УДК 512.54.03+512.743.7

Е. И. Бунина

Изоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле над коммутативными кольцами

В настоящей работе доказано, что две группы Шевалле с неразложимыми системами корней ранга > 1 над коммутативными кольцами (содержащими дополнительно $1/2$ для типов $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{F}_4$ и $\mathbf{G}_2$ и $1/3$ для типа $\mathbf{G}_2$) изоморфны или элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие системы корней совпадают, решетки весов представления алгебры Ли совпадают, а кольца изоморфны или элементарно эквивалентны соответственно. Также описаны изоморфизмы присоединенных (элементарных) групп Шевалле над кольцами описанных типов.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: группы Шевалле над коммутативными кольцами, автоморфизмы, изоморфизмы, элементарная эквивалентность.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9069

§ 1. Введение

Цель работы – доказать, что две группы Шевалле $G_1 = G_\pi(\Phi, R)$ и $G_2 = G_{\pi'}(\Phi'_2, S)$, где Φ, Φ' – неприводимые системы корней рангов $\geqslant 2$, R, S – коммутативные кольца с единицей, содержащие $1/2$ для систем корней $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{G}_2$ и $1/3$ для системы корней $\mathbf{G}_2$, изоморфны или элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие системы корней одинаковы, решетки весов представлений π и π' совпадают, а кольца изоморфны или элементарно эквивалентны соответственно.

В наибольшей степени результат основан на описании изоморфизмов между элементарными присоединенными группами Шевалле над кольцами с теми же свойствами (что также представляет самостоятельный научный интерес). Описание автоморфизмов таких групп Шевалле было дано в работе [1], главный результат во многом ее повторяет, но все равно мы приводим его подробно для удобства читателя.

Если говорить о части, соответствующей элементарной эквивалентности, то в работе [2] подобный результат был доказан для групп Шевалле над полями, а в [3] – для групп Шевалле над локальными кольцами. Также крайне важно применение теоремы Кейслера–Шелаха об изоморфизме (две модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда некоторые их ультрастепени изоморфны, см. [4]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-01-00895-а).

§ 2. Основные понятия и определения

Мы фиксируем неразложимую систему корней Φ ранга, большего единицы. Подробные сведения о системах корней и их свойствах можно найти в книгах [5], [6]. Предположим теперь, что у нас имеется полупростая комплексная алгебра Ли $\mathscr{L}$ типа Φ с картановской подалгеброй $\mathscr{H}$ (подробную информацию о полупростых алгебрах Ли можно найти в книге [5]).

Можно выбрать базис $\{h_1, \dots, h_l\}$ в $\mathscr{H}$ и для каждого $\alpha \in \Phi$ элементы $x_\alpha \in \mathscr{L}_\alpha$ так, что $\{h_i; x_\alpha\}$ образуют базис в $\mathscr{L}$ и для любых двух элементов этого базиса их коммутатор является целочисленной линейной комбинацией элементов того же базиса.

Введем элементарные группы Шевалле (см., например, [7]).

Пусть $\mathscr{L}$ – полупростая алгебра Ли (над $\mathbb{C}$) с системой корней Φ, $\pi\colon \mathscr{L} \to \mathrm{gl}(V)$ – ее конечномерное точное представление (размерности n). Если $\mathscr{H}$ – картановская подалгебра алгебры $\mathscr{L}$, то функционал $\lambda \in \mathscr{H}^*$ называется *весом* данного представления, если существует ненулевой вектор $v \in V$ (который называется *весовым вектором*) такой, что для любых $h \in \mathscr{H}\, \pi(h)v = \lambda(h)v$.

В пространстве V существует базис из весовых векторов такой, что все операторы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ для $k \in \mathbb{N}$ записываются целочисленными (нильпотентными) матрицами. Этот базис называется *базисом Шевалле*. Целочисленная матрица также может рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть R – такое кольцо. Рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над R, матрицы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ при $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$ вложим в $M_n(R)$.

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$\exp(tx_\alpha) = x_\alpha(t) = 1 + t\pi(x_\alpha) + \frac{t^2\pi(x_\alpha)^2}{2} + \dots + \frac{t^k\pi(x_\alpha)^k}{k!} + \cdots .$$

Так как все матрицы $\pi(x_\alpha)$ нильпотентны, этот ряд конечен. Автоморфизмы $x_\alpha(t)$ называются *элементарными корневыми элементами*. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(R^n)$, порожденная всеми автоморфизмами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$, называется *элементарной группой Шевалле* (обозначение: $E_\pi(\Phi, R)$).

Действие элементов $x_\alpha(t)$ на базисе Шевалле описано в работах [8], [9].

Все веса данного представления (по сложению) порождают решетку (свободную абелеву группу, в которой любой $\mathbb{Z}$-базис также является $\mathbb{C}$-базисом в $\mathscr{H}^*$), называемую *решеткой весов* Λ_π.

Элементарные группы Шевалле определяются даже не представлением соответствующей алгебры Ли, а просто ее *решеткой весов*. Именно, с точностью до абстрактного изоморфизма элементарная группа Шевалле полностью определяется системой корней Φ, коммутативным кольцом R с единицей и решеткой весов Λ_π.

Среди всех решеток выделим решетку, соответствующую присоединенному представлению: она порождается всеми корнями (*решетка корней* Λ_{ad}). Соответствующая элементарная группа Шевалле называется *присоединенной*.

Введем теперь группы Шевалле (см. [7]–[13], а также дальнейшие ссылки в этих работах).

Рассмотрим полупростые алгебраические группы над алгебраически замкнутыми полями. Это в точности элементарные группы Шевалле $E_\pi(\Phi, K)$ (см. [7; § 5]).

Все эти группы можно определить в группе $\mathrm{SL}_n(K)$ как множество общих нулей полиномов от матричных коэффициентов a_{ij} с целочисленными коэффициентами; например, в случае системы корней C_l и универсального представления имеем $n = 2l$ и полиномы, соответствующие условию $(a_{ij})Q(a_{ji}) - Q = 0$, где Q – матрица, состоящая из диагональных блоков $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что умножение и взятие обратного элемента также описываются полиномами с целыми коэффициентами. Таким образом, эти полиномы можно рассматривать как полиномы над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть некоторая элементарная группа Шевалле E над $\mathbb{C}$ определена в $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ полиномами $p_1(a_{ij}), \dots, p_m(a_{ij})$. Для коммутативного кольца R с единицей рассмотрим группу

$$G(R) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(R) \mid \widetilde{p}_1(a_{ij}) = 0,\ \dots,\ \widetilde{p}_m(a_{ij}) = 0\},$$

где $\widetilde{p}_1(\dots), \dots, \widetilde{p}_m(\dots)$ – полиномы, имеющие те же коэффициенты, что и $p_1(\dots), \dots, p_m(\dots)$, но рассматриваемые над R.

Эта группа называется *группой Шевалле* $G_\pi(\Phi, R)$ типа Φ над кольцом R, и для любого алгебраически замкнутого поля K она совпадает с элементарной группой Шевалле.

Подгруппа диагональных (в стандартном базисе из весовых векторов) матриц в группе Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$ называется *стандартным максимальным тором* группы $G_\pi(\Phi, R)$ и обозначается через $T_\pi(\Phi, R)$. Эта группа изоморфна группе $\mathrm{Hom}(\Lambda_\pi, R^*)$.

Обозначим через $h(\chi)$ элементы тора $T_\pi(\Phi, R)$, соответствующие гомоморфизму $\chi \in \mathrm{Hom}(\Lambda_\pi, R^*)$.

В частности, $h_\alpha(u) = h(\chi_{\alpha,u})$, $u \in R^*$, $\alpha \in \Phi$, где

$$\chi_{\alpha,u} \colon \lambda \mapsto u^{\langle \lambda, \alpha \rangle}, \qquad \lambda \in \Lambda_\pi.$$

Заметим, что условие

$$G_\pi(\Phi, R) = E_\pi(\Phi, R)$$

не выполняется даже в случае полей, не являющихся алгебраически замкнутыми.

Определим четыре типа автоморфизмов группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, мы назовем их *стандартными*.

Центральные автоморфизмы. Пусть $C_G(R)$ – центр группы $G_\pi(\Phi, R)$, $\tau\colon G_\pi(\Phi, R) \to C_G(R)$ – гомоморфизм групп. Тогда отображение $x \mapsto \tau(x)x$ из $G_\pi(\Phi, R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$, который обозначается буквой τ и называется *центральным автоморфизмом* группы $G_\pi(\Phi, R)$.

Кольцевые автоморфизмы. Пусть $\rho\colon R \to R$ – автоморфизм кольца R. Отображение $x \mapsto \rho(x)$ из $G_\pi(\Phi, R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$, который обозначается той же буквой ρ и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G_\pi(\Phi, R)$. Заметим, что для всех $\alpha \in \Phi$ и $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha(\rho(t))$.

Внутренние автоморфизмы. Пусть S – некоторое кольцо, содержащее R, g – элемент группы $G_\pi(\Phi, S)$, нормализующий подгруппу $G_\pi(\Phi, R)$. Тогда отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$, который обозначается через i_g и называется *внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом* $g \in G_\pi(\Phi, S)$. Если $g \in G_\pi(\Phi, R)$, то назовем i_g *строго внутренним* автоморфизмом.

Диаграммные (графовые) автоморфизмы. Пусть δ – автоморфизм системы корней Φ такой, что $\delta\Delta = \Delta$. Тогда существует единственный автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$ (будем обозначать его той же буквой δ) такой, что для любого $\alpha \in \Phi$ и $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ переходит в $x_{\delta(\alpha)}(\varepsilon(\alpha)t)$, где $\varepsilon(\alpha) = \pm 1$ для всех $\alpha \in \Phi$ и $\varepsilon(\alpha) = 1$ для всех $\alpha \in \Delta$.

Теперь предположим, что $\delta_1, \dots, \delta_k$ – это все различные построенные для данной системы корней автоморфизмы группы Шевалле (для систем корней $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{G}_2$ это только тождественный автоморфизм, для систем $\mathbf{A}_l, \mathbf{D}_l$, $l \neq 4$, $\mathbf{E}_6$ есть ровно два таких автоморфизма, для системы $\mathbf{D}_4$ их шесть). Пусть, кроме того, нам дана система ортогональных идемпотентов кольца R:

$$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \mid \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_k = 1, \ \forall\, i \neq j \ \varepsilon_i \varepsilon_j = 0\}.$$

Тогда отображение

$$\Lambda_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k} := \varepsilon_1 \delta_1 + \dots + \varepsilon_k \delta_k$$

группы Шевалле на себя является автоморфизмом, который называется *диаграммным автоморфизмом* группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$.

Аналогично мы можем определить четыре типа автоморфизмов элементарной подгруппы $E(R)$. Автоморфизм σ группы $G_\pi(\Phi, R)$ (или $E_\pi(\Phi, R)$) называется *стандартным*, если он является композицией автоморфизмов введенных четырех типов.

