

# Универсальная эквивалентность общих и специальных линейных групп над полями\*

Бунина Е.И., Калеева Г.А.  
Московский Университет имени М.В. Ломоносова

19 ноября 2016 г.

УДК 510.67, 512.54.0, 512.643

**Ключевые слова:** универсальная эквивалентность, общие линейные группы, специальные линейные группы

**Аннотация:**

В данной работе мы доказываем критерий универсальной эквивалентности линейных групп над полями. Доказано, что две полных или специальных линейных группы над полями универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда размерности групп совпадают, а поля универсально эквивалентны.

## 1 Введение

Данная работа посвящена изучению универсальных свойств полных и специальных линейных групп.

Впервые проблема связи выразимых в логике первого порядка свойств некоторых моделей со свойствами производных моделей была рассмотрена в 1961 г. в работе А. И. Мальцева [14]. В ней доказана теорема о необходимых и достаточных условиях элементарной эквивалентности линейных групп над полями, а именно: группы  $\mathbf{G}_n(K)$  и  $\mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}, \text{PGL}, \text{PSL}$ ;  $K, L$  — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда  $m = n$  и поля  $K$  и  $L$  элементарно эквивалентны. Дальнейшие исследования в этой области начались в 1992 г., когда К. И. Бейдар и А. В. Михалев [1] нашли единый подход к проблемам элементарной эквивалентности общих алгебраических структур и обобщили теорему Мальцева для случая, когда  $K$  и  $L$  являются телами и ассоциативными кольцами. Продолжением исследований в этой области явились работы Е. И. Буниной 1998—2010 гг. (см. [7], [8], [9], [10]), где результаты А. И. Мальцева были распространены на унитарные линейные группы над телами и ассоциативными кольцами с инволюцией, а также на группы Шевалле над полями и локальными кольцами.

Есть и иной путь, по которому может идти изучение вопроса, впервые поставленного Мальцевым, — это рассмотрение других видов эквивалентности. Мы можем объединить тео-

---

\*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10013)

рию, разрешив использование только одного вида кванторов, и рассматривать алгебраические структуры в рамках этой обедненной — универсальной — теории. Первые критерии универсальной эквивалентности были установлены Ю. Ш. Гуревичем и А. И. Кокориным для упорядоченных абелевых групп [12] в 1963 г., Н. Г. Хисамиевым для структурно упорядоченных абелевых групп [18] в 1966 г., а затем П. С. Эклофом для произвольных абелевых групп [2] в 1972 г. Позднее другими исследователями были получены результаты об универсальной эквивалентности таких структур, как разрешимые группы (Е. И. Тимошенко [17]), частично коммутативные нильпотентные группы (А. А. Мищенко и Е. И. Тимошенко [3]), частично коммутативные метабелевы алгебры Ли (Е. Н. Порошенко и Е. И. Тимошенко [4]).

Данная работа посвящена универсальной эквивалентности линейных групп над полями. Мы доказываем аналог теоремы Мальцева для универсальной эквивалентности полных и специальных линейных групп над полями, при этом отдельно рассматриваем случаи полей характеристики, отличной от двух, и характеристики два.

При доказательстве используются критерии универсальной эквивалентности, сформулированный А. Д. Таймановым в статье [16], результаты из книги “Элементарная и близкие к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр” Е. И. Буниной, А. В. Михалева, А. Г. Пинуса [11] и метод исследования линейных групп, предложенный О. О’Мирой и изложенный в лекциях [15].

## 2 Некоторые предварительные сведения

**Определение 1.** Формула  $\varphi$  сигнатуры  $\Sigma$  называется *универсальной*, если ее предваренная нормальная форма имеет вид

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n).$$

**Определение 2.** Формула  $\varphi$  сигнатуры  $\Sigma$  называется *экзистенциальной*, если ее предваренная нормальная форма имеет вид

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n).$$

**Определение 3.** Две алгебраические системы  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  сигнатуры  $\Sigma$  называются *универсально эквивалентными*, если для любого универсального предложения  $\varphi$  сигнатуры  $\Sigma$  выполнено

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Множество универсальных предложений  $\{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$  сигнатуры  $\Sigma$  называется *универсальной теорией* системы  $\mathfrak{A}$  и обозначается  $\text{Th}_\forall(\mathfrak{A})$ . Таким образом,  $\mathfrak{A} \equiv_\forall \mathfrak{B} \iff \text{Th}_\forall(\mathfrak{A}) = \text{Th}_\forall(\mathfrak{B})$ .

**Замечание 1.** В силу зависимости кванторов можно рассматривать экзистенциальную форму записи универсальных формул и  $\exists$ -теории вместо  $\forall$ -теорий.

**Определение 4.** Пусть  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  — алгебраические системы сигнатуры  $\Sigma$  с носителями  $A$  и  $B$  и  $f$  — отображение  $A \rightarrow B$ . Отображение  $f$  называется *частичным изоморфизмом*  $\mathfrak{A}$  в  $\mathfrak{B}$ , если выполнены следующие условия:

1.  $\text{dom}(f) \subset A$ ,  $\text{Im}(f) \subset B$ ;
2.  $f$  инъективен;
3.  $f$  сохраняет предикаты, функции и константы:

(а) Для  $P^n \in \Sigma$  и  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \text{dom}(f)$ ,

$$P_{\mathfrak{A}} a_0 \dots a_{n-1} \Leftrightarrow P_{\mathfrak{B}} f(a_0) \dots f(a_{n-1}).$$

(б) Для  $F^n \in \Sigma$  и  $a_0, \dots, a_{n-1}, a \in \text{dom}(f)$ ,

$$F_{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = a \Leftrightarrow F_{\mathfrak{B}}(f(a_0), \dots, f(a_{n-1})) = f(a).$$

(с) Для  $c \in \Sigma$  и  $a \in \text{dom}(f)$ ,

$$c_{\mathfrak{A}} = a \Leftrightarrow c_{\mathfrak{B}} = f(a).$$

**Определение 5.** Частичный изоморфизм  $f$ , у которого область определения конечна, называется *конечным частичным изоморфизмом*.

**Теорема 1** (Критерий универсальной эквивалентности, [16]). Пусть  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  — системы сигнатуры  $\Sigma$ . Для того, чтобы системы  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  были универсально эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для любой конечной подсигнатуры  $\Sigma_1 \subset \Sigma$  любая конечная подсистема системы  $\mathfrak{A}$  сигнатуры  $\Sigma_1$  была частично изоморфна некоторой подсистеме системы  $\mathfrak{B}$  той же сигнатуры, и наоборот.

Данная работа посвящена доказательству следующей теоремы:

**Теорема 2.** Пусть  $K$  и  $L$  — бесконечные поля. Группы  $\mathbf{G}_n(K)$  и  $\mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ) универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда  $n = m$  и поля  $K$  и  $L$  универсально эквивалентны.

**Замечание 2.** Если поля  $K$  и  $L$  конечны, то универсальная эквивалентность совпадает с изоморфизмом, и можно сослаться на следующую теорему, изложенную в лекциях [15].

**Теорема 3.** Пусть  $n$  и  $m$  — натуральные числа,  $n, m \geq 2$ ,  $K$  и  $L$  — произвольные поля. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $n = m$  и  $K \cong L$ ,
- 2)  $\text{GL}_n(K) \cong \text{GL}_m(L)$ ,
- 3)  $\text{SL}_n(K) \cong \text{SL}_m(L)$ .

Сначала докажем более простую импликацию.

**Предложение 1.** Пусть  $K$  и  $L$  — универсально эквивалентные бесконечные поля. Тогда для любого натурального  $n$   $\text{GL}_n(K) \equiv_{\forall} \text{GL}_n(L)$ ,  $\text{SL}_n(K) \equiv_{\forall} \text{SL}_n(L)$ .

*Доказательство.* Зададим линейные группы как подсистемы в  $K^{n^2}$ .

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) &= \left\{ (a_1, \dots, a_{n^2}) \in K^{n^2} \mid \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^n a_{(i-1)n+\sigma(i)} \neq 0 \right\}; \\ \mathrm{SL}_n(K) &= \left\{ (a_1 \dots a_{n^2}) \in K^{n^2} \mid \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^n a_{(i-1)n+\sigma(i)} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Умножение в  $\mathrm{GL}_n(K)$  и  $\mathrm{SL}_n(K)$  задается следующей формулой:

$$(a_1, \dots, a_{n^2}) \cdot (b_1, \dots, b_{n^2}) = (c_1, \dots, c_{n^2}),$$

где

$$c_k = c_{i(n-1)+j} = \sum_{l=1}^n a_{i(n-1)+l} \cdot b_{(l-1)n+j}, \quad k = 1, \dots, n^2, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Таким образом, любую конечную подсистему в  $\mathrm{GL}_n(K)$  или  $\mathrm{SL}_n(K)$  мы можем задать как конечную подсистему в  $K^{n^2}$ , так как поля  $K$  и  $L$  универсально эквивалентны, то для нее можем найти конечную частично изоморфную ей подсистему в  $L^{n^2}$ , а значит, для исходной подсистемы в  $\mathrm{GL}_n(K)$  или  $\mathrm{SL}_n(K)$  можем найти конечную частично изоморфную ей в  $\mathrm{GL}_n(L)$  или  $\mathrm{SL}_n(L)$  соответственно и наоборот.

Предложение доказано.  $\square$

Доказательство противоположной импликации разобьем на два случая: 1) характеристика полей  $K$  и  $L$  равна двум; 2) характеристики полей  $K$  и  $L$  отличны от двух.

### 3 Универсальная эквивалентность линейных групп над полями характеристики 2

В настоящей части работы докажем следующую теорему.

**Теорема 4.** Пусть  $K$  и  $L$  — бесконечные поля характеристики 2, группы  $\mathbf{G}_n(K)$  и  $\mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}$ ) универсально эквивалентны. Тогда  $n = m$  и поля  $K$  и  $L$  универсально эквивалентны.

