/Z с точностью до действия группы W (или группы $N(W) = W \rightthreetimes \operatorname{Sym}\Pi$, если мы хотим классифицировать инволютивные автоморфизмы с точностью до сопряженности в группе $\operatorname{Aut} G = \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ всех автоморфизмов группы G).

Гомоморфизм

$$\varphi\colon \mathbf{E} \to T, \quad x \mapsto \exp 2\pi i x$$

перестановочен с действием группы $N(W)$. Его ядром является решетка кокорней P^*. Следовательно, элементы $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ эквивалентны относительно действия группы W (соотв. группы $N(W)$) тогда и только тогда, когда элементы x и y эквивалентны относительно действия расширенной группы Вейля

$$\widetilde{W} = P^* \rightthreetimes W$$

(соотв. группы $\widetilde{W} \rightthreetimes \operatorname{Sym}\Pi$). Напомним, что каждый элемент $x \in \mathbf{E}$ $\widetilde{W}$-эквивалентен единственному элементу симплекса D, описанного в теореме 1 предыдущей лекции.

Пусть $\widetilde{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — расширенная система простых корней. Точки $x \in \mathbf{E}$ можно задавать их (взвешенными) барицентрическими координатами

$$x_0 = 1 + \alpha_0(x),\ x_1 = \alpha_1(x),\ \ldots,\ x_n = \alpha_n(x),$$

удовлетворяющими соотношению

$$k_0 x_0 + k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n = 1.$$

Точки симплекса D характеризуются тем, что все их барицентрические координаты неотрицательны.

Образ $\varphi(x)$ точки $x \in \mathbf{E}$ лежит в центре Z группы G тогда и только тогда, когда $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. Соответственно, $(\varphi(x))^2 \in Z$ тогда и только тогда, когда

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Из результатов предыдущей лекции следует также, что при $x, y \in D$ элементы $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ сравнимы по модулю Z тогда и только тогда, когда x и y эквивалентны относительно действия группы $\widehat{Z} \subset \operatorname{Sym} \widetilde{\Pi}$ (изоморфной Z). Таким образом, дело сводится к нахождению точек симплекса D, удовлетворяющих условию (1) (но не все координаты которых целые, так как иначе уже $\varphi(x) \in Z$), с точностью до действия группы $\widehat{Z}$ (или всей группы $\operatorname{Sym} \widetilde{\Pi} = \widehat{Z} \leftthreetimes \operatorname{Sym} \Pi$, если нас интересует классификация инволютивных автоморфизмов группы G с точностью до сопряженности в группе $\operatorname{Aut}(G)$).

Для такой точки $x \in D$ возможны только два варианта:

(И1) $x_i = \frac{1}{2}$ для какого-то одного индекса i, удовлетворяющего условию $k_i = 2$, а все остальные координаты равны нулю;

(И2) $x_i = x_j = \frac{1}{2}$ для каких-то двух индексов i, j, удовлетворяющих условиям $k_i = k_j = 1$, а все остальные координаты равны нулю.

Инволютивный автоморфизм $\sigma = \operatorname{Ad}(\varphi(x))$ алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ действует на картановской подалгебре $\mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$ тривиально, а на каждом корневом подпространстве $\mathfrak{g}_\alpha$ — умножением на ± 1 в зависимости от четности числа $2\alpha(x)$.

В случае (И2), применив подходящую симметрию схемы $\widetilde{\Pi}$, можно добиться, чтобы $j = 0$. Тогда подалгебра $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ неподвижных векторов автоморфизма σ будет суммой картановской подалгебры и корневых подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$, для которых корень α_i не входит в разложение корня α по простым корням. Отсюда следует, что элемент картановской подалгебры, на котором все простые корни, кроме α_i, обращаются в нуль, принадлежит центру алгебры $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$. Это означает, что соответствующее симметрическое пространство G/K (а также двойственное симметрическое пространство G^*/K) является эрмитовым. Так как эрмитовы симметрические пространства были классифицированы ранее, то мы сейчас не будем рассматривать этот случай.

В случае (И1) подалгебра $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ есть сумма картановской подалгебры и корневых подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$, для которых корень α_i входит в разложение корня α с коэффициентом 0 или ± 2.

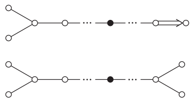
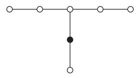
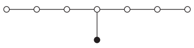
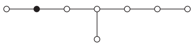
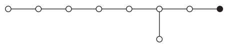
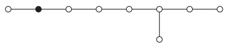
Теорема 1. *В случае* (И1) *множество* $\widetilde{\Pi} \setminus \{\alpha_i\}$ *является системой простых корней подалгебры* $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что всякий корень $\alpha \in \Pi$, в разложение которого по простым корням алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ корень α_i входит с коэффициентом -2, представляется в виде суммы младшего корня α_0 и неотрицательной линейной комбинации простых корней, отличных от α_i. Докажем это индукцией по сумме коэффициентов разложения разности $\alpha - \alpha_0$ по простым корням алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$.

Очевидно, что $\alpha - \alpha_i$ — не корень. Если $\alpha - \alpha_j$ — не корень при любом $j \neq 0$, то α — младший корень алгебры $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, т.е. $\alpha = \alpha_0$, и все доказано. В противном случае существует такое $j \neq 0, i$, что $\alpha - \alpha_j$ — корень. По предположению индукции корень $\alpha - \alpha_j$ представляется в виде суммы корня α_0 и неотрицательной линейной комбинации простых корней, отличных от α_i; но тогда и корень α представляется в таком виде. □

Результат классификации представлен в следующей таблице, в которой черные кружки обозначают выделенный корень α_i.

Абсолютно неприводимые полупростые симметрические пространства внутреннего типа

Схема	X	X^*	$\dim X$	$\mathrm{rk} X$
	$SO_n/S(O_k \times O_l)$ ($k+l=n$, kl четно)	$SO_{k,l}/S(O_k \times O_l)$	kl	$\min\{k,l\}$
	$Sp_n/(Sp_k \times Sp_l)$ ($k+l=n$)	$Sp_{k,l}/(Sp_k \times Sp_l)$	$4kl$	$\min\{k,l\}$
	$E_6/(SU_6 \times SU_2)$	$EII/(SU_6 \times SU_2)$	40	4
	E_7/SU_8	EV/SU_8	70	7
	$E_7/(Spin_{12} \cdot SU_2)$	$EVI/(Spin_{12} \cdot SU_2)$	64	4
	$E_8/Spin_{16}$	$EVIII/Spin_{16}$	128	8
	$E_8/(E_7 \cdot SU_2)$	$EIX/(E_7 \cdot SU_2)$	112	4
	$F_4/(Sp_3 \cdot SU_2)$	$FI/(Sp_3 \cdot SU_2)$	28	4
	$F_4/Spin_9$	$FII/Spin_9$	16	1
	$G_2/(SU_2 \cdot SU_2)$	$G/(SU_2 \cdot SU_2)$	8	2