В работе [1] была доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $G = G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ ($E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$) – (элементарная) присоединенная группа Шевалле ранга, большего единицы, R – коммутативное кольцо с единицей. Пусть, кроме того, при $\Phi = \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l$ или $\mathbf{F}_4$ в кольце R обратима двойка, а при $\Phi = \mathbf{G}_2$ – двойка и тройка. Тогда любой автоморфизм группы G стандартен, внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.*

§ 3. Известные понятия, определения и результаты, необходимые для доказательства основных теорем

В этом параграфе мы собрали важные результаты, которые будут использованы далее для доказательства основных теорем работы.

3.1. Локализация колец и модулей; вложение кольца в произведение его локализаций.

Определение 1. Пусть A – коммутативное кольцо. Подмножество $S \subset A$ называется *мультипликативно замкнутым* подмножеством в A, если $1 \in S$ и S замкнуто относительно умножения.

Введем отношение эквивалентности $\sim$ на множестве пар $A \times S$ следующим образом:

$$\frac{a}{s} \sim \frac{b}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, u \in S\colon (at - bs)u = 0.$$

Через a/s мы будем означать весь класс эквивалентности для пары (a, s), а через $S^{-1}R$ – множество всех классов эквивалентности. Введем на $S^{-1}R$ структуру кольца, положив

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \qquad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}.$$

Определение 2. Кольцо $S^{-1}A$ называется *кольцом частных для A по отношению к S*.

Пусть $\mathfrak{p}$ – простой идеал в A. Тогда множество $S = A \setminus \mathfrak{p}$ мультипликативно замкнуто (это равносильно определению простого идеала). Будем обозначать кольцо частных $S^{-1}A$ в этом случае через $A_\mathfrak{p}$. Элементы a/s, $a \in \mathfrak{p}$, образуют идеал $\mathfrak{M}$ в $A_\mathfrak{p}$. Если $b/t \notin \mathfrak{M}$, то $b \in S$, поэтому b/t обратим в $A_\mathfrak{p}$. Значит, идеал $\mathfrak{M}$ состоит из всех необратимых элементов кольца $A_\mathfrak{p}$, т.е. $\mathfrak{M}$ – наибольший идеал этого кольца, а $A_\mathfrak{p}$ – локальное кольцо.

Процесс перехода от кольца A к кольцу $A_\mathfrak{p}$ называется *локализацией по* $\mathfrak{p}$.

Конструкцию $S^{-1}A$ очевидно можно перенести и на A-модуль M. Пусть m/s обозначает класс эквивалентности пары (m, s), $S^{-1}M$ – множество всех таких дробей – превращается в модуль $S^{-1}M$ с помощью естественных операций сложения и скалярного умножения. Будем писать $M_\mathfrak{p}$ вместо $S^{-1}M$ для $S = A \setminus \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ – простой идеал кольца A.

Предложение 1. *Любое коммутативное кольцо A с единицей можно естественно вложить в декартово произведение всех его локализаций по максимальным идеалам*

$$S = \prod_{\mathfrak{m}\ -\ \text{макс. идеал}\ A} A_\mathfrak{m}$$

с помощью диагонального отображения, сопоставляющего каждому $a \in A$ элемент

$$\prod_\mathfrak{m} \left(\frac{a}{1}\right)_\mathfrak{m}$$

кольца S.

3.2. Изоморфизмы групп Шевалле над полями. Нам понадобится описание изоморфизмов между группами Шевалле над полями.

Предположим, что рассматриваемые системы корней имеют ранги, большие одного.

Введем дополнительное понятие *диагонального* автоморфизма.

Определение 3 (см. [7; лемма 58]). Пусть G – (элементарная) группа Шевалле над полем k, пусть задан набор элементов $f_\alpha \in k^*$ для всех простых корней $\alpha \in \Phi$. Продолжим f до гомоморфизма всей решетки, порожденной

корнями, в k^*. Тогда существует единственный автоморфизм φ группы G такой, что
$$\varphi(x_\alpha(t)) = x_\alpha(f_\alpha t) \quad \text{для всех} \ \ \alpha \in \Phi, \quad t \in k.$$
Этот автоморфизм называется *диагональным автоморфизмом.*

Теперь приведем описание изоморфизмов групп Шевалле над полями.

Теорема 2 (см. [7; теоремы 30 и 31]). *Пусть G, G' – (элементарные) группы Шевалле, построенные по системам корней Φ, Φ' и полям k, k' соответственно. Пусть системы корней неразложимы и имеют ранги, большие единицы. Пусть для систем корней $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{F}_4$ соответствующее поле имеет характеристику, отличную от двух, а для системы корней $\mathbf{G}_2$ – отличную от трех. Пусть $\varphi\colon G \to G'$ – изоморфизм групп. Тогда системы корней Φ и Φ' совпадают, поля k и k' изоморфны, а изоморфизм φ является композицией кольцевого изоморфизма между G и G', внутреннего, диагонального и диаграммного автоморфизмов группы G'. Если группы G и G' являются присоединенными группами Шевалле, то диагонального автоморфизма в композиции нет.*

3.3. Нормальная структура групп Шевалле над коммутативными кольцами. Заметим, что для любого идеала I кольца R естественное отображение $R \to R/I$ индуцирует гомоморфизм
$$\lambda_I\colon G_\pi(\Phi, R) \to G_\pi(\Phi, R/I).$$
Если I – собственный идеал кольца R, то ядро гомоморфизма λ_I является нецентральной нормальной подгруппой группы $G_\pi(\Phi, R)$. Обозначим прообраз центра группы $G_\pi(R/I)$ при гомоморфизме λ_I через $Z_\pi(\Phi, R, I)$.

Через $E_\pi(\Phi, R, I)$ будем обозначать подгруппу элементарной группы Шевалле, порожденную элементами $x_\alpha(t)$, где $\alpha \in \Phi$, $t \in I$.

Теорема 3 (см. [14]). *Пусть ранг неразложимой системы корней Φ больше единицы. Если подгруппа $\mathscr{H}$ группы $E_\pi(\Phi, R)$ нормальна в $E_\pi(\Phi, R)$, то*
$$E_\pi(\Phi, R, I) \leqslant \mathscr{H} \leqslant Z_\pi(\Phi, R, I) \cap E_\pi(\Phi, R)$$
для некоторого однозначно определенного идеала I кольца R.

3.4. Проективные модули над локальными кольцами. Известна следующая

Теорема 4. *Конечно порожденный проективный модуль над локальным кольцом свободен.*

3.5. Характеристичность подгруппы $E_\pi(\Phi, R)$ в $G_\pi(\Phi, R)$. Подгруппа H группы G называется *характеристической*, если она переходит в себя под действием любого автоморфизма группы G. В частности, характеристическая подгруппа всегда нормальна.

Теорема 5 (см. [15]). *Если ранг системы корней Φ больше единицы, то элементарная подгруппа $E_\pi(\Phi, R)$ является характеристической в группе Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$.*

В настоящей работе мы будем пользоваться следующим утверждением, которое нужно отдельно доказать.

Теорема 6. *Если $G_\pi(\Phi, R)$ и $G_{\pi'}(\Phi', S)$ – две группы Шевалле рассматриваемых типов,*

$$\varphi\colon G_\pi(\Phi, R) \to G_{\pi'}(\Phi', S)$$

– изоморфизм между ними, то элементарная подгруппа $E_\pi(\Phi, R)$ переходит в элементарную подгруппу $E_{\pi'}(\Phi', S)$.

Доказательство. Мы знаем, что $E_\pi(\Phi, R)$ нормальна в $G_\pi(\Phi, R)$, откуда следует, что $\varphi(E_\pi(\Phi, R))$ нормальна в $G_{\pi'}(\Phi', S)$.

Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 7 (см. [15; теорема 4, b]). *Пусть для систем корней $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{G}_2$ кольцо R не имеет полей вычетов из двух элементов. Тогда для любой нормальной подгруппы H в $G_\pi(\Phi, R)$ существует такой идеал J кольца R, что*

$$E_\pi(\Phi, R, J) \subseteq H \subseteq G_\pi(\Phi, R, J).$$

Таким образом, и в нашем случае

$$E_{\pi'}(\Phi', S, J) \subseteq \varphi(E_\pi(\Phi, R)) \subseteq G_{\pi'}(\Phi', S, J)$$

для некоторого идеала J кольца S.

Основная наша цель – показать, что $J = S$.

Мы предположим, что $J \neq S$, и придем к противоречию.

Пусть R' – это подкольцо в R, порожденное единицей. Понятно, что R' конечно порождено. Совершенно очевидно, что группа $E_\pi(\Phi, R')$ конечно порождена.

Из [15; теорема 3] следует, что группа $E_\pi(\Phi, R')$ совпадает со своим коммутантом.

Образ $\varphi(E_\pi(\Phi, R'))$ конечно порожден, совпадает со своим коммутантом.

Каждый элемент образа является некоторой матрицей с коэффициентами из идеала J с прибавленной единичной матрицей. Так как образ конечно порожден, то все матрицы образа имеют коэффициенты, порожденные коэффициентами некоторого конечного числа матриц. Значит, $\varphi(E_\pi(\Phi, R'))$ содержится в $G_{\pi'}(\Phi', S, J')$ для некоторого конечно порожденного идеала J' кольца S, содержащегося в идеале J. Так как $\varphi(E_\pi(\Phi, R'))$ совпадает со своим коммутантом, то $J'J' = J'$, где $J'J'$ – аддитивная подгруппа в J', порожденная всеми произведениями rs, где $r, s \in J'$.

Лемма 1 (Накаямы). *Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, I – идеал в R, а M – конечно порожденный модуль над R. Если $IM = M$, то существует такой элемент $a \in I$, что для всякого $m \in M$ выполнено $am = m$.*

Воспользуемся леммой Накаямы для $R = S$, $I = J'$, $M = J'$. Тогда существует такой $a \in J'$, что $ab = b$ для всех $b \in J'$, т.е. $(a-1)b = 0$ для всех $b \in J'$. Обозначим элемент $a - 1$ через s. Так как $a \in J'$, $1 \notin J'$, то $s \in S \setminus J'$.

Таким образом, существует $s \in S \setminus J'$ такое, что $sJ' = 0$.

Следовательно, $E_{\pi'}(\Phi', S, sS)$ коммутирует с $\varphi(E_\pi(\Phi, R'))$, т.е. централизатор $\varphi(E_\pi(\Phi, R'))$ во всей группе $G_{\pi'}(\Phi, S)$ не коммутативен. Но централизатор группы $E_\pi(\Phi, R)$ в группе $G_\pi(\Phi, R)$ был коммутативен, т.е. мы пришли к противоречию, поэтому $J = S$.

Получаем, что $\varphi(E_\pi(\Phi, R)) \supseteq E_{\pi'}(\Phi', S)$. Рассмотрев обратный изоморфизм и применив все те же рассуждения, получим $\varphi^{-1}(E_{\pi'}(\Phi', S)) \supseteq E_\pi(\Phi, R)$. Значит,

$$\varphi(E_\pi(\Phi, R)) = E_{\pi'}(\Phi', S),$$

что и требовалось доказать. Теорема 6 доказана.