Здесь и далее в этом параграфе все рассматриваемые поля имеют характеристику 2.

**Лемма 1.** Пусть поле  $K$  имеет характеристику 2,  $n = 2$  или  $n = 3$ . Пусть при этом  $A \in \mathrm{GL}_n(K)$  ( $A \in \mathrm{SL}_n(K)$ ),  $A \neq E$ ,  $A^2 = E$ . Тогда в некотором базисе матрица  $A$  имеет вид  $E + E_{12}$ .

*Доказательство.* Пусть  $V_0 = \mathrm{Ker}(A + E)$  — это ненулевое подпространство в  $K^n$ . Для любого вектора  $t \in V_0$  выполнено  $At = t$ . Так как  $A$  не единичный оператор, то  $\dim V_0 < n$ .

Рассмотрим вектор  $x \notin V_0$ . Если  $(A + E)x = \lambda x$ , то  $(A + E)^2 x = \lambda^2 x = 0$ , следовательно, учитывая  $x \neq 0$ ,  $\lambda = 0$ , а значит,  $x \in V_0$ . Противоречие.

Следовательно,  $(A + E)x = y$ ,  $x$  и  $y$  — линейно независимые векторы. Из этого же равенства получаем, что  $Ax = x + y$ . Действие оператора  $A$  на векторе  $y$ :  $Ay = A(Ax + x) = x + Ax = y$ . Отсюда сразу получаем, что при  $n = 2$  матрица оператора  $A$  в базисе  $\{y, x\}$  равна  $E + E_{12}$ .

Если  $n = 3$  и  $\dim V_0 = 2$ , то утверждение верно. Действительно, в базисе, состоящем из векторов  $y, x$  и некоторого вектора из  $V_0$ , линейно независимого с  $y$ , матрица оператора  $A$  имеет искомый вид. Предположим теперь, что  $\dim V_0 = 1$ . Дополним линейно независимую систему  $\{y, x\}$  до базиса вектором  $z$  и рассмотрим действие оператора  $A$  на векторе  $z$ :  $Az = z + h$ ,  $z$  и  $h$  линейно независимы. Тогда  $Ah = A(Az + z) = z + Az = h$ , значит  $h \in V_0$  и  $h = \mu y$ . Рассмотрим сумму  $Az + \mu Ax = z + \mu y + \mu x + \mu y = z + \mu x$ , отсюда следует, что  $z + \mu x \in V_0$ , значит  $z + \mu x = \nu y$ , что противоречит линейной независимости  $x, y, z$ . Утверждение доказано.  $\square$

Далее мы будем рассматривать два случая: когда в поле извлекаются корни третьей степени из единицы, т. е. существуют два таких числа  $\xi_1 \neq \xi_2$ , отличные от  $\xi_0 = 1$ , что  $\xi_1^3 = \xi_2^3 = 1$ , и противоположный случай — когда таких корней в поле нет.

### 3.1 Исследование свойств линейных групп, выражающихся экзистенциальной формулой, в случае, когда в поле извлекаются корни третьей степени из единицы

**Лемма 2.** Пусть в поле  $K$  характеристики 2 извлекаются корни третьей степени из единицы. Тогда в группе  $\text{GL}_n(K)$  существует подмножество максимум из  $3^n - 1$  попарно коммутирующих матриц порядка 3, в группе  $\text{SL}_n(K)$  — из  $3^{n-1} - 1$  попарно коммутирующих матриц порядка 3. В некотором базисе все они имеют вид  $\text{diag}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ , где все  $\xi_i$  — корни третьей степени из единицы.

*Доказательство.* Утверждение следует из того, что каждая такая матрица диагонализуема, а также из того, что множество попарно коммутирующих матриц имеет общий собственный вектор, таким образом, все эти матрицы имеют диагональный вид в общем базисе.  $\square$

Обозначим через  $\mathcal{A}(\text{GL}_n(K))$  ( $\mathcal{A}(\text{SL}_n(K))$ ) или просто  $\mathcal{A}$ , если понятно, о какой группе идет речь) некоторый фиксированный максимальный набор матриц вида  $\text{diag}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ , существование которого доказано в лемме 2.

**Лемма 3.** Пусть в поле  $K$  извлекаются корни третьей степени из единицы и  $n \geq 4$ . Тогда в группах  $\text{GL}_n(K)$  и  $\text{SL}_n(K)$  такая матрица порядка 2, что при ее сопряжении всеми матрицами из набора  $\mathcal{A}$  получаются ровно три различных коммутирующих между собой матрицы, имеет вид  $E + E_{ij}$  ( $i \neq j$ ) в базисе, в котором вид матриц системы  $\mathcal{A}$  не изменится.

*Доказательство.* Пусть для матрицы  $A$  выполнено:  $A \neq E$ ,  $A^2 = E$ , при сопряжении матрицы  $A$  всеми матрицами из набора  $\mathcal{A}$  получаются ровно три различные матрицы. Предположим, что в матрице  $A$  есть, по крайней мере, два внедиагональных ненулевых

элемента  $a_{pq}$  и  $a_{ts}$  таких, что  $(p, q) \neq (s, t)$ , тогда, сопрягая, можем добиться того, что  $a_{pq}$  и  $a_{ts}$  умножаются на любой корень третьей степени из единицы независимо друг от друга, т. е. получим более трех различных матриц сопряжением — противоречие. Пусть теперь  $(p, q) = (s, t)$  и других внедиагональных ненулевых элементов нет, тогда

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & a_{ii} & 0 & \dots & 0 & a_{ij} & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & & & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & a_{ji} & 0 & \dots & 0 & a_{jj} & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, нужно рассмотреть блок вида

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}.$$

При его сопряжении диагональными матрицами из системы  $\mathcal{A}$  получаются три матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{ii} & \xi^2 a_{ij} \\ \xi a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{ii} & \xi a_{ij} \\ \xi^2 a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix},$$

где  $\xi$  — неединичный корень третьей степени из 1.

Так как любые 2 из трех записанных выше матриц коммутируют, то получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ii} & \xi a_{ij} \\ \xi^2 a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{ii}^2 + \xi^2 a_{ij} a_{ji} & \xi a_{ii} a_{ij} + a_{ij} a_{jj} \\ a_{ii} a_{ji} + \xi^2 a_{ji} a_{jj} & \xi a_{ij} a_{ji} + a_{jj}^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{ii} & \xi a_{ij} \\ \xi^2 a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{ii}^2 + \xi a_{ij} a_{ji} & a_{ii} a_{ij} + \xi a_{ij} a_{jj} \\ \xi^2 a_{ii} a_{ji} + a_{ji} a_{jj} & \xi^2 a_{ij} a_{ji} + a_{jj}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

откуда, в частности, следует, что  $a_{ij} a_{ji} = 0$ . Учитывая условие  $A^2 = E$ , получаем, что  $a_{ii} = a_{jj} = 1$ .

Пусть  $a_{ij} \neq 0$ . Если  $a_{ij} \neq 1$ , то сделаем замену базиса, порожденную матрицей  $E + (a_{ij} + 1)E_{jj}$  (она коммутирует со всеми матрицами из системы  $\mathcal{A}$ ):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что и требовалось. □

**Лемма 4.** Пусть в поле  $K$  извлекаются корни третьей степени из единицы и  $n \geq 4$ . Тогда в группах  $\mathrm{GL}_n(K)$  и  $\mathrm{SL}_n(K)$  максимальный набор таких матриц порядка 2 с попарно различными централизаторами, что при сопряжении каждой из них всеми матрицами набора  $\mathcal{A}$  получаются ровно три различных матрицы и любые две из них коммутируют, состоит из  $n^2 - n$  матриц, имеющих вид  $E + c_{ij}E_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n; i \neq j, c_{ij} \in K^*$ ) в базисе, в котором вид матриц системы  $\mathcal{A}$  не изменится.

*Доказательство.* Из доказательства предыдущей леммы получаем, что все интересующие нас матрицы порядка 2 имеют в общем базисе (в котором вид матриц системы  $\mathcal{A}$  не изменится) требуемый вид. Учитывая, что они имеют попарно различные централизаторы, получаем, что их не более  $n^2 - n$  штук, и такое количество найдется.  $\square$

**Лемма 5.** Пусть в полях  $K$  и  $L$  характеристики 2 извлекаются корни третьей степени из единицы и известно, что  $\mathbf{G}_n(K) \equiv_{\forall} \mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \mathrm{GL}$  или  $\mathrm{SL}$ ). Тогда  $n = m$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathrm{GL}_n(K) \equiv_{\forall} \mathrm{GL}_m(L)$ . Рассмотрим экзистенциальную формулу

$$\exists A_1 \dots \exists A_{3^{N-1}-1} \left( \bigwedge_{i=1}^{3^{N-1}-1} (\neg A_i = E) \& \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{3^{N-1}-1} (\neg A_i = A_j) \& \right. \\ \left. \& \bigwedge_{i,j=1}^{3^{N-1}-1} (A_i A_j = A_j A_i) \& \bigwedge_{i=1}^{3^{N-1}-1} (A_i^3 = E) \right), \quad (1)$$

утверждающую наличие набора из  $3^{N-1} - 1$  попарно различных неединичных попарно коммутирующих матриц порядка 3. Наибольшее значение  $N$ , для которого формула (1) истинна в обеих группах, согласно лемме 2, одинаково и равно  $N = n + 1 = m + 1$ .

Аналогично в случае, когда  $\mathrm{SL}_n(K) \equiv_{\forall} \mathrm{SL}_m(L)$ , для наибольшего  $N$ , для которого формула (1) истинна в каждой паре групп, выполнено условие  $N = m = n$ .  $\square$

### 3.2 Исследование свойств линейных групп, выражающихся экзистенциальной формулой, в случае, когда в поле не извлекаются корни третьей степени из единицы

**Лемма 6.** Если в поле  $K$  характеристики 2 не извлекаются корни третьей степени из единицы, то в группах  $\mathrm{GL}_n(K)$  и  $\mathrm{SL}_n(K)$  любая матрица порядка три в некотором базисе имеет блочно-диагональный вид, где каждый блок — это одна из матриц  $E_{11} + E_{12} + E_{21}$ ,  $E_{12} + E_{21} + E_{22}$  или  $E$ . Максимальный набор попарно коммутирующих матриц порядка 3 состоит из  $3^{\lfloor n/2 \rfloor} - 1$  матриц, имеющих в некотором базисе блочно-диагональный вид, где каждый блок — это одна из матриц  $E_{11} + E_{12} + E_{21}$ ,  $E_{12} + E_{21} + E_{22}$  или  $E$ .

*Доказательство.* При доказательстве будем пользоваться приемом, изложенным в статье [5]. Рассмотрим такую неединичную матрицу  $A$ , что  $A^3 = E$ . Пусть  $\sigma = E + A + A^2$ .

Заметим, что  $\sigma^2 = \sigma$ . Пространство  $K^n$  раскладывается в сумму подпространств  $V_0 = \sigma K^n$  и  $V_1 = (E + \sigma)K^n$ , так как любой вектор из  $x \in K^n$  представим в виде  $x = \sigma x + (E + \sigma)x$ .

На подпространстве  $V_0$  оператор  $A$  действует тождественно. Действительно, если  $x \in V_0$ , то  $x = \sigma y$  для некоторого  $y \in K^n$ , тогда

$$Ax = A\sigma y = A(E + A + A^2)y = \sigma y = x.$$

Теперь покажем, что  $V_1 = \text{Кер } \sigma$ . Пусть  $x \in V_1$ , тогда  $x = (E + \sigma)y$  для некоторого  $y \in K^n$ . Далее,

$$\sigma x = \sigma(E + \sigma)y = (\sigma + \sigma^2)y = 0.$$

Из доказанного следует, что сумма  $V_0$  и  $V_1$  прямая:  $K^n = V_0 \oplus V_1$ .

Рассмотрим действие оператора  $A$  на подпространстве  $V_1$ . Предположим сначала, что  $x \in V_1$  — собственный вектор оператора  $A$ . Тогда  $Ax = \lambda x$ , значит,  $\lambda^3 = 1$ , поэтому  $\lambda = 1$ . Пусть теперь ненулевой вектор  $x \in V_1$  и не является собственным вектором оператора  $A$ . Тогда  $y = Ax \in V_1$  ( $x = (E + \sigma)t$  для некоторого  $t \in K^n$ ,  $y = Ax = A(E + \sigma)t = (E + \sigma)(At) \in V_1$ ),  $x$  и  $y$  — линейно независимые векторы. Действие оператора  $A$  на  $y$ :  $Ay = A^2x = (\sigma + A + E)x = y + x$ . Таким образом, подпространство  $V_1$  распадается в прямую сумму двумерных инвариантных подпространств оператора  $A$ .

Из доказанного выше следует, что матрица оператора  $A$  в некотором базисе имеет блочно-диагональный вид, где на диагонали стоят блоки одного из трех типов:

$$E, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Пусть  $\mathcal{B}(\text{GL}_n(K))$  ( $\mathcal{B}(\text{SL}_n(K))$ ) — некоторый фиксированный максимальный набор попарно коммутирующих матриц порядка 3 из леммы 6.

**Лемма 7.** Пусть в бесконечном поле  $K$  не извлекаются корни третьей степени из единицы и  $n > 5$ . Тогда в  $\text{GL}_n(K)$  и  $\text{SL}_n(K)$  матрица, имеющая в некотором базисе вид  $E + E_{12}$ , выделяется экзистенциальной формулой.

*Доказательство.* Матрицы каждого из наборов  $\mathcal{B}(\text{GL}_n(K))$  ( $\mathcal{B}(\text{SL}_n(K))$ ) в соответствующих группах выделяются экзистенциальной формулой: существует  $3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1$  различных попарно коммутирующих матриц порядка 3. Этот набор матриц разбивается на классы сопряженности — множества матриц, содержащих одинаковое количество неединичных блоков. Присвоим каждому классу номер, равный количеству неединичных блоков в каждой матрице класса. Таким образом, существует  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  классов сопряженности, в  $k$ -ом классе  $2^k C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^k$  матриц,  $k = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

Будем последовательно нумеровать матрицы из всех классов сопряженности по убыванию номеров классов и выписывать соответствующие соотношения попарной сопряженности матриц каждого класса в нашу формулу, при этом она останется экзистенциальной.

Покажем, что не существует биекции классов сопряженности, не оставляющей на месте первый класс. Достаточно доказать, что  $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < 2^k C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^k$  при  $1 < k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Так как  $n > 5$ ,

то  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil > 2$ , тогда при  $k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  получим  $2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < 1 \cdot 2^{\lceil n/2 \rceil}$ , а при  $1 < k < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  получим  $2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < 2^k \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil < 2^k \cdot C_{\lceil n/2 \rceil}^k$ .

Таким образом, мы можем выделить все матрицы, имеющие ровно один неединичный блок. Все эти матрицы разбиваются на пары взаимно обратных. Выберем из каждой пары по одной матрице и обозначим их  $A_1, \dots, A_{\lceil n/2 \rceil}$  и пусть  $\mathcal{C} = \{A_1, \dots, A_{\lceil n/2 \rceil}\}$ . Можем считать, что блоки размерности 2 идут подряд, а номер матрицы равен номеру места, на котором у нее стоит неединичный блок.

Рассмотрим матрицу  $B = (b_{ij})$ , коммутирующую с  $A_1$ , и докажем, что  $b_{1i} = b_{2i} = 0$ ,  $b_{i1} = b_{i2} = 0$ ,  $i = 3, \dots, n$ . Не умаляя общности, можем считать, что неединичный блок матрицы  $A_1$  равен  $E_{11} + E_{12} + E_{21}$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} & b_{13} + b_{23} & \dots & b_{1n} + b_{2n} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{12} & b_{11} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} + b_{22} & b_{21} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} + b_{32} & b_{31} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} + b_{n2} & b_{n1} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что  $b_{1i} = b_{1i} + b_{2i} = b_{2i} = 0$ ,  $b_{i1} = b_{i1} + b_{i2} = b_{i2} = 0$ ,  $i = 3, \dots, n$ .

Аналогично, если  $B = (b_{ij})$  коммутирует с  $A_m$ , то  $b_{2m-1,i} = b_{2m,i} = 0$ ,  $b_{i,2m-1} = b_{i,2m} = 0$ ,  $i = 1, \dots, 2m-1, 2m, \dots, n$ .

Теперь рассмотрим матрицу  $C$ , коммутирующую с  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$  из матриц  $A_i$  (можем считать, что это  $A_1, \dots, A_{\lceil n/2 \rceil - 1}$ , иначе сделаем замену базиса, переставляющую блоки) и имеющую порядок 2. Согласно доказанному выше, матрица  $C$  имеет блочно-диагональную структуру: у нее либо  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$  блоков размерности 2, либо  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$  блок размерности 2 и один блок (последний) размерности 3.

Кроме того, все блоки матрицы  $C$  в квадрате равны  $E$ , и все, кроме последнего, коммутируют с блоком порядка 3. Таким образом, для блока, коммутирующего с блоком порядка 3, имеем:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из матричных соотношений следует, что  $b = c$  и  $b(a+d) = 0$ . Если  $b = 0$ , то  $a = d = 1$ ,  $b = c = 0$ , иначе  $a = d$ , а так как  $a = b + d$ , то  $b = 0$ , значит, и  $c = 0$ , и снова  $a = d = 1$ .

Мы получили, что все, кроме последнего, блоки матрицы  $C$  — единичные, а последний имеет размерность 2 или 3 и порядок 2, значит, согласно лемме 1, в некотором базисе (в котором вид матриц системы  $\mathcal{B}$ , вообще говоря, изменится) матрица  $C$  имеет вид  $E + E_{12}$ .  $\square$

**Лемма 8.** Пусть в бесконечном поле  $K$  не извлекаются корни третьей степени из единицы и  $n > 5$ . Если  $n$  чётно, то в группах  $\mathrm{GL}_n(K)$  и  $\mathrm{SL}_n(K)$  для каждой матрицы из системы  $\mathcal{C}$  (определённой в доказательстве леммы 7) не найдётся двух таких различных коммутирующих между собой матриц порядка 2 с различными централизаторами, что они коммутируют со всеми матрицами из системы  $\mathcal{C}$ , кроме данной. Если  $n$  нечётно, то в группе  $\mathrm{SL}_n(K)$  для матрицы из системы  $\mathcal{C}$  существуют 2 таких различных коммутирующих между собой матрицы порядка 2 с различными централизаторами, что они коммутируют со всеми матрицами из системы  $\mathcal{C}$ , кроме данной.

*Доказательство.* Если  $n$  чётно, то, согласно доказательству леммы 7, матрица  $A_e$  порядка 2, коммутирующая со всеми, кроме одной (назовем ее  $B_e$  и будем считать, что у нее неединичный только первый блок), матрицами системы  $\mathcal{C}$  в некотором базисе (в котором все матрицы системы  $\mathcal{C}$ , кроме, быть может,  $B_e$ , будут иметь прежний вид, а у матрицы  $B_e$  может поменяться только вид первого блока) имеет вид

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & E & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E \end{pmatrix},$$

где все единичные блоки имеют размерность 2, а разбиение на блоки соответствует разбиению на блоки в матрицах системы  $\mathcal{C}$ . А все матрицы порядка 2, коммутирующие со всеми матрицами из  $\mathcal{C}$ , кроме  $B_e$ , а также с матрицей  $A_e$  в том же базисе имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

но централизатор каждой такой матрицы совпадает с централизатором матрицы  $A_e$ .