3.6. Элементарная эквивалентность и теорема Кейслера–Шелаха об изоморфизме. Две модели $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ одного и того же языка $\mathscr{L}$ называются *элементарно эквивалентными*, если в них выполняются одни и те же предложения первого порядка языка $\mathscr{L}$.

Изоморфные модели всегда элементарно эквивалентны, конечные элементарно эквивалентные модели всегда изоморфны. Однако для бесконечных моделей понятия изоморфности и элементарной эквивалентности различаются. Например, элементарно эквивалентными являются поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поле $\overline{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел.

Ключевой для нас в доказательствах, связанных с элементарной эквивалентностью групп Шевалле, будет следующая

Теорема 8 (Кейслера–Шелаха об изоморфизме; см. [16], [17]). *Две модели $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$ одного и того же языка первого порядка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует ультрафильтр $\mathscr{F}$ такой, что*

$$\prod_{\mathscr{F}} \mathscr{U}_1 \cong \prod_{\mathscr{F}} \mathscr{U}_2.$$

§ 4. Главная техническая теорема, формулировка основных шагов доказательства

Для того чтобы получить основные теоремы этой статьи, нам требуется доказать утверждение, совершенно аналогичное теореме 1, но не для автоморфизмов, а для изоморфизмов групп Шевалле.

Теорема 9. *Пусть $G_1 = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ и $G_2 = E_{\mathrm{ad}}(\Phi', S)$ – элементарные присоединенные группы Шевалле с неразложимыми системами корней рангов, больших одного, R, S – коммутативные кольца с единицей. Пусть, кроме того, при $\Phi, \Phi' = \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l$ или $\mathbf{F}_4$ в кольце R, S обратима двойка, а при $\Phi, \Phi' = \mathbf{G}_2$ – двойка и тройка. Тогда любой изоморфизм между группами G_1 и G_2 стандартен (т.е. является композицией кольцевого изоморфизма, а также внутреннего, диаграммного и центрального автоморфизмов), внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.*

Если R – кольцо, I – его идеал, то через $\lambda_I = \lambda_I^R\colon G_\pi(\Phi, R) \to G_\pi(\Phi, R/I)$ $(E_\pi(\Phi, R) \to E_\pi(\Phi, R/I))$ будем обозначать гомоморфизм, получающийся при сопоставлении каждому элементу (матрице) $A \in G_\pi(\Phi, R)$ его образа при естественном гомоморфизме $R \to R/I$.

Напомним, что через Z_I мы обозначаем прообраз центра группы $G_\pi(\Phi, R/I)$ при гомоморфизме λ_I. Группу $E_\pi(\Phi, R, I)$ для краткости обозначим через E_I.

Определение 4. Пусть C_I обозначает группу $Z_I \cap E_\pi(\Phi, R)$, $N_I = \ker \lambda_I \cap E_\pi(\Phi, R)$.

Предложение 2. *Пусть φ – произвольный изоморфизм группы $E_\pi(\Phi, R)$ на группу $E_{\pi'}(\Phi', S)$, I – максимальный идеал кольца R. Тогда существует максимальный идеал J кольца S такой, что $\varphi(N_I) = N_J$.*

Доказательство. Очевидно, что группа C_I нормальна в группе $E_\pi(\Phi, R)$. Как следует из теоремы 3, для такой подгруппы G выполняется включение

$$E_I \subseteq G \subseteq C_I,$$

откуда следует, что подгруппы вида C_I, и только они, являются максимальными нормальными подгруппами группы $E_\pi(\Phi, R)$. Аналогично группы вида C_J, и только они, являются максимальными нормальными подгруппами в $E_{\pi'}(\Phi', S)$. Таким образом, для максимального идеала I кольца R существует максимальный идеал J кольца S такой, что $\varphi(C_I) = C_J$. Покажем, что $\varphi(N_I) = N_J$.

Рассмотрим группу $G = E_\pi(\Phi, R)/C_I = E_\pi(\Phi, R)/(Z_I \cap E_\pi(\Phi, R))$. По второй теореме об изоморфизме эта группа естественно изоморфна группе $E_\pi(\Phi, R) \cdot Z_I/Z_I$. Теперь воспользуемся первой теоремой об изоморфизме (точнее, следствием из нее), для чего профакторизуем обе части по C_I.

В результате получим $E_\pi(\Phi, R/I) \cdot Z(G_\pi(\Phi, R/I))/Z(G_\pi(\Phi, R/I))$. Снова воспользуемся второй теоремой об изоморфизме, получим

$$G \cong E_\pi(\Phi, R/I)/(E_\pi(\Phi, R/I) \cap Z(G_\pi(\Phi, R/I)) \cong E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R/I).$$

Таким образом, $E_\pi(\Phi, R)/C_I \cong E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R/I)$.

Так как $\varphi(C_I) = C_J$, то изоморфизм φ индуцирует изоморфизм $\overline{\varphi}$ групп $E_\pi(\Phi, R)/C_I \cong E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R/I)$ и $E_{\pi'}(\Phi', S)/C_J \cong E_{\mathrm{ad}}(\Phi', S/J)$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_\pi(\Phi, R) & \xrightarrow{\varphi} & E_{\pi'}(\Phi', S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R/I) & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & E_{\mathrm{ad}}(\Phi', S/J) \end{array}$$

коммутативна. Изоморфизмы групп E_{ad} с рассматриваемыми нами системами корней и над полями мы описали в теореме 2. Получается, что поля R/I и S/J изоморфны (обозначим соответствующий изоморфизм через ρ) и $\overline{\varphi}(A) = i_{\overline{g}}\overline{\delta}(\overline{\rho}(A))$ для любого представителя $A \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R/I)$, $\overline{g} \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi', S/J)$, δ – диаграммный автоморфизм группы $G_{\mathrm{ad}}(\Phi', S/J)$.

Так как диаграммный автоморфизм группы $G_{\mathrm{ad}}(\Phi', S/J)$ поднимается до диаграммного автоморфизма группы $E_{\pi'}(\Phi', S)$, а последний группу N_J переводит в себя, то достаточно рассмотреть случай, когда диаграммный автоморфизм в композиции тождественен.

Получается, что в группе $E_{\pi'}(\Phi', S)$ выполняется равенство

$$\lambda_J\varphi(x_\alpha(t)) = g(x_\alpha(\rho(t+I)))g^{-1}c, \qquad c \in Z(E_{\pi'}(\Phi', S/J)).$$

Так как $x_\alpha(t)$ всегда является (для рассматриваемых систем корней) произведением коммутаторов элементов вида $x_\beta(s)$, то центральный элемент c исчезает из образа. Таким образом, получается, что

$$\lambda_J\varphi(x_\alpha(t)) = g(x_\alpha(\rho(t+I))g^{-1}.$$

Пусть теперь $M = x_{\alpha_1}(t_1)\cdots x_{\alpha_k}(t_k)$ – произвольный элемент из группы N_I. Тогда

$$\lambda_J\varphi(M) = g(x_{\alpha_1}(\rho(t_1+I))\cdots x_{\alpha_k}(\rho(t_k+I)))g^{-1} = g(\overline{\rho}\lambda_I(M))g^{-1} = E.$$

Таким образом, $\varphi(N_I)\subseteq N_J$. Ясно, что включение $\varphi^{-1}(N_J)\subseteq N_I$ доказывается аналогично. Значит, $\varphi(N_I)=N_J$. Предложение 2 доказано.

Рассмотрим кольцо R и его максимальный идеал I. Снова кольцо, полученное локализацией R по I, обозначим через R_I, его радикал (он же наибольший идеал) – через $\mathrm{Rad}\, R_I$. Заметим, что имеется два изоморфных поля – R/I и $R_I/\mathrm{Rad}\, R_I$. Таким образом, можно обернуть стрелку μ_I в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_I"'] & R_I \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{Rad}\, R_I}"] \\
R/I \arrow[r, "\mu_I"] & R_I/\mathrm{Rad}\, R_I
\end{tikzcd}$$

Теперь пусть φ – произвольный изоморфизм группы $E_\pi(\Phi,R)$ на группу $E_{\pi'}(\Phi',S)$. Предложение 2 дает возможность рассмотреть коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E_\pi(\Phi,R) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "r_I"'] & E_{\pi'}(\Phi',S) \arrow[d, "r_J"] \\
E_\pi(\Phi,R_I) \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{Rad}\, R_I}"'] & E_{\pi'}(\Phi',S_J) \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{Rad}\, S_J}"] \\
E_\pi(\Phi,R_I/\mathrm{Rad}\, R_I) \arrow[d, "s_I"'] & E_{\pi'}(\Phi',S_J/\mathrm{Rad}\, S_J) \arrow[d, "s_J"] \\
E_\pi(\Phi,R/I) \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & E_{\pi'}(\Phi',S/J)
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Группы $E_\pi(\Phi,R/I)$ и $E_{\pi'}(\Phi',S/J)$ – это просто элементарные группы Шевалле над полями, изоморфизмы над которыми уже описаны в теореме 2.

Заметим, что так как ранг систем корней Φ и Φ' больше единицы, то изоморфизм элементарных групп Шевалле $E_\pi(\Phi,R/I)$ и $E_{\pi'}(\Phi',S/J)$ над полями тут же влечет, что системы корней Φ и Φ' изоморфны, т.е. мы можем их отождествить и далее уже не ставить штрих на вторую систему корней.

Напомним, что поля R/I и S/J изоморфны (как и прежде, обозначим соответствующий изоморфизм через ρ), при этом

$$\overline{\varphi}(A) = i_g \circ f \circ \delta_i \rho(A) \quad \forall\, A \in E_\pi(\Phi, R/I), \qquad g \in G_{\pi'}(\Phi', S/J),$$

здесь δ_i – один из диаграммных автоморфизмов, f – диагональный автоморфизм.

Описание изоморфизмов групп $E_\pi(\Phi, R)$ и $E_{\pi'}(\Phi, S)$ происходит по такой схеме. Кольцо S вкладывается в кольцо $\widetilde{S} = \prod S_J$ – декартово произведение всех локальных колец S_J, полученных локализацией кольца S по различным максимальным идеалам J. Обозначим через S_i кольцо $\prod S_J$, где максимальные идеалы берутся такие, что в композиции стоит именно диаграммный автоморфизм δ_i. Ясно, что тогда $\widetilde{S} = S_1 \oplus \dots \oplus S_k$. Пусть в кольце $\widetilde{S}$ $a_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Ясно, что группа $E_{\pi'}(\Phi', S)$ вкладывается в группу

$$G_{\pi'}(\Phi, \widetilde{S}) = G_{\pi'}\left(\Phi, \prod S_I\right) = G_{\pi'}(\Phi, S_1 \oplus \dots \oplus S_k) = G_{\pi'}(\Phi, S_1) \times \dots \times G_{\pi'}(\Phi, S_k).$$

Сформулируем теперь основные шаги доказательства теоремы 9.

Шаг 1. Доказывается, что для каждого максимального идеала J выполняется равенство

$$r_J \varphi(x_\alpha(1)) = i_{g_J} \delta_i r_J(x_\alpha(1)),$$

где $g_J \in G_{\pi'}(\Phi, \overline{S_J})$ (расширение кольца S_J), i таково, что $S_J \in S_i$.