Пусть теперь  $n$  нечетно, тогда, согласно лемме 7, матрица  $A_o$  порядка 2, коммутирующая со всеми, кроме одной (назовем ее  $B_o$ ), матрицами системы  $\mathcal{C}$  в том же базисе имеет вид

$$A_o = \begin{pmatrix} \tilde{A}_o & & & \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{pmatrix},$$

где блок  $\tilde{A}_o$  имеет размерность 3, а все единичные блоки имеют размерность 2, и разбиение на блоки соответствует разбиению на блоки в матрицах системы  $\mathcal{C}$ . Тогда в качестве двух коммутирующих матриц порядка 2, имеющих различные централизаторы и коммутирующих со всеми матрицами системы  $\mathcal{C}$ , кроме  $B_o$ , мы можем взять следующие матрицы (в том же базисе):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана. □

Прежде чем доказывать лемму, аналогичную лемме 5, для случая полей, в которых не извлекаются корни третьей степени из единицы, сделаем несколько замечаний об экзистенциальных формулах, истинных в группах  $\text{GL}_n(K)$  и  $\text{SL}_n(K)$  при  $2 \leq n \leq 5$ .

При  $n = 2$  в группах  $\text{GL}_n(K)$  и  $\text{SL}_n(K)$  максимальный набор из попарно коммутирующих матриц порядка 3 состоит из двух матриц, а матрица порядка 2 обладает следующим свойством: любая коммутирующая с ней матрица порядка 2 имеет такой же централизатор.

При  $n = 3$  в группах  $\text{GL}_n(K)$  и  $\text{SL}_n(K)$  максимальный набор из попарно коммутирующих матриц порядка 3 также состоит из двух матриц, но найдутся 2 коммутирующие матрицы порядка 2 с различными централизаторами.

При  $n = 4$  и  $n = 5$  в группах  $\text{GL}_n(K)$  и  $\text{SL}_n(K)$  максимальный набор попарно коммутирующих матриц порядка 3 состоит из 8 матриц. Покажем, как в этом случае различить размерности. Заметим, что матрица, которая в некотором базисе имеет вид максимальной жордановой клетки с собственным значением 1, имеет наибольший среди всех матриц группы порядок вида  $2^k$  (возможно, есть матрицы с другой жордановой формой и таким же порядком, например, порядок 4 имеет жорданова клетка размерности 3 и 4). Поэтому при  $n = 4$  наибольшее такое  $k$ , что в группе есть элемент порядка  $2^k$  равно 2, порядок 4, как уже было замечено, имеет, например, жорданова клетка

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а при  $n = 5$  наибольший порядок вида  $2^k$  равен 8, это порядок матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 9.** Пусть в бесконечных полях  $K$  и  $L$  характеристики 2 не извлекаются корни третьей степени из единицы и известно, что  $\mathbf{G}_n(K) \equiv_{\forall} \mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}$  или  $\text{SL}$ ). Тогда  $n = m$ .

*Доказательство.* Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \exists A_1 \dots \exists A_{3^N-1} \left( \bigwedge_{i=1}^{3^N-1} (\neg A_i = E) \& \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{3^N-1} (\neg A_i = A_j) \& \right. \\ \left. \& \bigwedge_{i,j=1}^{3^N-1} (A_i A_j = A_j A_i) \& \bigwedge_{i=1}^{3^N-1} (A_i^3 = E) \right). \end{aligned}$$

В ней утверждается существование набора из  $3^N - 1$  различных попарно коммутирующих матриц порядка 3. Так как линейные группы универсально эквивалентны, то наибольшее  $N$ , при котором формула истинна в группах  $\mathbf{G}_n(K)$  и  $\mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ), одинаково и, согласно лемме ??,  $N = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .

Если  $N = 1$ , то формула

$$\begin{aligned} \exists A_1 \exists A_2 \exists C ((\neg A_1 = A_2) \& (\neg A_1 = E) \& (\neg A_2 = E) \& \\ \& (A_1 A_2 = A_2 A_1) \& (A_1^2 = E) \& (A_2^2 = E) \& (A_1 C = C A_1) \& (\neg A_2 C = C A_2)), \end{aligned}$$

утверждающая наличие в группе двух различных коммутирующих матриц порядка 2, имеющих различные централизаторы, либо одновременно истинна, либо одновременно ложна в обеих группах. Если она истинна, то  $n = m = 3$ , иначе  $n = m = 2$ .

Если  $N = 2$ , то наибольшее  $k$ , для которого в обеих группах истинна формула

$$\exists J \left( \bigwedge_{i=1}^{2^k-1} (\neg J^i = E) \& (J^{2^k} = E) \right),$$

одинаково. Если наибольшее значение  $k$  равно 2, то  $n = m = 4$ , а если  $k = 3$ , то  $n = m = 5$ .

Пусть теперь  $N \geq 3$ , значит,  $n, m \geq 6$ , и мы можем использовать приемы из лемм 7 и

8. Рассмотрим формулу

$$\begin{aligned}
& \exists A_{11} \dots \exists A_{1,2C_M^1} \exists A_{21} \dots A_{2,2^2 C_M^2} \dots \exists A_{M,1} \dots A_{M,2^M C_M^M} \\
& \quad \exists B_1 \exists B_2 \exists C \exists C_{k,i,j} (k = 1, \dots, M; i, j = 1, \dots, k) \\
& \quad \left( \bigwedge_{k=1}^M \bigwedge_{i=1}^{2^k C_M^k} (\neg A_{k,i} = E) \& \bigwedge_{k=1}^M \bigwedge_{i=1}^{2^k C_M^k} \bigwedge_{l=1}^M \bigwedge_{\substack{j=1 \\ (k,i) \neq (l,j)}}^{2^l C_M^l} (\neg A_{k,i} = A_{l,j}) \& \right. \\
& \quad \& \bigwedge_{k=1}^M \bigwedge_{i=1}^{2^k C_M^k} \bigwedge_{l=1}^M \bigwedge_{j=1}^{2^l C_M^l} (A_{k,i} A_{l,j} = A_{l,j} A_{k,i}) \& \bigwedge_{k=1}^M \bigwedge_{i=1}^{2^k C_M^k} (A_{k,i}^3 = E) \& \\
& \quad \& \bigwedge_{k=1}^M \bigwedge_{i=1}^{2^k C_M^k} \bigwedge_{j=1}^{2^k C_M^k} (A_{k,i} = C_{k,i,j}^{-1} A_{k,j} C_{k,i,j}) \& \bigwedge_{i=1}^{C_M^1} (A_{1,i} A_{1,i+C_M^1} = E) \& \\
& \quad \& (\neg B_1 = E) \& (\neg B_2 = E) \& \bigwedge_{i=1}^{C_M^1-1} (B_1 A_{1,i} = A_{1,i} B_1) \& \bigwedge_{i=1}^{C_M^1-1} (B_2 A_{1,i} = A_{1,i} B_2) \& \\
& \quad \left. \& (B_1^2 = E) \& (B_2^2 = E) \& (B_1 B_2 = B_2 B_1) \& (B_1 C = C B_1) \& (\neg B_2 C = C B_2) \right).
\end{aligned}$$

При  $M$ , равном целой части от половины размерности группы, эта формула выделяет среди матриц системы  $\mathcal{B}$  класс сопряженности, состоящий из матриц, имеющих ровно один неединичный блок (это  $A_{11}, \dots, A_{1,2C_M^1}$ ), и систему  $\mathcal{C}$  среди них,  $\mathcal{C} = \{A_{11}, \dots, A_{1,C_M^1}\}$ . Далее утверждается наличие двух коммутирующих матриц порядка 2 с различными централизаторами, коммутирующих со всеми матрицами системы  $\mathcal{C}$ , кроме  $A_{1,C_M^1}$ . Это предположение истинно или ложно одновременно в обеих группах. Если при  $N = M$  оно истинно в обеих группах, то  $n = m = 2M + 1$ , иначе  $n = m = 2M$ .  $\square$

### 3.3 Исследование свойств линейных групп, выражающихся экзистенциальной формулой, без предположения о наличии корней третьей степени из единицы

**Предложение 2.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику 2 и  $\mathbf{G}_n(K) \equiv_{\forall} \mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}$  или  $\text{SL}$ ). Тогда  $n = m$ .

*Доказательство.* Выпишем две формулы:

$$\begin{aligned}
& \exists A_1 \dots \exists A_{3^N-1} \left( \bigwedge_{i=1}^{3^N-1} (\neg A_i = E) \& \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{3^N-1} (\neg A_i = A_j) \& \right. \\
& \quad \left. \bigwedge_{i,j=1}^{3^N-1} (A_i A_j = A_j A_i) \& \bigwedge_{i=1}^{3^N-1} (A_i^3 = E) \right), \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\exists J \left( \bigwedge_{i=1}^{2^k-1} (\neg J^i = E) \& (J^{2^k} = E) \right). \quad (3)$$

Так как группы универсально эквивалентны, то наибольшее  $N$ , для которого истинна формула (2), одинаково для обеих групп. Поэтому в случае полных линейных групп порядок групп может быть равен  $N, 2N, 2N + 1$ , а в случае специальных линейных групп порядок групп может быть равен  $N + 1, 2N, 2N + 1$ .

Наибольшее  $k$ , для которого истинна формула (3), также одинаково. Учитывая тот факт, что клетка максимального размера с собственным значением 1 имеет порядок  $2^k$ , где  $k$  — такое наименьшее натуральное число, что  $2^k \geq n, 2^k \geq m$ , получаем:

$$\begin{aligned} 2^{k-1} < n \leq 2^k, \\ 2^{k-1} < m \leq 2^k. \end{aligned}$$

Поэтому для полных линейных групп возможны следующие случаи:

1) только одно из чисел  $N, 2N, 2N + 1$  принадлежит промежутку  $(2^{k-1}; 2^k]$ , тогда  $n = m$  и совпадает с этим числом, мы также узнаем, извлекаются ли в полях  $K$  и  $L$  корни третьей степени из единицы;

2)  $2N, 2N + 1 \in (2^{k-1}; 2^k]$ , тогда в полях  $K$  и  $L$  не извлекаются корни третьей степени из единицы, значит, можем применить лемму 9 и установить, что  $m = n$ .

Для специальных линейных групп, кроме случаев, рассмотренных выше (только одно из чисел  $N + 1, 2N, 2N + 1$  принадлежит промежутку  $(2^{k-1}; 2^k]$  и  $2N, 2N + 1 \in (2^{k-1}; 2^k]$ ), нужно рассмотреть случай  $N + 1, 2N \in (2^{k-1}; 2^k]$ . В этом случае  $N = 2^{k-1}$  и  $N + 1$  — размер наименьшей жордановой клетки, имеющей порядок  $2^k$ . В группе  $SL_{N+1}(K)$  у жордановой клетки размера  $N + 1$  централизатор коммутативен. Если  $N = 1$ , то порядок обеих групп равен  $N + 1 = 2N = 2$ . Если  $N > 1$ , то если в группах найдется матрица порядка  $2^k$  с некоммутативным централизатором, то порядок групп равен  $2N$ , иначе порядок равен  $N + 1$ . Действительно, при  $N = 2$  в группе порядка  $2N = 4$  имеются две некоммутирующие друг с другом матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

перестановочные с жордановой клеткой

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При  $N > 2$  разность  $2N - (N + 1) \geq 2$  и привести пример двух некоммутирующих матриц из централизатора жордановой клетки порядка  $2^k$  также нетрудно.

□

**Определение 6.** Назовем конечный частичный изоморфизм  $\Phi: \mathbf{G}_n(K) \rightarrow \mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ) *особым*, если  $\text{dom}(\Phi)$  содержит следующий конечный набор матриц: единичная матрица, максимальная совокупность попарно коммутирующих матриц порядка 3 (система матриц  $\mathcal{A}$  или  $\mathcal{B}$  в зависимости от наличия в поле корней третьей степени), все матрицы вида  $E + E_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n; i \neq j$ ) в соответствующем базисе, а также вспомогательные матрицы из формул, использованных при доказательстве леммы 9 и предложения 2 (их конечное число).

**Лемма 10.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику 2 и известно, что  $\mathbf{G}_n(K) \equiv_{\forall} \mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ). Тогда при любом особом конечном частичном изоморфизме

$$\Phi: \mathbf{G}_n(K) \rightarrow \mathbf{G}_m(L) \quad (\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL})$$

матрица  $E + E_{12}$  отобразится в матрицу, имеющую в некотором базисе вид  $E + E_{12}$ .

*Доказательство.* Согласно предложению 2, порядки групп  $n$  и  $m$  совпадают. Если  $n = m = 2$  или  $n = m = 3$ , то утверждение следует из леммы 1.

Пусть теперь  $n = m \geq 4$ . Из доказательства предложения 2 следует, что мы можем различить случаи, когда извлекаются и не извлекаются корни третьей степени в полях  $K$  и  $L$ . Если корни извлекаются, то утверждение следует из леммы 3, а если корни не извлекаются и  $n = m \geq 6$ , то из леммы 7. Таким образом, осталось рассмотреть два случая: корни третьей степени из единицы в полях не извлекаются, а  $n = m = 4$  или  $n = m = 5$ .

Рассмотрим сначала случай  $n = m = 4$ . Так как матрицы  $E + E_{12}$  и  $E + E_{13}$  сопряжены, то достаточно доказать, что образ матрицы  $E + E_{13}$  в некотором базисе имеет вид  $E + E_{13}$ . Действительно, матрицы порядка 4 в некотором базисе имеют вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Добавим условие некоммутативности централизатора (т.е. добавим в экзистенциальную формулу утверждение о существовании двух дополнительных матриц, экзистенциальность формулы не нарушится), ему будет удовлетворять только матрица  $A_2$ .  $A_2^2 = E + E_{13}$ . Таким образом, мы получили требуемое.

Пусть теперь  $n = 5$ . Как мы уже знаем, матрица, имеющая максимальный порядок, являющийся степенью двойки, — это максимальная жорданова клетка с собственным значением 1. Ее четвертая степень равна  $E + E_{15}$ . Значит, образ матрицы  $E + E_{15}$  при конечном частичном изоморфизме имеет в некотором базисе тот же вид, отсюда получаем утверждение леммы.  $\square$

Теперь мы знаем, что вид матрицы  $E + E_{12}$  при отображении посредством особого конечного частичного изоморфизма сохраняется, и далее можем воспользоваться результатом из спецкурса [6], а именно леммами 2.20 и 2.21. Следовательно, верна следующая

**Лемма 11.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику 2 и известно, что  $\mathbf{G}_n(K) \cong_{\forall} \mathbf{G}_n(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ). Тогда при любом особом конечном частичном изоморфизме

$$\Phi: \mathbf{G}_n(K) \rightarrow \mathbf{G}_m(L) \quad (\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL})$$

все матрицы вида  $E + E_{ij}$  переходят в матрицы, которые в некотором общем базисе имеют тот же вид.

### 3.4 Доказательство основной теоремы

**Определение 7.** Для данного элемента  $\alpha$  поля  $K$  матрицу  $E + \alpha E_{12} \in \text{GL}_n(K)$  ( $E + \alpha E_{12} \in \text{SL}_n(K)$ ) назовем *матрицей сложения*, а матрицу  $\text{diag}[\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1, \dots, 1]$  — *матрицей умножения*.

**Лемма 12.** При умножении матриц сложения, соответствующих элементам  $\alpha$  и  $\beta$ , получается матрица сложения, соответствующая элементу  $\alpha + \beta$ . При умножении матриц умножения, соответствующих элементам  $\alpha$  и  $\beta$ , получается матрица умножения, соответствующая элементу  $\alpha\beta$ .

*Доказательство.* Прямая проверка. □

**Лемма 13.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику 2 и

$$\mathbf{G}_n(K) \cong_{\forall} \mathbf{G}_m(L) \quad (\mathbf{G} = \text{GL или SL}).$$

Тогда при любом особом конечном частичном изоморфизме

$$\Phi: \mathbf{G}_n(K) \rightarrow \mathbf{G}_m(L) \quad (\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL})$$

матрицы сложения и умножения переходят в матрицы того же вида. Причем, если  $\Phi(\alpha E_{11} + \frac{1}{\alpha} E_{22}) = \beta E_{11} + \frac{1}{\beta}$  и  $\Phi(E + \alpha E_{12}) = E + \gamma E_{12}$ , то  $\beta = \gamma$ .

*Доказательство.* Центризатор матрицы  $E + E_{ij}$  ( $i \neq j$ ) состоит из всех таких матриц  $(a_{st})$ , у которых  $a_{si} = 0$ ,  $1 \leq s \leq n$ ,  $s \neq i$ ,  $a_{jt} = 0$ ,  $1 \leq t \leq n$ ,  $t \neq i$ ,  $a_{ii} = a_{jj}$ . Отсюда следует, что матрицы сложения характеризуются следующим свойством: это матрицы порядка 2, коммутирующие с теми и только теми матрицами из  $E + E_{ij}$  ( $i \neq j$ ), с которыми коммутирует  $E + E_{12}$ .

Докажем, что матрицы умножения — это ровно те матрицы  $A$ , для которых верно следующее:

$$\begin{aligned} A(E + E_{ij}) &= (E + E_{ij})A \quad (3 \leq i \leq n, 3 \leq j \leq n, i \neq j), \\ (A(E + E_{12})A^{-1})(E + E_{12}) &= (E + E_{12})(A(E + E_{12})A^{-1}), \\ (A(E + E_{21})A^{-1})(E + E_{21}) &= (E + E_{21})(A(E + E_{21})A^{-1}), \\ ((E + E_{12})(E + E_{21})(E + E_{12})A)^2 &= E. \end{aligned}$$

Из первого условия следует, что

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} A(E + E_{12})A^{-1} &= \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} + a_{22} & a_{11} + a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} * & * & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}^2 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

коммутирует с  $E + E_{12}$ , значит  $a_{21} = 0$ . Аналогично  $a_{12} = 0$ .

Теперь применим последнее соотношение. Так как

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

то получаем

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda E \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda E \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 E \end{pmatrix} = E, \end{aligned}$$

следовательно,  $a_{11}a_{22} = 1$ ,  $\lambda = 1$ .

Теперь докажем второе утверждение леммы. Пусть  $\Phi(E + \frac{1}{\alpha}E_{21}) = E + \delta E_{21}$  (то, что вид сохраняется, доказывается аналогично сохранению вида  $E + \alpha E_{12}$ ). В  $\text{GL}_n(K)$  ( $\text{SL}_n(K)$ ) выполнено следующее соотношение:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix},$$

поэтому в  $\text{GL}_n(L)$  ( $\text{SL}_n(L)$ ) выполнено:

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta & 1 + \gamma\delta \\ 1 + \gamma\delta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что  $\gamma\delta = 1$  и  $\beta = \gamma^2\delta = \gamma$ . Что и требовалось.  $\square$

*Доказательство теоремы 4.* Утверждение о совпадении порядков групп уже доказано в предложении 2. Используя критерий универсальной эквивалентности, покажем, что поля  $K$  и  $L$  универсально эквивалентны.