Шаг 2. Рассматриваются присоединенные группы Шевалле.

Показывается, что на самом деле идемпотенты a_i содержатся в кольце S, а внутренний автоморфизм группы $G_{\pi'}(\Phi, \widetilde{S})$, порожденный матрицей $g = \prod g_J$, индуцирует автоморфизм группы $G_{\pi'}(\Phi, S)$ и на самом деле является строго внутренним.

Далее показывается, что если взять композицию изначального изоморфизма, внутреннего автоморфизма $i_{g^{-1}}$ и диаграммного автоморфизма $\Lambda_{a_1,\dots,a_k}$, то полученный изоморфизм окажется кольцевым.

Теперь предположим, что оба шага доказаны. Тогда мы имеем описание изоморфизмов элементарных присоединенных подгрупп $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ и $E_{\mathrm{ad}}(\Phi', S)$, при этом знаем, что в композиции нет центрального автоморфизма, а внутренний автоморфизм является строго внутренним.

Значит, между элементарными группами Шевалле $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ и $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$ существует кольцевой изоморфизм, что означает, что кольца R и S изоморфны, системы корней Φ и Φ' изоморфны.

Теперь если существует изоморфизм φ между двумя присоединенными группами Шевалле $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ и $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$ рассматриваемых типов, то по теореме 6 φ индуцирует изоморфизм между элементарными группами $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ и $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$, что дает нам

$$R \cong S.$$

§ 5. Шаг 1 доказательства теоремы 9

Диаграммный автоморфизм группы $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, S/J)$ в диаграмме (4.1) поднимается до автоморфизма всей группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$. Поэтому можно считать изоморфизм φ таким, что $\overline{\varphi} = i_{\overline{g}} \circ \overline{\delta}$ (благодаря тому, что у присоединенных групп Шевалле над полями нет диагональных автоморфизмов).

Рассмотрим произвольный элемент $x_\alpha(1) \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $\alpha \in \Phi$. Его образ при отображении r_I есть также $x_\alpha(1) = x_\alpha(1/1) \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R_I)$. В поле R/I его образ имеет тот же самый вид. Элемент $x_\alpha' = \varphi(x_\alpha(1)) \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$ при факторизации по идеалу J дает $\overline{\varphi}(x_\alpha(1)) = i_{\overline{g}}(x_\alpha(1))$, где $\overline{g} \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, S/J)$.

Выберем теперь $g \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, S_J)$ такой, что при факторизации кольца S_J по радикалу из g получается $\overline{g}$.

Теперь рассмотрим такое отображение $\psi\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S_J)$:

$$\psi = i_{g^{-1}} \circ r_J \circ \varphi.$$

При отображении ψ все $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$, переходят в такие x_α', что $x_\alpha(1) - x_\alpha' \in M_N(\mathrm{Rad}\, R_J)$.

Таким образом, мы получаем набор элементов $\{x_\alpha' \mid \alpha \in \Phi\} \subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S_J)$, удовлетворяющих всем тем же соотношениям, что и $\{x_\alpha(1) \mid \alpha \in \Phi\}$, а также сравнимых с соответствующими $x_\alpha(1)$ по модулю радикала кольца S_J.

Здесь ситуация такая же, как и в работах [18]–[22], в которых для локального кольца S и систем корней $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{F}_4$ при $2 \in S^*$, $\mathbf{G}_2$ при $2, 3 \in S^*$, систем корней $\mathbf{A}_l$, $l \geqslant 3$, $\mathbf{D}_l$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$ без всяких дополнительных условий на кольцо доказано, что если в группе $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$ некоторые элементы x_α' являются образами соответствующих $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$, и к тому же $x_\alpha(1) - x_\alpha' \in M_N(\mathrm{Rad}\, S)$, то существует $g' \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$, $g' - E \in M_N(\mathrm{Rad}\, S)$, такой, что для любого $\alpha \in \Phi$

$$x_\alpha(1) = i_{g'}(x_\alpha').$$

Таким образом, шаг 1 доказательства теоремы 9 полностью следует из приведенных в предыдущем абзаце утверждений. Вложив теперь исходное кольцо S в кольцо $\widetilde{S} = \prod_J S_J$, увидим, что

$$\varphi(x_\alpha(1)) = \Lambda_{e_1, \dots, e_k} g(x_\alpha(1)) g^{-1},$$

где $g = \prod_J g_J$, e_i – идемпотенты кольца $\widetilde{S}$, введенные выше.

§ 6. Шаг 2 доказательства теоремы 9

Теперь мы знаем, что изоморфизм φ удовлетворяет равенству

$$\varphi(x_\alpha(1)) = g x_{\delta_1(\alpha)}(e_1) \cdots x_{\delta_k(\alpha)}(e_k) g^{-1} \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S), \qquad g = \prod g_J.$$

Заметим, что для систем корней $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{G}_2$, $k = 1$, для систем корней $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{D}_l$, $l \geqslant 5$, $\mathbf{E}_6$, $k = 2$, для системы корней $\mathbf{D}_4$, $k = 6$.

По-прежнему считаем, что рассматриваются присоединенные группы Шевалле $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ и $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$.

В этом случае любой диаграммный автоморфизм группы Шевалле $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, \widetilde{S})$ реализуется некоторой матрицей $\Lambda = e_1\Lambda_1 + \dots + e_k\Lambda_k \in \mathrm{GL}_N(\widetilde{S})$, матрицы $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ имеют целые коэффициенты.

Значит, композиция сопряжения элементом $g \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, \widetilde{S})$ и диаграммного автоморфизма (обозначим ее через ψ) продолжается до автоморфизма всего матричного кольца $M_N(\widetilde{S})$.

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы 9 элементы $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$, сложением и умножением порождают весь базис X_α, $\alpha \in \Phi$, алгебры Ли $\mathscr{L}(\Phi)$.*

Доказательство. Если система корней отлична от $\mathbf{G}_2$ и $1/2 \in R$, то $x_\alpha(1) = E + X_\alpha + X_\alpha^2/2$, откуда следует, что $X_\alpha = x_\alpha(1) - E - (x_\alpha(1) - E)^2/2$.

Для системы корней $\mathbf{G}_2$ и короткого корня α имеет место $x_\alpha(1) = E + X_\alpha + X_\alpha^2/2 + X_\alpha^3/6$. Мы предполагаем, что $1/6 \in R$, тогда $X_\alpha^3/6 = (x_\alpha(1) - E)^3/6$, $X_\alpha^2/2 = (x_\alpha(1) - E)^2/2 - X_\alpha^3$, откуда легко получается X_α.

Пусть теперь мы имеем дело с системами $\mathbf{A}_l$, $l \geqslant 3$, $\mathbf{D}_l$, $\mathbf{E}_l$, двойка необратима.

В этом случае $x_\alpha(1) = E + X_\alpha + X_\alpha^2/2$, где $X_\alpha^2/2 = E_{\alpha,-\alpha}$. Выберем любые два корня γ, $\beta \in \Phi$ так, чтобы $\gamma + \beta = \alpha$. Воспользовавшись тем, что

$$(x_\gamma(1)x_\beta(1) - x_\gamma(1) - x_\beta(1) + E)^2 = E_{\alpha,-\alpha},$$

мы получим X_α.

Лемма доказана.

Из леммы 2 мы видим, что автоморфизм ψ матричного кольца $M_N(\widetilde{S})$ переводит матрицы X_α, $\alpha \in \Phi$, в матрицы с коэффициентами из кольца S. Значит, любая матрица из $\mathscr{L}(\Phi, S)$ под действием сопряжения ψ переходит в матрицу из $M_N(S)$.

Так как $x_\alpha(t) = E + tX_\alpha + t^2X_\alpha/2 + \cdots$ для любых $\alpha \in \Phi$, $t \in S$, то любая матрица $x_\alpha(t)$ под действием сопряжения ψ переходит в матрицу из $\mathrm{GL}_N(S)$. Значит, $\psi(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)) \subset \mathrm{GL}_N(S)$.

С другой стороны, сопряжение ψ есть композиция внутреннего и диаграммного автоморфизмов группы Шевалле $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, \widetilde{S})$ (и ее элементарной подгруппы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, \widetilde{S})$), поэтому является автоморфизмом группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, \widetilde{S})$. Так как образ группы Шевалле $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$ при отображении ψ лежит в группе Шевалле $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, \widetilde{S})$ и при этом в кольце $M_N(S)$, то $\psi(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)) = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$.

Значит, взяв композицию исходного изоморфизма $\varphi\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$ с автоморфизмом $\psi^{-1} \in \mathrm{Aut}(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S))$, мы получим некоторый изоморфизм $\rho = \psi^{-1} \circ \varphi\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$, для которого $\rho(x_\alpha(1)) = x_\alpha(1)$ для любого $\alpha \in \Phi$.

Лемма 3. *При исходных условиях теоремы 9 изоморфизм ρ является кольцевым изоморфизмом групп Шевалле.*

Доказательство. Сначала предположим, что в кольце S обратима двойка (для системы корней $\mathbf{G}_2$ – еще и тройка).

Первым делом докажем лемму для системы корней $\mathbf{A}_2$. В системе $\mathbf{A}_2$ шесть корней: $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$, $\pm\alpha_3=\pm(\alpha_1+\alpha_2)$ (подробно матрицы для системы корней $\mathbf{A}_2$ можно найти в работе [23]).

Пусть $\rho(x_{\alpha_1}(t))=y$. Заметим, что y коммутирует с

$$h_{\alpha_1}(-1)=\mathrm{diag}[1,1,-1,-1,-1,-1,1,1],$$

откуда сразу получается, что y является блочно-диагональной матрицей по отношению к разделению на части базиса $\{\alpha_1,-\alpha_1,h_1,h_2\}$ и $\{\alpha_2,-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,$ $-\alpha_1-\alpha_2\}$. Далее, y коммутирует с $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{-\alpha_2}(1)$ и $x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$, откуда прямыми вычислениями получим, что

$$y=\begin{pmatrix}
y_{1,1} & y_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{1,7} & y_{1,7}+3y_{7,2}\\
0 & y_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & y_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & y_{1,1} & 0 & 2y_{1,7}+3y_{7,2} & 0 & 0\\
0 & 0 & y_{1,7}+3y_{7,2} & 0 & y_{1,1} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{1,1} & 0 & 0\\
0 & y_{7,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{1,1} & 0\\
0 & y_{1,7}+2y_{7,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{1,1}
\end{pmatrix}.$$

Кроме того, имеется соотношение

$$yx_{\alpha_2}(1)-w_{\alpha_2}(1)yw_{\alpha_2}(1)^{-1}x_{\alpha_2}(1)y,$$

которое дает, во-первых, $y_{1,1}(1-y_{1,1})=0$. Так как $\det y=y_{1,1}^8$, то $y_{1,1}$ обратим, откуда следует, что $y_{1,1}=1$. Кроме того, это соотношение дает $z_{1,2}=-z_{1,7}^2/4$, $z_{7,2}=-z_{1,7}/2$.