Пусть  $K_1 \subset K$  — некоторая конечная подмодель поля  $K$ . Наша задача — найти для нее конечно частично изоморфную ей подмодель  $L_1$  в поле  $L$ . Пусть  $G_1 \subset \mathbf{G}_n(K)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ) содержит все матрицы сложения  $E + \alpha E_{12}$  и умножения  $\text{diag}[\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1, \dots, 1]$  для всех  $\alpha \in K_1$ , а также набор попарно коммутирующих матриц порядка 3, составляющих систему  $\mathcal{A}$  или  $\mathcal{B}$  в зависимости от наличия в полях корней третьей степени из единицы, единичную матрицу, все матрицы  $E + E_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n; i \neq j$ ) и конечное число вспомогательных матриц из лемм 5, 9 и предложения 2. Так как группы универсально эквивалентны, то для подмодели  $G_1$  существует конечная подмодель  $G_2 \subset \mathbf{G}_n(K)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ), частично изоморфная  $G_1$ , причем конечный частичный изоморфизм  $\Phi: G_1 \rightarrow G_2$  является особым. Поэтому матрицы сложения и умножения переходят в матрицы того же вида, и если матрицы сложения  $S$  и  $P$  соответствовали одному элементу  $\alpha$  поля  $K$ , то и их образы  $\Phi(S)$  и  $\Phi(P)$  соответствуют одному и тому же элементу  $\beta$  поля  $L$ . Тогда  $L_1$  — множество всех элементов поля  $L$ , которые соответствуют парам образов матриц сложения и умножения для всех элементов из  $K_1$ . Теорема доказана.  $\square$

## 4 Универсальная эквивалентность линейных групп над полями характеристики, отличной от 2

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

**Теорема 5.** Пусть  $K$  и  $L$  — бесконечные поля,  $\text{char } K, \text{char } L \neq 2$ , группы  $\mathbf{G}_n(K)$  и  $\mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ) универсально эквивалентны. Тогда  $n = m$  и поля  $K$  и  $L$  универсально эквивалентны.

В этом параграфе все рассматриваемые поля имеют характеристику, отличную от 2, если специально не указано обратное.

## 4.1 Свойства линейных групп, выражающиеся экзистенциальной формулой

**Лемма 14.** Пусть  $K$  — поле,  $\text{char } K \neq 2$ ,  $n$  — натуральное число. В группе  $\text{GL}_n(K)$  существует подмножество максимум из  $2^n - 1$  попарно коммутирующих матриц порядка 2, а в группе  $\text{SL}_n(K)$  — из  $2^{n-1} - 1$  попарно коммутирующих матриц порядка 2.

*Доказательство.* Существует базис, в котором все попарно коммутирующие матрицы порядка 2 диагонализуются и имеют вид  $\text{diag}[\pm 1, \dots, \pm 1]$ , значит в  $\text{GL}_n(K)$   $2^n - 1$  попарно коммутирующих матриц порядка 2, а в  $\text{SL}_n(K)$  —  $2^{n-1} - 1$ .  $\square$

Обозначим через  $\mathcal{D}(\text{GL}_n(K))$  ( $\mathcal{D}(\text{SL}_n(K))$ ) или просто  $\mathcal{D}$ , если понятно, о какой группе идет речь) некоторый фиксированный максимальный набор попарно коммутирующих матриц порядка 2, существование которого доказано в лемме 14. Ясно, что набор матриц  $\mathcal{D}$  выделяется экзистенциальной формулой.

Заметим, что благодаря лемме 14 мы можем разделить случаи, когда поля имеют характеристику 2 и характеристику, отличную от 2. Действительно, справедлива следующая

**Лемма 15.** Пусть  $K$  и  $L$  — бесконечные поля произвольной характеристики, группы  $\mathbf{G}_n(K)$  и  $\mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ) универсально эквивалентны. Тогда либо  $\text{char } K = \text{char } L = 2$ , либо  $\text{char } K \neq 2$  и  $\text{char } L \neq 2$ .

*Доказательство.* Запишем следующую формулу:

$$\exists A_1 \dots \exists A_M \left( \bigwedge_{i=1}^M (\neg A_i = E) \& \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^M (\neg A_i = A_j) \& \bigwedge_{i,j=1}^M (A_i A_j = A_j A_i) \& \bigwedge_{i=1}^M (A_i^2 = E) \right).$$

Если для некоторого достаточно большого  $M$  она ложна в обеих группах, то характеристика обоих полей отлична от двух. В противном случае характеристика полей равна двум. Действительно, так как поле бесконечно, то для любого сколь угодно большого  $M$  набор матриц вида  $E + \alpha_i E_{12}$ , где  $\alpha_1, \dots, \alpha_M$  — различные элементы поля, можно взять в качестве  $A_1, \dots, A_M$ .  $\square$

Все попарно коммутирующие инволюции из системы  $\mathcal{D}$  разбиваются на классы сопряженности, каждый класс состоит из матриц, у которых на диагонали стоит одинаковое количество  $(-1)$ .

**Предложение 3.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику, отличную от 2, и  $\mathbf{G}_n(K) \equiv_{\forall} \mathbf{G}_m(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ). Тогда  $n = m$ .

*Доказательство.* Выпишем формулу:

$$\exists A_1 \dots \exists A_{2^{N-1}} \left( \bigwedge_{i=1}^{2^{N-1}} (\neg A_i = E) \& \bigwedge_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{2^{N-1}} (\neg A_i = A_j) \& \bigwedge_{i,j=1}^{2^{N-1}} (A_i A_j = A_j A_i) \& \bigwedge_{i=1}^{2^{N-1}} (A_i^2 = E) \right). \quad (4)$$

Так как группы универсально эквивалентны, то наибольшее  $N$  такое, что формула (4) истинна в группах, одинаково для обеих групп. В случае общих линейных групп  $n = m = N$ , а в случае специальных линейных групп  $n = m = N + 1$ . □

**Лемма 16.** Пусть  $K$  — бесконечное поле,  $\text{char } K \neq 2$ . В группе  $\text{GL}_n(K)$  два подмножества системы  $\mathcal{D}$ , состоящие из матриц, у которых  $(-1)$  на диагонали встречается один или  $(n - 1)$  раз, выделяются экзистенциальной формулой. Если  $n$  нечетно, то в группе  $\text{SL}_n(K)$  подмножество системы  $\mathcal{D}$ , состоящее из матриц, у которых  $(-1)$  на диагонали встречается  $(n - 1)$  раз, выделяется экзистенциальной формулой.

*Доказательство.* Утверждение следует из того, что среди всех инволюций необходимые нам лежат в  $\text{GL}_n(K)$  в двух классах сопряженности, содержащих по  $n$  элементов, а в  $\text{SL}_n(K)$  в одном  $n$ -элементном классе сопряженности; во всех остальных классах сопряженности (кроме класса, состоящего из одной матрицы  $-E$ , в случае  $\text{GL}_n(K)$ ) инволюций больше. □

**Определение 8.** Обозначим через  $\mathcal{E}$  подмножество матриц системы  $\mathcal{D}$ , у которых  $(-1)$  стоит на диагонали один или  $(n - 1)$  раз. Согласно предыдущей лемме, такое множество матриц выделяется экзистенциальной формулой.

**Лемма 17.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику, отличную от 2, и известно, что  $\mathbf{G}_n(K) \equiv_{\forall} \mathbf{G}_n(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ), а также  $n$  нечетно в случае специальных линейных групп. Тогда при любом таком конечном частичном изоморфизме

$$\Phi: \mathbf{G}_n(K) \rightarrow \mathbf{G}_n(L) (\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL})$$

что  $\text{dom } \Phi$  содержит все матрицы системы  $\mathcal{D}$ , диагональная матрица отобразится в диагональную матрицу.

*Доказательство.* Утверждение следует из того, что диагональная матрица коммутирует со всеми матрицами системы  $\mathcal{E}$ , значит, таким же свойством обладает и ее образ, следовательно, образ является диагональной матрицей. □

**Лемма 18.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику, отличную от 2, и известно, что  $\mathbf{G}_n(K) \equiv_{\forall} \mathbf{G}_n(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ,  $n$  нечетно для специальных линейных групп). Тогда при любом таком конечном частичном изоморфизме

$$\Phi: \mathbf{G}_n(K) \rightarrow \mathbf{G}_n(L), \mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL},$$

что  $\text{dom } \Phi$  содержит все матрицы системы  $\mathcal{D}$ , а также конечный набор вспомогательных матриц из предыдущих лемм, матрица  $-E + E_{11} + E_{22} + E_{12} + E_{21}$  отобразится в матрицу, имеющую вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

в базисе, в котором вид матриц системы  $\mathcal{D}$  не изменится;

*Доказательство.* Как мы уже знаем, множество матриц  $\mathcal{E}$  выделяется экзистенциальной формулой. Известно, что  $-E + E_{11} + E_{22} + E_{21} + E_{12}$  коммутирует со всеми, кроме двух, матрицами системы  $\mathcal{E}$ . Поэтому

$$\Phi(-E + E_{11} + E_{22} + E_{21} + E_{12}) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

а так как  $(-E + E_{11} + E_{22} + E_{21} + E_{12})^2 = E$ , то

$$E = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} d_{11}^2 + d_{12}d_{21} & d_{11}d_{12} + d_{12}d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21}d_{11} + d_{22}d_{21} & d_{21}d_{12} + d_{22}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn}^2 \end{pmatrix}.$$

Далее,  $(-E + E_{11} + E_{22} + E_{21} + E_{12})(-E + 2E_{11})(-E + E_{11} + E_{22} + E_{21} + E_{12}) = -E + 2E_{22}$  (аналогично для случая, когда у матриц системы  $\mathcal{D}$   $(-1)$  на диагонали встречается один раз), поэтому справедливо соотношение (запишем его только для углового блока):

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\begin{pmatrix} d_{11}^2 - d_{12}d_{21} & d_{11}d_{12} - d_{12}d_{22} \\ d_{11}d_{21} - d_{21}d_{22} & d_{12}d_{21} - d_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из записанных выше соотношений получаем, что  $d_{12}d_{22} = 0$ . Если предположить, что  $d_{12} = 0$ , то тогда  $d_{22}^2 = 1$  и  $-d_{22}^2 = 1$  — противоречие. Отсюда следует, что  $d_{22} = 0$ , далее из  $d_{12}d_{21} + d_{22}^2 = 1$  получим  $d_{12}d_{21} = 1$ , следовательно,  $d_{11} = 0$ . Таким образом, образ матрицы  $-E + E_{11} + E_{22} + E_{21} + E_{12}$  имеет вид:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Сделав замену базиса про помощи диагональной матрицы  $\text{diag}[1/\alpha, 1, \dots, 1]$ , получим требуемое. □

**Лемма 19.** Пусть  $K, L$  — бесконечные поля,  $\text{char } K, \text{char } L \neq 2$ . При любом конечном частичном изоморфизме между группами  $\mathbf{G}_n(K)$  и  $\mathbf{G}_n(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$  и  $n$  нечетно

в случае специальных линейных групп), область которого содержит все попарно коммутирующие инволюции, матрицу  $-E + E_{11} + E_{22} + E_{12} + E_{21}$ , матрицу  $\text{diag}[2, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1]$  (матрицу  $\text{diag}[2, 1]$  при  $\mathbf{G} = \text{GL}$  и  $n = 2$ ), а также конечный набор вспомогательных матриц, набор матриц вида  $E + \alpha_i E_{12}$ ,  $i = 1, \dots, k$  отображаются в матрицы того же вида.