Таким образом, для системы корней $\mathbf{A}_2$ утверждение доказано.

Теперь пусть мы имеем дело с системой корней $\mathbf{B}_2$. Напомним, что в этой системе имеются корни $\pm\alpha_1=\pm(e_1-e_2)$, $\pm\alpha_2=\pm e_2$, $\pm\alpha_3=\pm(\alpha_1+\alpha_2)=\pm e_1$, $\pm\alpha_4=\pm(\alpha_1+2\alpha_2)=\pm(e_1+e_2)$ (подробно матрицы для этой системы корней можно найти в работах [20] и [21]).

Рассмотрим теперь $\rho(x_{\alpha_2}(t))=y$ (это матрица размера 10×10). Заметим, что y коммутирует с $x_{\alpha_2}(1)$, $x_{-\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_4}(1)$, а также с $w_{\alpha_3}(1)$. Воспользовавшись этими соотношениями, мы получим сразу (мы не используем пока все соотношения полностью), что

$$y=\begin{pmatrix}
y_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
y_{2,1} & y_{1,1} & 0 & y_{2,4} & 0 & y_{2,6} & 0 & y_{2,8} & y_{2,9} & y_{2,10}\\
y_{3,1} & 0 & y_{1,1} & y_{3,4} & y_{3,5} & y_{3,6} & 0 & y_{3,8} & y_{3,9} & y_{3,10}\\
0 & 0 & 0 & y_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
y_{5,1} & 0 & 0 & y_{5,4} & y_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & y_{6,4} & 0 & y_{1,1} & 0 & y_{6,8} & 0 & 0\\
y_{7,1} & 0 & 0 & y_{7,4} & y_{7,5} & 0 & y_{1,1} & y_{7,8} & y_{7,9} & y_{7,10}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{1,1} & 0 & 0\\
y_{9,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{9,8} & y_{1,1} & 0\\
0 & 0 & 0 & y_{10,4} & 0 & 0 & 0 & y_{10,8} & 0 & y_{1,1}
\end{pmatrix}.$$

Снова определитель матрицы y равен $y_{1,1}^{10}=1$, откуда $y_{1,1}$ обратим.

Воспользуемся соотношением $h_{\alpha_1}(-1)yh_{\alpha_1}(-1)y=E$, из которого следует $y_{2,1}=y_{2,9}=y_{2,10}=y_{3,5}=y_{3,6}=y_{5,4}=y_{6,4}=y_{9,8}=y_{9,1}=y_{10,8}=y_{7,8}=y_{7,9}=y_{7,10}=0$. Кроме того, $y_{1,1}^2=1$.

Пусть теперь $\rho(x_{\alpha_1}(t))=z$. Матрица z коммутирует с матрицей

$$h_{\alpha_1}(-1)=\mathrm{diag}[1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1],$$

откуда получается, что она блочно-диагональна по отношению к разделению базиса на части $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_4$, h_1, h_2 и $\pm\alpha_2$, $\pm\alpha_3$. Теперь используем то, что матрица z коммутирует с $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_4}(1)$, $x_{-\alpha_4}(1)$, $x_{\alpha_3}(1)$, после чего сразу получится, что матрица z принимает вид

$$\begin{pmatrix}
z_{1,1} & z_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2z_{1,10} & z_{1,10}\\
0 & z_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & z_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & z_{1,1} & 0 & z_{1,10} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -z_{1,10} & 0 & z_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{1,1} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{1,1} & 0 & 0\\
0 & z_{1,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{1,1} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{1,1}
\end{pmatrix}.$$

Отсюда, как и выше, получается, что элемент $z_{1,1}$ обратим.

Матрицы y и z связаны соотношениями

$$y\cdot x_{\alpha_3}(1)=w_{\alpha_2}(1)z^2w_{\alpha_2}(1)^{-1}x_{\alpha_3}(1)\cdot y,$$
$$z\cdot x_{\alpha_2}(1)=w_{\alpha_1}(1)yw_{\alpha_1}(1)^{-1}w_{\alpha_2}(1)z^2w_{\alpha_2}(1)^{-1}x_{\alpha_2}(1)\cdot z.$$

Из этих соотношений, учитывая обратимость $z_{1,1}$ и условие $y_{1,1}^2=1$, мы получаем, что $y=x_{\alpha_2}(z_{1,10})$, $z=x_{\alpha_1}(z_{1,10})$.

Случай $\mathbf{B}_2$ разобран.

Теперь рассмотрим систему корней $\mathbf{G}_2$, при этом напомним, что мы считаем двойку и тройку обратимыми.

В системе корней $\mathbf{G}_2$ 12 корней: $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$, $\pm\alpha_3=\pm(\alpha_1+\alpha_2)$, $\pm\alpha_4=\pm(2\alpha_1+\alpha_2)$, $\pm\alpha_5=\pm(3\alpha_1+\alpha_2)$, $\pm\alpha_6=\pm(3\alpha_1+2\alpha_2)$ (подробно матрицы для этой системы корней можно найти в работе [20]).

Для начала рассмотрим $y=\rho(x_{\alpha_2}(t))$. Непосредственно из того, что y коммутирует с $h_{\alpha_2}(-1)$, $x_{\alpha_2}(1)$, $x_{-\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_4}(1)$, $x_{-\alpha_4}(1)$, $x_{\alpha_6}(1)$, сразу получаем, что $y=y_1E+y_2X_{\alpha_2}+y_3X_{\alpha_2}^2$.

Соотношение $h_{\alpha_1}(-1)yh_{\alpha_1}(-1)y=E$ дает $y_1^2=1$ и $y_1y_3=-y_2^2$.

Соотношение $y\cdot x_{\alpha_5}(1)-w_{\alpha_1}(1)yw_{\alpha_1}(1)^{-1}x_{\alpha_5}(1)\cdot y=0$ дает $y_1^2=y_1$, откуда сразу $y_1=1$, после чего сразу $y_3=-y_2^2$. Таким образом, $y=x_{\alpha_2}(y_3)$.

Теперь пусть $z = \rho(x_{\alpha_1}(t))$. Снова непосредственно из коммутирования с $h_{\alpha_1}(-1)$, $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{-\alpha_2}(1)$, $x_{\alpha_5}(1)$, $x_{\alpha_6}(1)$, $x_{-\alpha_6}(1)$ получим, что z имеет вид

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & 0 & 0 & 2z_3 & -3z_3 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_3 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}$$

на части базиса $\{\pm\alpha_1, \pm\alpha_6, h_1, h_2\}$ и вид

$$\begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_3 & 0 & z_4 & 0 & z_5 \\ -3z_3 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & -2z_3 & 0 & -3z_4 \\ 3z_4 & 0 & 2z_3 & 0 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 & -3z_3 \\ -z_5 & 0 & -z_4 & 0 & z_3 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}$$

на части базиса $\{\pm\alpha_2, \pm\alpha_3, \pm\alpha_4, \pm\alpha_5\}$.

Из соотношения $h_{\alpha_2}(-1)zh_{\alpha_2}(-1)z = E$ получим, что $z_1 = 1$, $z_2 = -z_3^2$, $z_4 = -z_3^2$.

Теперь воспользуемся последним соотношением

$$\begin{aligned} &w_{\alpha_2}(1)zw_{\alpha_2}(1)^{-1}x_{\alpha_4}(1) \\ &\qquad = w_{\alpha_2}(1)w_{\alpha_1}(1)y^3w_{\alpha_1}(1)^{-1}w_{\alpha_2}(1)^{-1}x_{\alpha_4}(1)w_{\alpha_2}(1)zw_{\alpha_2}(1)^{-1}, \end{aligned}$$

которое свяжет y и z. Из этого соотношения получим $z_3 = -y_3$. Условие на z_5 получается из того, что элемент z должен лежать в группе Шевалле.

Таким образом, мы рассмотрели случай $\mathbf{G}_2$.

Теперь пусть $1/2 \in S$, система корней – одна из $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{F}_4$ (матрицы, соответствующие этим системам корней, можно найти в работах [21] и [19]).

Пусть y – это образ некоторого длинного простого корня (например, $y = \rho(x_{\alpha_i}(t))$), z – короткого ($z = \rho(x_{\alpha_j}(t))$). Мы можем считать, что для системы $\mathbf{B}_l$ $\alpha_i = \alpha_1$, $\alpha_j = \alpha_l$, для системы $\mathbf{C}_l$ $\alpha_i = \alpha_l$, $\alpha_j = \alpha_1$, для системы $\mathbf{F}_4$ $\alpha_i = \alpha_1$, $\alpha_j = \alpha_4$.

Заметим, что y и z коммутируют с $h_\alpha(-1)$ для определенных $\alpha \in \Phi$, откуда благодаря наличию обратимой двойки сразу получается, что матрицы y и z блочно-диагональны относительно некоторого разделения базиса.

Для длинного корня α любой из рассматриваемых систем рассуждение делится на следующие случаи:

1) $\pm\beta$ также являются длинными корнями, ортогональными к α;

2) $\pm\beta$ являются длинными корнями, образующими с корнями $\pm\alpha$ систему $\mathbf{A}_2$;

3) $\pm\beta$ являются короткими корнями, ортогональными к α;

4) $\pm\beta$ являются короткими корнями, образующими вместе с α систему $\mathbf{B}_2$.

В первом случае матрица y коммутирует и с $x_\beta(1)$, и с $x_{-\beta_1}(1)$, откуда следует, что y коммутирует с $E_{-\beta,\beta}$, $E_{\beta,-\beta}$. Это означает, что на части базиса $-\beta,\beta$ матрица y инвариантна и скалярна, кроме того, оставшаяся часть базиса также инвариантна. То же самое можно сказать о третьем случае.

Во втором случае благодаря коммутированию y с $h_\alpha(-1)$ и другими $h_\gamma(-1)$ для длинных корней, отличных от $\pm\beta$, часть базиса $\pm\beta$, $\pm(\alpha+\beta)$ отделится в отдельный диагональный блок.

Четвертый случай означает, что есть корни $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm(\alpha+\beta)$ (короткий) и $\pm(\alpha+2\beta)$ (длинный). При этом длинные корни $\pm(\alpha+2\beta)$ ортогональны к α и, как было показано выше, на них матрица y скалярна. Благодаря коммутированию с $h_\alpha(-1)$ часть базиса $\pm\alpha, h_1,\dots,h_l$ отделяется от части базиса $\pm\beta$, $\pm(\alpha+\beta)$. Осталось только показать, что часть базиса $\pm\beta$, $\pm(\alpha+\beta)$ отделится от части базиса $\pm\gamma,\pm(\alpha+\gamma)$, где γ – тоже корень четвертого типа. Если рассматриваемая система корней – $\mathbf{B}_l$, то α можно считать корнем $\alpha_1=e_1-e_2$, тогда β может быть лишь единственным корнем e_2. Если система корней – $\mathbf{C}_l$, то, например, $\alpha=2e_1$, тогда $\beta=e_i-e_1$, $\gamma=e_j-e_1$, $i,j>1$. В этом случае ясно, что соответствующие части базиса будут разделены благодаря коммутированию y с $h_{e_i}(-1)$ и $h_{e_j}(-1)$. Аналогичная ситуация происходит для системы корней $\mathbf{F}_4$.

Мы видим, что вся матрица y разделяется на диагональные блоки, где каждый блок или скалярен (и относится к некоторой паре корней $\pm\beta$), или относится к корням $\pm\beta$, $\pm(\alpha+\beta)$. Теперь мы можем воспользоваться результатами, связанными с системами корней $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{B}_2$, откуда получится, что $y=x_{\alpha_i}(s)$ для некоторого $s\in S$.

Теперь пусть α – короткий корень. Тогда рассуждения снова делятся на следующие случаи:

1) β – длинный корень, ортогональный к α;

2) β – длинный корень, образующий с α систему корней $\mathbf{B}_2$;

3) β – короткий корень, ортогональный к α и образующий с ним систему $\mathbf{B}_2$ (например, в системе корней $\mathbf{B}_l$ это так при $\alpha=e_i$, $\beta=e_j$);

4) β – короткий корень, ортогональный к α, $\alpha\pm\beta\notin\Phi$ (например, для системы корней $\mathbf{C}_l$ это так при $\alpha=e_1-e_2$, $\beta=e_3-e_4$);

5) β – короткий корень, образующий с α систему корней $\mathbf{A}_2$ (это так, например, в системе корней $\mathbf{C}_l$ при $\alpha=e_1-e_2$, $\beta=e_2-e_3$).

Эти случаи рассматриваются, как и для длинных корней.

Таким образом, матрицы y и z являются блочно-диагональными, блоки соответствуют разделению на системы корней $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, на скалярные матрицы размера 2×2, а также отделяется часть базиса $\pm\alpha, h_1,\dots,h_l$. На части базиса $h_3,\dots,h_l$ матрицы оказываются скалярными из-за коммутирования с соответствующими $w_{\alpha_3}(1),\dots,w_{\alpha_l}(1)$. Благодаря тому, что были отдельно рассмотрены случаи $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{B}_2$, мы видим, что на частях базиса $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm(\alpha+\beta)$, h_1, h_2, а также на частях базиса $\pm\alpha$, $\pm\gamma$, $\pm(\alpha+\gamma)$, $\pm(2\alpha+\gamma)$ (или $\pm(\alpha+2\gamma)$ в зависимости от длины корня α), h_1, h_2 матрицы совпадают с $x_\alpha(s)$ для некоторого $s\in R$. Так как на части базиса $\pm\alpha$, h_1, h_2 получается всегда одинаковое s, то s одно и то же на всех остальных частях базиса. Там, где матрица скалярна, скаляр везде одинаков благодаря коммутированию с элементами группы Вейля, переводящими корни, ортогональные к α, друг в друга, и оставляющими при этом α на месте. Ясно, что либо y (в системе корней $\mathbf{B}_l$, например), либо z (в системе корней $\mathbf{C}_l$), а в системе корней $\mathbf{F}_4$ и y, и z можно вложить в систему корней типа $\mathbf{A}_2$, в которой будет иметь место соотношение (например, напишем его для y)

$$y \cdot x_\gamma(1) = wyw^{-1}x_\gamma(1) \cdot y.$$

Если матрица y на своей скалярной части имела скаляр a, то выписанное соотношение может дать нам либо $a = 1$, либо $a = a^2$, что благодаря обратимости a тоже влечет $a = 1$. Таким образом, либо y, либо z обязательно совпадает с $x_\alpha(s)$ для некоторого $s \in R$.

Теперь мы можем считать (благодаря сопряжениям с помощью элементов группы Вейля), что y и z являются образами $x_\alpha(t)$ и $x_\beta(t)$, где α и β образуют систему корней $\mathbf{B}_2$. Ясно, что после выписывания соответствующих коммутационных соотношений мы получим, что искомый скаляр у матрицы, у которой он еще был не определен, также равен 1. Значит, $y = x_\alpha(s_1)$, $z = x_\beta(s_2)$. Кроме того, ясно (из рассмотренного выше случая $\mathbf{B}_2$), что $s_1 = s_2$.

Таким образом, лемма 3 доказана для систем корней $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{G}_2$.

Теперь нам требуется доказать лемму 3 для систем корней $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{D}_l$, $\mathbf{E}_l$, $l \geqslant 3$, однако без условия обратимости двойки.

Для начала покажем, что лемма верна для системы корней $\mathbf{A}_3$.

В системе корней $\mathbf{A}_3$ имеются корни $\pm\alpha_1$, $\pm\alpha_2$, $\pm\alpha_3$, $\pm\alpha_4 = \pm(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\pm\alpha_5 = \pm(\alpha_2+\alpha_3)$, $\pm\alpha_6 = \pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ (подробно матрицы для этой системы корней можно найти в работе [22]).

Пусть $y = \rho(x_{\alpha_1}(t))$.

Заметим, что имеется соотношение

$$(x_\alpha(1)x_\beta(1) - x_\alpha(1) - x_\beta(1) + E)^2 = E_{\alpha+\beta,-\alpha-\beta}$$

при $\alpha + \beta \in \Phi$.

Так как y коммутирует с $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_1+\alpha_2}(1)$, $x_{\alpha_3}(1)$, $x_{-\alpha_2}(1)$, $x_{-\alpha_3}(1)$, то y должен коммутировать и с $E_{\alpha_6,-\alpha_6}$, и с $E_{-\alpha_5,\alpha_5}$, и с $E_{\alpha_2,-\alpha_2}$. Кроме того, y коммутирует с $w_{\alpha_3}(1)$, откуда мы получаем, что строки матрицы y, соответствующие векторам базиса α_6, $-\alpha_5$, α_2, а также ее столбцы, соответствующие векторам $-\alpha_6$, α_5, $-\alpha_2$, имеют ненулевые элементы лишь на диагонали.

Далее напрямую воспользуемся коммутированием с выписанными выше матрицами, коммутационным соотношением и тем, что y лежит в соответствующей группе Шевалле, получим, что $y = x_{\alpha_1}(s)$, что нам и требуется.

Пусть, наконец, мы имеем дело с произвольной рассматриваемой системой корней, по-прежнему $y = \rho(x_{\alpha_1}(t))$.

Рассуждения делятся по отношению к α_1 на следующие случаи.

1. Сами $\pm\alpha_1$, а также h_1, h_2.

2. $h_3, \dots, h_l$.

3. $\pm\beta$, где корень β ортогонален к α_1, при этом существует еще один корень γ, ортогональный к α_1 и не ортогональный к $\pm\beta$ (это всегда так для системы корней $\mathbf{A}_l$, $l > 3$, но, например, для системы корней $\mathbf{D}_l$ это не так при $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\beta = e_1 + e_2$).

4. $\pm\beta$, где корень β ортогонален к α_1 и не удовлетворяет условию п. 3.

5. $\pm\beta$, где α_1 и β образуют систему корней $\mathbf{A}_2$.

Чтобы воспользоваться результатами, полученными для системы $\mathbf{A}_3$, нам достаточно доказать, что матрица y блочно-диагональна, где каждый блок – это блок одного из выписанных типов либо блок системы корней типа $\mathbf{A}_3$.

Для начала рассмотрим простой случай – тип 3. Для этого случая возьмем корень γ, ортогональный к α и такой, что $\beta+\gamma\in\Phi$ (ясно, что $\beta+\gamma$ также ортогонален к α_1). Так же, как описывалось при рассмотрении случая $\mathbf{A}_3$, мы получим, что y коммутирует с $E_{-\beta,\beta}$ и с $E_{\beta,-\beta}$, откуда сразу следует, что блок $\pm\beta$ отделен в матрице y, на этом блоке y скалярна. Воспользовавшись коммутационным соотношением, мы получим, что y на этом блоке единична. Таким образом, на частях базиса типа 3 матрица y полностью совпадает с $x_{\alpha_1}(s)$.

Кроме того, $(x_{\alpha_i}(1)-E+E_{\alpha_i,-\alpha_i})E_{-\alpha_i,-\alpha_i}=E_{h_i,-\alpha_i}$ коммутирует с y при $i\geqslant 3$. Отсюда сразу следует, что весь столбец матрицы y с номером h_i нулевой, кроме диагонального элемента. С другой стороны, $E_{\alpha_i,\alpha_i}(x_{\alpha_i}(1)-E+E_{\alpha_i,-\alpha_i})=E_{\alpha_i,h_{i-1}}-2E_{\alpha_i,h_i}+E_{\alpha_i,h_{i+1}}$ также коммутирует с y, откуда мы получаем, что между h_{i-1}-м, h_i-м и h_{i+1}-м столбцами матрицы y есть естественная зависимость, т.е. если мы покажем, что столбец с номером h_2 – нулевой, то и остальные столбцы окажутся нулевыми (кроме диагональных элементов, которые будут равны).

Отсюда и из рассмотренного случая $\mathbf{A}_3$ нам остается рассмотреть корни четвертого и пятого типов.

Для начала нам нужно показать, что если корни β и γ одного из этих типов ортогональны друг другу, то на месте β, γ в матрице y стоит нуль.

Пусть оба корня β и γ имеют четвертый тип. Очевидно, что в этом случае они вместе с корнем α_1 вкладываются в систему корней типа $\mathbf{D}_4$, т.е. для удобства можно считать, что $\alpha_1=e_1-e_2$, $\beta=e_3-e_4$, $\gamma=e_3+e_4$. Матрица y коммутирует с матрицами $x_{e_1\pm e_3}(1)$, $x_{e_1\pm e_4}(1)$, $x_{-e_2\pm e_3}(1)$, $x_{-e_2\pm e_4}(1)$, $x_{\pm e_3\pm e_4}(1)$, откуда, как и выше, получается, что y коммутирует с $E_{e_1\pm e_3,-e_1\mp e_3}$, $E_{e_1\pm e_4,-e_1\mp e_4}$, $E_{-e_2\pm e_3,e_2\mp e_3}$, $E_{-e_2\pm e_4,e_2\mp e_4}$.

Матрица $x_{e_1-e_3}(1)-E$ в строке, соответствующей корню e_3-e_4, имеет лишь один ненулевой элемент $E_{e_3-e_4,e_1-e_4}$, поэтому $E_{e_3-e_4,-e_1+e_4}=(x_{e_1-e_3}(1)-E)\cdot E_{e_1-e_4,-e_1+e_4}$ коммутирует с y. Если умножить $E_{e_3-e_4,-e_1+e_4}$ на $x_{e_1+e_3}(1)-E$, то получим $E_{e_3-e_4,e_3+e_4}$, с которой также коммутирует матрица y. Этого достаточно для того, чтобы на месте e_3-e_4, e_3+e_4 в матрице y стоял нуль, что нам и требовалось.

Заметим, что для систем корней $\mathbf{A}_l$ и $\mathbf{E}_l$ корней четвертого типа просто не бывает. Пусть рассматривается система корней $\mathbf{D}_l$, корень β имеет четвертый тип, корень γ – пятый тип, корни ортогональны друг другу. Такого не бывает в системе корней $\mathbf{D}_4$, поэтому можно считать, что $\alpha_1=e_1-e_2$, $\beta=e_1+e_2$. Однако в этом случае любой корень, ортогональный к β, ортогонален и к α_1. Ситуация невозможна.