*Доказательство.* Мы уже знаем, что совокупность попарно коммутирующих инволюций сохраняет вид при конечном частичном изоморфизме, матрица  $-E + E_{11} + E_{22} + E_{12} + E_{21}$  переходит в матрицу  $E_{12} + E_{21} + \text{diag}[0, 0, \pm 1, \dots, \pm 1]$ , а диагональные матрицы — в диагональные.

Теперь перейдем к рассмотрению матрицы  $E + \alpha E_{12}$ . Она коммутирует с теми и только теми матрицами из множества  $\mathcal{E}$ , с которыми перестановочна  $-E + E_{11} + E_{22} + E_{12} + E_{21}$ , значит, ее образ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два случая:  $\text{char } K = 3$  и  $\text{char } K \neq 3$ .

Если  $\text{char } K = 3$ , то  $\text{char } L = 3$ , в противном случае в  $\mathbf{G}_n(\bar{L})$  найдется не более  $3^n$  различных попарно коммутирующих матриц порядка 3, а в  $\mathbf{G}_n(K)$  их сколь угодно много:  $E + \beta_i E_{12}$ , где  $\beta_i$  — всевозможные элементы поля.

Возьмем в системе матриц  $\mathcal{E}$  две матрицы: одну коммутирующую с  $E + \alpha E_{12}$  и одну не коммутирующую с ней. Произведение этих двух матриц — матрица вида  $\text{diag}[\pm 1, \dots, \pm 1]$ , у которой на диагонали  $(-1)$  встречается ровно 2 раза, можем считать, что это матрица  $E - 2E_{11} - 2E_{33}$ . Так как справедливы соотношения:  $(E - 2E_{11} - 2E_{33})(E + \alpha E_{12})(E - 2E_{11} - 2E_{33}) = (E + \alpha E_{12})^{-1} = (E + \alpha E_{12})^2$ , то можем записать для образов:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 \\ -c & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b & 0 & \dots & 0 \\ (a+d)c & bc + d^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\lambda_3 \cdots \lambda_n}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b & 0 & \dots & 0 \\ -c & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из первого равенства получаем, что  $\lambda_3 = \dots = \lambda_n = 1$ . А так как  $b$  и  $c$  одновременно не равны 0 (иначе образ матрицы  $E + \alpha E_{12}$  коммутирует со всеми матрицами системы  $\mathcal{E}$ , что неверно), то из  $-b = -\frac{b}{ad-bc}$  или  $-c = -\frac{c}{ad-bc}$ , получаем, что  $ad - bc = 1$ , далее замечаем,

что  $a = d, a + d = -1$ , значит,  $a = d = 1$  и, наконец,  $bc = 0$ . Так как образы матриц  $E + \alpha_i E_{12}$  попарно коммутируют, то в общем базисе ненулевой внедиагональный элемент матриц стоит на одном и том же месте. Таким образом, в случае  $\text{char } K = 3$  утверждение доказано.

Пусть теперь  $\text{char } K \neq 3$ , тогда и  $\text{char } L \neq 3$ . Справедливо соотношение

$$(\text{diag}[2, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1])(E + \alpha E_{12})(\text{diag}[2, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1])^{-1} = (E + \alpha E_{12})^2.$$

Образ матрицы  $\text{diag}[2, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1]$  при конечном частичном изоморфизме равен некоторой диагональной матрице  $\text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ , причем из того, что матрица  $(\text{diag}[2, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1])^2$  не коммутирует с  $-E + E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$ , следует, что  $(\text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n])^2$  не коммутирует с  $-E + E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$ , значит  $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$ . Теперь мы можем записать соотношение для образов:

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b\alpha_1}{\alpha_2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{c\alpha_2}{\alpha_1} & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd & 0 & \dots & 0 \\ ac + cd & bc + d^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:  $\lambda_i = 1, i = 3, \dots, n$ . Если  $bc \neq 0$ , то т. к.  $\frac{b\alpha_1}{\alpha_2} = b(a + d)$  и  $\frac{c\alpha_2}{\alpha_1} = c(a + d)$ , то  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = a + d = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ , следовательно,  $\alpha_1^2 = \alpha_2^2$ , что противоречит ранее доказанному. Значит,  $bc = 0$  и  $a = d = 1$ .

□

**Лемма 20.** Пусть  $K, L$  — бесконечные поля,  $\text{char } K, \text{char } L \neq 2$ . При любом конечном частичном изоморфизме между группами  $\mathbf{G}_n(K)$  и  $\mathbf{G}_n(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}_n(K)$ ,  $n$  нечетно в случае специальных линейных групп), область которого содержит все попарно коммутирующие инволюции, матрицу  $-E + E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$ , матрицу  $\text{diag}[2, 1, 1/2, 1, \dots, 1]$  ( $\text{diag}[2, 1]$  в случае  $\mathbf{G} = \text{GL}, n = 2$ ) и конечный набор вспомогательных матриц из предыдущих лемм, матрица  $E + E_{12}$  отобразится в матрицу  $E + E_{12}$ .

*Доказательство.* Ранее доказано, что образ матрицы  $E + E_{12}$  — это некоторая матрица  $E + \alpha E_{12}$ . Покажем, что  $\alpha = 1$ . Запишем соотношения, которые выполняются для элементов, лежащих в области конечного частичного изоморфизма (выписываем только угловой

блок):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right],$$

значит, для матрицы  $E + \alpha E_{12}$  выполнены соотношения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \left[ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

откуда немедленно следует, что  $\alpha = 1$ .  $\square$

**Лемма 21.** Пусть  $K, L$  — бесконечные поля,  $\text{char } K, \text{char } L \neq 2$ . При любом конечном частичном изоморфизме между группами  $\mathbf{G}_n(K)$  и  $\mathbf{G}_n(L)$  ( $\mathbf{G} = \text{GL}, \text{SL}$ ,  $n$  нечетно в случае  $\mathbf{G} = \text{SL}$ ), область которого содержит конечный набор матриц, использованных для доказательства предыдущих лемм, матрицы сложения переходят в матрицы сложения, а матрицы умножения переходят в матрицы умножения, причем если две матрицы соответствовали одному элементу поля  $K$ , то и их образы будут соответствовать одному элементу поля  $L$ .

*Доказательство.* То, что вид матриц сложения сохраняется при конечном частичном изоморфизме, уже доказано. Матрицу умножения можно выразить следующим образом (запишем соотношение только для углового блока):

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда угловой блок образа рассматриваемой матрицы умножения (диагональная матрица со всеми, кроме первых двух, единичными элементами на диагонали) будет равен произведению:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta - \beta^2\gamma & 1 - \beta\gamma \\ \beta\gamma - 1 & \gamma \end{pmatrix},$$

следовательно,  $\beta\gamma = 1$ , образ рассматриваемой матрицы умножения равен  $E + (\beta - 1)E_{11} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)E_{22}$ , что и требовалось.  $\square$

**Лемма 22.** Пусть  $K$  — бесконечное поле,  $\text{char } K \neq 2$ . Тогда в группе  $\text{SL}_2(K)$  матрица, имеющая в некотором базисе вид  $E + E_{12}$ , выделяется экзистенциальной формулой.

*Доказательство.* Докажем, что матрица  $A$ , удовлетворяющая формуле

$$\exists A \exists X \exists Y ((A^2 \neq E) \& (XAX^{-1}A = AXAX^{-1}) \& (X^2A \neq AX^2) \& (YAY^{-1} = A^4)),$$

в некотором базисе имеет требуемый вид.

Заметим, что для матрицы  $A = E + E_{12}$  формула истинна при  $X = \alpha E_{11} + \frac{1}{\alpha} E_{22}$ ,  $\alpha \in K$ ,  $\alpha \neq \pm 1$ ,  $Y = 2E_{11} + \frac{1}{2}E_{22}$ .

Пусть теперь для некоторой матрицы  $A$  истинна указанная выше формула. Если жорданова форма матрицы над  $\overline{K}$  не диагональна, то, учитывая, что  $A \in \text{SL}_2(K)$ , она равна

$$A_+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } A_- = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В первом случае все доказано, а второй не реализуется, т. к. матрица  $A_-^4 = E - 4E_{12}$  не сопряжена с  $A_-$  (у первой собственное значение 1, а у второй  $(-1)$ ).