Теперь пусть оба корня β и γ имеют пятый тип по отношению к α_1, при этом ортогональны друг другу. Ясно, что тогда их можно вложить в систему $\mathbf{A}_3$, т.е. можно считать, что $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\beta = e_3 - e_1$, $\gamma = e_2 - e_4$. В этом случае нули на нужных местах очевидно следуют из рассмотрения системы $\mathbf{A}_3$.

Мы полностью разобрали случай с ортогональными друг другу корнями β и γ.

Теперь предположим, что корни β и γ не ортогональны друг другу, т.е. образуют систему корней типа $\mathbf{A}_2$. Ясно, что в этом случае они не могут оба принадлежать к четвертому типу. Пусть корень β четвертого типа, корень γ – пятого. Это означает, что корни α_1, β, γ вместе образуют систему корней $\mathbf{A}_3$, при этом можно считать, что $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\gamma = e_2 - e_3$, $\beta = e_3 - e_4$. Этот случай уже был нами рассмотрен, благодаря коммутированию с соответствующими $x_\alpha(1)$ уже было получено, что на месте β, γ в матрице y стоит нуль.

Наконец, пусть β и γ оба принадлежат к пятому типу. Тогда можно считать, что $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\beta = e_2 - e_3$, $\gamma = e_4 - e_1$. Снова ясно, что данный случай рассмотрен тогда, когда мы рассматривали систему корней $\mathbf{A}_3$.

Таким образом, мы показали, что матрица y разбивается на диагональные блоки так, что к каждому блоку можно применять результаты, полученные для случая $\mathbf{A}_3$.

Следовательно, $y = x_{\alpha_1}(s)$, что и требовалось.

Значит, для всех рассматриваемых случаев мы получили, что $\rho(x_\alpha(t)) = x_\alpha(s)$, отображение $t \mapsto s$ не зависит от выбора корня $\alpha \in \Phi$. Обозначим данное отображение также через $\rho\colon R \to S$, нам нужно лишь доказать, что оно является изоморфизмом колец R и S.

Действительно, его биективность следует из того, что изначальный изоморфизм $\rho\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, S)$ биективен.

Его аддитивность следует из формулы

$$\begin{aligned} x_\alpha(\rho(t_1) + \rho(t_2)) &= x_\alpha(\rho(t_1)) x_\alpha(\rho(t_2)) = \rho(x_\alpha(t_1)) \cdot \rho(x_\alpha(t_2)) \\ &= \rho(x_\alpha(t_1) x_\alpha(t_2)) = \rho(x_\alpha(t_1 + t_2) = x_\alpha(\rho(t_1 + t_2)), \end{aligned}$$

а мультипликативность – из формулы

$$\begin{aligned} x_{\alpha_1+\alpha_2}(\rho(t_1)\rho(t_2)) &= [x_{\alpha_1}(\rho(t_1)), x_{\alpha_2}(\rho(t_2))] = \rho([x_{\alpha_1}(t_1), x_{\alpha_2}(t_2)]) \\ &= \rho(x_{\alpha_1+\alpha_2}(t_1 t_2)) = x_{\alpha_1+\alpha_2}(\rho(t_1 t_2)) \end{aligned}$$

для корней α_1 и α_2, образующих систему корней $\mathbf{A}_2$. Такой пары корней нельзя найти только в системе $\mathbf{B}_2$, для которой можно взять короткие корни $\alpha_1 = e_1$, $\alpha_2 = e_2$, формула будет иметь вид

$$[x_{\alpha_1}(t_1), x_{\alpha_2}(t_2)] = x_{\alpha_1+\alpha_2}(2t_1 t_2),$$

откуда получим

$$2\rho(t_1 t_2) = 2\rho(t_1)\rho(t_2),$$

чего полностью достаточно, так как для системы корней B_2 мы предполагаем двойку обратимой.

Лемма 3 доказана.

Теперь мы получили, что изначальный изоморфизм φ элементарных групп Шевалле $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ и $E_{\mathrm{ad}}(\Phi', S)$ есть композиция сопряжения ψ с помощью некоторой матрицы $A \in \mathrm{GL}_N(\widetilde{S})$ и кольцевого изоморфизма ρ, при этом мы знаем, что сопряжение ψ является автоморфизмом алгебры Ли $\mathscr{L}(\Phi, S)$.

Воспользуемся описанием таких автоморфизмов из работы [24] (см. [24; теорема 1]).

Лемма 4. *Пусть R – коммутативное ассоциативное кольцо, Φ – неприводимая система корней. Тогда любой автоморфизм ψ алгебры Ли $\mathscr{L}(\Phi, R)$ является композицией диаграммного и внутреннего автоморфизмов (под внутренним автоморфизмом здесь подразумевается сопряжение элементом $g \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$).*

Доказательство. Рассмотрим идеал J кольца $\mathbb{Z}[x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{N,N}]$, определяющий группу $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}} \mathscr{L}(\Phi)$. Над комплексными числами эта группа известна: идеал J распадается в произведение $J = J_1 J_2 \cdots J_d$ простых идеалов J_i, соответствующих неприводимым (= связным) компонентам $h_i G(\Phi)$ группы $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}} \mathscr{L}(\Phi)$, где h_i – это целочисленные матрицы диаграммных автоморфизмов.

Рассмотрим матрицу $A = (a_{p,q}) \in \mathrm{Aut}_R \mathscr{L}(\Phi, R)$. Тогда ясно, что $f(a_{p,q}) = 0$ для $f \in J$. Положим $I_i = \{f(a_{p,q}) \mid f \in J_i\} \triangleleft R$. Тогда

(i) $\prod I_i = 0\{0\}$;

(ii) $I_i + I_j = R$ при $i \neq j$ (иначе мы бы взяли факторкольцо по максимальному идеалу $M \supset I_i + I_j$ и получили бы матрицу A_M, принадлежащую пересечению двух неприводимых компонент группы $\mathrm{Aut}_{R/M} \mathscr{L}(\Phi, R/M)$, однако это пересечение пусто, так как R/M – поле).

Эти два условия (i) и (ii) дают нам, что кольцо R является прямой суммой $R = \bigoplus R/I_i$ (см. [25; гл. 2, § 1, предложение 5]).

Таким образом, матрица $A = \sum A_{I_i}$, элементы матрицы $A_{I_i} \in M_N(R/I_i)$ удовлетворяют уравнениям $f(a_{p,q}) = 0$ при $f \in I_i$. Значит, $A_{I_i} = h_i g_i \in h_i G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R/I_i)$, а $A = (\sum e_i h_i)(\sum g_i)$, где e_i – это единица кольца R/I_i.

Лемма доказана.

Таким образом, шаг 2 полностью доказан для присоединенных элементарных групп Шевалле, т.е. любой изоморфизм таких групп является композицией кольцевого изоморфизма и строго внутреннего и диаграммного автоморфизмов второй группы. Теорема 9 доказана.

§ 7. Теоремы об изоморфизмах и элементарной эквивалентности

Теорема 10. *Пусть $G_1 = G_\pi(\Phi, R)$ и $G_2 = G_{\pi'}(\Phi', S)$ (или $E_\pi(\Phi, R)$ и $E_{\pi'}(\Phi', S)$) – (элементарные) группы Шевалле с неприводимыми системами корней ранга, большего единицы, R, S – коммутативные кольца с единицей. Пусть, кроме того, для систем корней $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$ или $\mathbf{F}_4$ в кольцах обратима двойка, а для системы $\mathbf{G}_2$ – двойка и тройка.*

Если группы G_1 и G_2 изоморфны, то

$$\Phi \cong \Phi', \qquad R \cong S.$$

Доказательство. Факторгруппа по центру элементарной группы Шевалле $E_\pi(\Phi, R)$ для любого коммутативного кольца R совпадает с присоединенной элементарной группой Шевалле $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$.

Таким образом, если две элементарные группы Шевалле изоморфны, то и соответствующие присоединенные элементарные группы Шевалле изоморфны.

Однако мы доказали, что если элементарные присоединенные группы Шевалле рассматриваемого вида изоморфны, то соответствующие системы корней изоморфны, кольца изоморфны.

Значит, если две элементарные группы Шевалле рассматриваемых типов изоморфны, то системы корней изоморфны, кольца изоморфны.

Теперь пусть две группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$ и $G_{\pi'}(\Phi', S)$ рассматриваемых типов изоморфны. Тогда изоморфизм между ними по теореме 6 индуцирует изоморфизм между соответствующими элементарными подгруппами, т.е. по доказанному $\Phi \cong \Phi'$ и $R \cong S$, что и требовалось. Теорема доказана.

Теперь мы наконец-то готовы доказать теорему об элементарной эквивалентности групп Шевалле.

Теорема 11. *Пусть $G_1 = G_\pi(\Phi, R)$ и $G_2 = G_{\pi'}(\Phi', S)$ – группы Шевалле с неприводимыми системами корней ранга, большего единицы, R, S – коммутативные кольца с единицей. Пусть, кроме того, для систем корней $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$ или $\mathbf{F}_4$ в кольцах обратима двойка, а для системы $\mathbf{G}_2$ – двойка и тройка.*

Тогда если группы G_1 и G_2 элементарно эквивалентны, то

$$\Phi \cong \Phi', \qquad R \equiv S.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала некоторую группу Шевалле $G = G_\pi(\Phi, R)$ определенного типа над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть имеется некоторый ультрафильтр $\varkappa$ над множеством I, и мы рассматриваем ультрастепень

$$\widetilde{G} = \prod_{\varkappa} G_\pi(\Phi, R).$$

Лемма 5. *Имеет место изоморфизм*

$$\widetilde{G} \cong G_\pi(\Phi, \prod_{\varkappa} R).$$

Доказательство. Элементы группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$ – это матрицы из матричного кольца $M_N(R)$, удовлетворяющие некоторому конечному набору $p_1(a_{jk}), \dots, p_m(a_{jk})$ полиномиальных уравнений с целыми коэффициентами.

Набор уравнений определяется параметрами π, Φ и не зависит от кольца R, поэтому элементы группы Шевалле $G_\pi(\Phi, \prod_\varkappa R)$ – это матрицы с коэффициентами из кольца $\prod_\varkappa R$, удовлетворяющие тому же самому набору уравнений $p_1(a_{jk}), \dots, p_m(a_{jk})$. Каждый элемент кольца $\prod_\varkappa R$ – это набор $\{r^{(i)} \in R \mid i \in I\}$, где два набора $\{r^{(i)} \mid i \in I\}$ и $\{s^{(i)} \mid i \in I\}$ считаются равными, если множество $\{i \in I \mid r^{(i)} = s^{(i)}\} \in \varkappa$.

Соответственно, матрица $(\overline{r}_{jk})$, где $\overline{r}_{jk} = \{r_{jk}^{(i)} \in R \mid i \in I\}$ удовлетворяет набору уравнений $p_1(a_{jk}), \dots, p_m(a_{jk})$, если

$$\{i \in I \mid p_1(r_{jk}^{(i)}) = 0 \wedge \dots \wedge p_m(r_{jk}^{(i)}) = 0\} \in \varkappa.$$

Теперь посмотрим, из чего состоит группа $\widetilde{G}$.

Каждый элемент группы $\widetilde{G}$ – это набор матриц

$$\{(r_{jk}^{(i)}) \in G_\pi(\Phi, R) \mid i \in I\},$$

т.е. набор

$$\{(r_{jk}^{(i)}),\ i \in I \mid p_1(r_{jk}^{(i)}) = 0 \wedge \dots \wedge p_m(r_{jk}^{(i)}) = 0\}.$$

Два таких набора $\{(r_{jk}^{(i)}) \mid i \in I\}$ и $\{(s_{jk}^{(i)}) \mid i \in I\}$ считаются равными, если

$$\{i \in I \mid (r_{jk}^{(i)}) = (s_{jk}^{(i)})\} \in \varkappa.$$

Построим отображение μ из $\widetilde{G}$ в $G_\pi(\Phi, \prod_\varkappa R)$ по следующему правилу: элемент

$$\{(r_{jk}^{(i)}) \mid i \in I\}$$

отображается под действием μ в матрицу

$$(\{r_{jk}^{(i)} \mid i \in I\}).$$

Так как каждая исходная матрица $(r_{jk}^{(i)})$ в наборе содержалась в группе Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, т.е. удовлетворяла нашим полиномиальным уравнениям, то и образ будет лежать в группе $G_\pi(\Phi, \prod_\varkappa R)$.

Чтобы показать, что построенное отображение корректно, мы должны проверить, что если два набора матриц

$$\{(r_{jk}^{(i)}) \mid i \in I\} \quad \text{и} \quad \{(s_{jk}^{(i)}) \mid i \in I\}$$

равны в группе $\widetilde{G}$, то их образы равны в группе $G_\pi(\Phi, \prod_\varkappa R)$.

Равенство двух таких наборов, как мы уже знаем, эквивалентно условию

$$\widetilde{I}_{r,s} = \{i \in I \mid (r_{jk}^{(i)}) = (s_{jk}^{(i)})\} \in \varkappa.$$

Это значит, что если фиксировать пару индексов j, k, то множество $\{i \in I \mid r_{jk}^{(i)} = s_{jk}^{(i)}\}$ обязательно принадлежит ультрафильтру, так как является надмножеством множества $\widetilde{I}_{r,s}$. Следовательно, каждый элемент $\{r_{jk}^{(i)} \mid i \in I\} \in \prod_\varkappa R$ равен в кольце $\prod_\varkappa R$ соответствующему элементу $\{s_{jk}^{(i)} \mid i \in I\}$. Таким образом, матрицы $(\{r_{jk}^{(i)} \mid i \in I\})$ и $(\{s_{jk}^{(i)} \mid i \in I\})$ равны в группе Шевалле $G_\pi(\Phi, \prod_\varkappa R)$, что и требовалось для корректности отображения μ.

Теперь нам нужно доказать, что отображение μ является изоморфизмом групп $\widetilde{G}$ и $G_\pi(\Phi, \prod_\varkappa R)$. Гомоморфность μ очевидна, докажем инъективность и сюръективность.

Для начала пусть образы

$$\mu(\{(r_{jk}^{(i)}) \mid i \in I\}) \quad \text{и} \quad \mu(\{(s_{jk}^{(i)}) \mid i \in I\})$$

равны в группе $G_\pi(\Phi, \prod_\varkappa R)$. Это означает, что для каждой пары индексов j, k множество

$$I_{s,r}^{j,k} = \{i \in I \mid r_{jk}^{(i)} = s_{jk}^{(i)}\} \in \varkappa.$$

Но по определению ультрафильтра тогда

$$I_{s,r} = \bigcap_{j,k=1}^{N} I_{s,r}^{j,k} \in \varkappa,$$

т.е. элементы

$$\{(r_{jk}^{(i)}) \mid i \in I\} \text{ и } \{(s_{jk}^{(i)}) \mid i \in I\}$$

равны в группе $\widetilde{G}$. Значит, отображение μ инъективно.

Для доказательства сюръективности отображения μ просто возьмем для любого представителя

$$(\{r_{jk}^{(i)} \mid i \in I\}) \in G_\pi(\Phi, \prod_\varkappa R)$$

эквивалентный ему элемент, у которого

$$\{i \in I \mid p_1(r_{jk}^{(i)}) = 0 \wedge \dots \wedge p_m(r_{jk}^{(i)}) = 0\} = I.$$

Для такого элемента, очевидно, есть прообраз при отображении μ, что нам и требуется.

Таким образом, μ – изоморфизм. Лемма 5 доказана.

Теперь пусть у нас имеются две группы Шевалле

$$G_\pi(\Phi, R), \qquad G_{\pi'}(\Phi', S)$$

рассматриваемых в теореме типов, и пусть они элементарно эквивалентны.

По теореме Кейслера–Шелаха об изоморфизме это равносильно существованию ультрафильтра $\varkappa$ такого, что

$$\prod_\varkappa G_\pi(\Phi, R) \cong \prod_\varkappa G_{\pi'}(\Phi', S),$$

что, в свою очередь, по доказанной только что лемме 5 равносильно изоморфности

$$G_\pi(\Phi, \prod_\varkappa R) \cong G_{\pi'}(\Phi', \prod_\varkappa S).$$

Заметим, что условия типа существования $1/2$ или $1/3$ в кольце сохраняются при переходе к ультрастепени, поэтому данные группы Шевалле также удовлетворяют условиям теоремы 10, т.е. обязательно

$$\Phi \cong \Phi', \qquad \prod_\varkappa R \cong \prod_\varkappa S,$$

откуда, в свою очередь, следует

$$\Phi \cong \Phi', \qquad R \equiv S.$$

Теорема 11 доказана.

Список литературы

[1] E. I. Bunina, “Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings”, *J. Algebra*, **355**:1 (2012), 154–170.

[2] Е. И. Бунина, “Элементарная эквивалентность групп Шевалле над полями”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:8 (2006), 29–77; англ. пер.: E. I. Bunina, “Elementary equivalence of Chevalley groups over fields”, *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), **152**:2 (2008), 155–190.

[3] Е. И. Бунина, “Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами”, *Матем. сб.*, **201**:3 (2010), 3–20; англ. пер.: E. I. Bunina, “Elementary equivalence of Chevalley groups over local rings”, *Sb. Math.*, **201**:3 (2010), 321–337.

[4] Е. И. Бунина, А. В. Михалев, А. Г. Пинус, *Элементарная и близкие к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр*, МЦНМО, М., 2015, 360 с.

[5] Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003, 216 с.; пер. с англ.: J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, 2nd rev. print., Grad. Texts in Math., **9**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1978, xii+171 pp.

[6] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Гл. IV–VI. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней, Элементы математики, Мир, М., 1972, 334 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc.* XXXIV. *Groupes et algèbres de Lie. Ch.* IV: *Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Ch.* V: *Groupes engendrés par des réflexions. Ch.* VI: *Systèmes de racines*, Actualites Sci. Indust., **1337**, Hermann, Paris, 1968, 288 pp.

[7] Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975, 262 с.; пер. с англ.: R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale Univ., New Haven, CT, 1968, iii+277 pp.

[8] R. W. Carter, *Simple groups of Lie type*, Reprint of 1972 original, Wiley Classics Lib., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989, x+335 pp.

[9] N. Vavilov, E. Plotkin, “Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations”, *Acta Appl. Math.*, **45**:1 (1996), 73–113.

[10] C. Chevalley, “Certain schémas des groupes semi-simples”, *Séminaire Bourbaki*, v. 6, Année 1960/61, Soc. Math. France, Paris, 1995, 219–234.

[11] А. Борель, “Свойства и линейные представления групп Шевалле”, *Семинар по алгебраическим группам*, Мир, М., 1973, 9–59; пер. с англ.: A. Borel, “Properties and linear representations of Chevalley groups”, *Seminar on algebraic groups and related finite groups* (Princeton, NJ, 1968/69), Lecture Notes in Math., **131**, Springer, Berlin, 1970, 1–55.

[12] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, v. I: *Géométrie algébrique*, *généralités*, *groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris; North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1970, xxvi+700 pp.

[13] N. A. Vavilov, “Structure of Chevalley groups over commutative rings”, *Nonassociative algebras and related topics* (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, 219–335.

[14] E. Abe, K. Suzuki, “On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings”, *Tôhoku Math. J.* (2), **28**:2 (1976), 185–198.

[15] L. N. Vaserstein, “On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings”, *Tôhoku Math. J.* (2), **38**:2 (1986), 219–230.

[16] S. Shelah, “Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers”, *Israel J. Math*, **10**:2 (1971), 224–233.

[17] H. J. Keisler, “Ultraproducts and elementary classes”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **64** = Indag. Math., **23** (1961), 477–495.

[18] Е. И. Бунина, “Автоморфизмы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с 1/2”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **15**:2 (2009), 35–59; англ. пер.: E. I. Bunina, “Automorphisms of Chevalley groups of types A_l, D_l, or E_l over local rings with 1/2”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **167**:6 (2010), 749–766.

[19] E. I. Bunina, “Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with 1/2”, *J. Algebra*, **323**:8 (2010), 2270–2289.

[20] Е. И. Бунина, “Автоморфизмы групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:4 (2007), 3–29; англ. пер.: E. I. Bunina, “Automorphisms of Chevalley groups of types B_2 and G_2 over local rings”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **155**:6 (2008), 795–814.

[21] Е. И. Бунина, “Автоморфизмы групп Шевалле типа B_l над локальными кольцами с 1/2”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **15**:7 (2009), 3–46; англ. пер.: E. I. Bunina, “Automorphisms of Chevalley groups of type B_l over local rings with 1/2”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **169**:5 (2010), 557–588.

[22] Е. И. Бунина, “Автоморфизмы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **15**:7 (2009), 47–80; англ. пер.: E. I. Bunina, “Automorphisms of Chevalley groups of types A_l, D_l, E_l over local rings without 1/2”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **169**:5 (2010), 589–613.

[23] Е. И. Бунина, “Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с 1/2”, *Алгебра и логика*, **48**:4 (2009), 443–470; англ. пер.: E. I. Bunina, “Automorphisms of elementary adjoint Chevalley groups of types A_l, D_l, and E_l over local rings with 1/2”, *Algebra and Logic*, **48**:4 (2009), 250–267.

[24] A. A. Klyachko, “Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras”, *J. Algebra*, **324**:10 (2010), 2608–2619.

[25] Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра*, Элементы математики, М., Мир, 1971; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc.* XXVII. *Algèbre commutative. Ch.* 1: *Modules plats. Ch.* 2: *Localisation*, Actualites Sci. Indust., **1290**, Hermann, Paris, 1961, 187 pp.

Елена Игоревна Бунина
(Elena I. Bunina)
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: helenbunina@gmail.com

Поступила в редакцию
20.01.2018 и 30.09.2018