Если матрица  $A$  диагонализируема над  $\overline{K}$ , то диагональная форма имеет вид  $\alpha E_{11} + \frac{1}{\alpha}$ , причем  $\alpha \neq \pm 1$ , т. к.  $A^2 \neq E$ . Введем обозначение для матрицы  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  и запишем соотношения из нашей формулы:

$$\begin{aligned} XAX^{-1}A &= \begin{pmatrix} \alpha a & \frac{b}{\alpha} \\ c\alpha & \frac{d}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha d & -\frac{b}{\alpha} \\ -c\alpha & \frac{a}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad\alpha^2 - bc & -ab + \frac{ab}{\alpha^2} \\ cd\alpha^2 - cd & -bc + \frac{ad}{\alpha^2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ad\alpha^2 - bc & ab - ab\alpha^2 \\ -\frac{cd}{\alpha^2} + cd & -bc + \frac{ad}{\alpha^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \frac{c}{\alpha} & \frac{d}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha d & -\alpha b \\ -\frac{c}{\alpha} & \frac{a}{\alpha} \end{pmatrix} = AXAX^{-1}, \end{aligned}$$

$$X^2A = \begin{pmatrix} (a^2 + bc)\alpha & \frac{ab+bd}{\alpha} \\ (ac + cd)\alpha & \frac{bc+d^2}{\alpha} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} (a^2 + bc)\alpha & (ab + bd)\alpha \\ \frac{ac+cd}{\alpha} & \frac{bc+d^2}{\alpha} \end{pmatrix} = AX^2.$$

Из условия  $XAX^{-1}A = AXAX^{-1}$ , получаем:

$$cd \left(2 - \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right) = 0 \text{ и } ab \left(2 - \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right) = 0,$$

а так как  $\alpha \neq \pm 1$ , то  $ab = cd = 0$ , но тогда

$$\frac{ab + bd}{\alpha} = (ab + bd)\alpha \text{ и } (ac + cd)\alpha = \frac{ac + cd}{\alpha},$$

что противоречит условию  $X^2A \neq AX^2$ . Таким образом,  $A$  не диагонализируема над  $\overline{K}$ , что и требовалось.  $\square$

**Лемма 23.** Пусть  $K$  — бесконечное поле,  $\text{char } K \neq 2$ . Тогда в группе  $\text{SL}_2(K)$  матрица, имеющая в некотором базисе вид  $-E_{12} + E_{21}$ , выделяется экзистенциальной формулой.

*Доказательство.* Мы уже умеем выделять экзистенциальной формулой матрицу  $E + E_{12}$ . Заметим, что справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть теперь некоторая матрица  $B \in \text{SL}_2(K)$  порядка 4 такова, что

$$(E + E_{12})B(E + E_{12})B(E + E_{12}) = B \text{ и } (E + E_{12})B^{-1}(E + E_{12})B^{-1}(E + E_{12}) = B.$$

Пусть  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , из записанных выше соотношений получим:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + c(2a + b + c + d) & a(a + c) + b(a + c) + (c + d)(a + b + c + d) \\ ac + c^2 + cd & c(a + b + c + 2d) + d^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ -ac + c^2 - cd & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $c(a + d) = 0$ . Если предположить, что  $c = 0$ , то  $a^2 = a$  и  $d^2 = d$ , значит,  $a = d = 1$ , далее  $1 + b + 1 + b + 1 = b$  и  $b = -3$ . Так как  $\text{char } K \neq 2$ , то

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является единичной матрицей только при  $\text{char } K = 3$ , но тогда сама  $B$  — единичная матрица. Противоречие. Следовательно,  $c \neq 0$ .

Значит,  $a = -d$ . В этом случае из равенства  $ac + c^2 + cd = c$  получим:  $c = 1$ . Если  $a = 0$ , то, т. к.  $B \in \text{SL}_2(K)$ ,  $b = -1$ , и утверждение доказано. В противном случае сделаем замену базиса, порожденную матрицей  $E - aE_{12}$  (коммутирует с  $E + E_{12}$ ), которая приведет  $B$  к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & b - a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось. □

**Лемма 24.** Пусть  $K$  — бесконечное поле,  $\text{char } K \neq 2$ . Тогда в группе  $\text{SL}_2(K)$  матрица, имеющая вид  $\text{diag}[\alpha, \frac{1}{\alpha}]$  в том базисе, в котором вид матриц  $E + E_{12}$  и  $-E_{12} + E_{21}$  не изменится, выделяется экзистенциальной формулой.

*Доказательство.* Заметим, что диагональная матрица обладает следующими свойствами:  $(\text{diag}[\alpha, \frac{1}{\alpha}])(E + E_{12})(\text{diag}[\alpha, \frac{1}{\alpha}])^{-1}$  коммутирует с  $E + E_{12}$ ,  $(-E_{12} + E_{21})(\text{diag}[\alpha, \frac{1}{\alpha}]) = (\text{diag}[\alpha, \frac{1}{\alpha}])^{-1}(-E_{12} + E_{21})$ .

Пусть некоторая матрица  $aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$  удовлетворяет выписанным выше свойствам диагональной матрицы. Тогда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - ac - bc & a^2 \\ -c^2 & ac - bc + ad \end{pmatrix}$$

коммутирует с  $E + E_{12}$ , значит  $c = 0$ ,  $ad = 1$ . Далее

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -\frac{1}{a} \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

значит,  $b = 0$ , и рассматриваемая матрица диагональна.  $\square$

**Лемма 25.** Пусть  $K, L$  — бесконечные поля,  $\text{char } K, \text{char } L \neq 2$ . При любом конечном частичном изоморфизме между группами  $\text{SL}_2(K)$  и  $\text{SL}_2(L)$ , область которого содержит набор матриц, использованных при доказательстве предыдущих лемм, матрицы сложения переходят в матрицы сложения, а матрицы умножения переходят в матрицы умножения, причем если две матрицы соответствовали одному элементу поля  $K$ , то и их образы будут соответствовать одному элементу поля  $L$ .

*Доказательство.* Из предыдущей леммы получаем, что вид матриц умножения сохраняется. Покажем, что сохраняется и вид матриц сложения. Пусть  $E + \alpha E_{12}$  — матрица сложения, она коммутирует с матрицей  $E + E_{12}$ , значит ее образ будет иметь вид  $\pm E + \beta E_{12}$ . Так как

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4,$$

то образ матрицы  $E + \alpha E_{12}$  равен  $E + \beta E_{12}$ , в противном случае для некоторой диагональной матрицы  $\text{diag}[\gamma, \frac{1}{\gamma}]$ , в которую отобразится  $\text{diag}[2, \frac{1}{2}]$  должно выполняться соотношение:

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^4,$$

но левая часть равенства равна

$$\begin{pmatrix} -1 & \beta\gamma^2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

а правая —

$$\begin{pmatrix} 1 & -4\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

таким образом, получили противоречие.

Осталось доказать, что образы двух матриц сложения и умножения, соответствующих одному элементу поля  $K$ , соответствуют одному элементу поля  $L$ . Доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 21, если заметить, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

**Лемма 26.** Пусть  $K$  — бесконечное поле,  $\text{char } K \neq 2$ ,  $n \geq 4$ ,  $n$  четно. Тогда в группе  $\text{SL}_n(K)$  подмножество системы  $\mathcal{D}$ , состоящее из матриц, имеющих ровно две  $(-1)$  на диагонали, выделяется экзистенциальной формулой.

*Доказательство.* Множество  $\mathcal{D}$  разбивается на классы сопряженности. Подмножества, состоящие из матриц, имеющих  $(n-2)$  или две  $(-1)$  на диагонали — это два класса сопряженности, состоящие из  $C_n^2$  элементов каждый. В остальных классах сопряженности, кроме класса, состоящего из единственного элемента  $-E$ , элементов больше. Если  $n = 4$ , то класс сопряженности, состоящий из  $C_n^2$  единственный, он является интересующим нас подмножеством.

Если  $n = 6$ , то, перемножив все элементы из класса сопряженности матриц с двумя  $(-1)$  на диагонали, получим  $-E$ , так как в этом классе  $C_5^1 = 5$  матриц, у которых на фиксированном месте стоит  $(-1)$ ; если перемножить все элементы класса сопряженности, содержащего матрицы с четырьмя  $(-1)$ , то получится единичная матрица, так как среди матриц этого класса сопряженности существует ровно  $C_5^3 = 10$  матриц с  $(-1)$  на некотором фиксированном месте. Таким образом, при  $n = 6$  мы можем выделить среди матриц системы  $\mathcal{D}$  те матрицы, у которых  $(-1)$  на диагонали встречается ровно 2 раза.

Если  $n \geq 8$ , то среди матриц с двумя  $(-1)$  на диагонали всегда найдутся три такие, что произведение первых двух равно третьей. Но при перемножении любых двух матриц, у которых  $(-1)$  на диагонали  $(n-2)$  штуки, мы получим матрицу из другого класса сопряженности.  $\square$

**Лемма 27.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику, отличную от 2,  $n$  четно,  $n \geq 4$  и известно, что  $\text{SL}_n(K) \cong_{\forall} \text{SL}_n(L)$ . Тогда при любом таком конечном частичном изоморфизме  $\Phi: \text{SL}_n(K) \rightarrow \text{SL}_n(L)$ , что  $\text{dom } \Phi$  содержит все матрицы системы  $\mathcal{D}$ , диагональная матрица отображается в диагональную матрицу.

*Доказательство.* Из предложения 3 следует, что  $n = t$ . Так как диагональная матрица коммутирует со всеми матрицами системы  $\mathcal{D}$ , то и ее образ коммутирует с образами матриц системы  $\mathcal{D}$ . Ранее показано, что матрицы системы  $\mathcal{D}$  выделяются экзистенциальной формулой, значит, их образы сохраняют вид, следовательно, образ нашей матрицы коммутирует со всеми матрицами системы  $\mathcal{D}$ , значит, является диагональной матрицей.  $\square$

**Лемма 28.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику, отличную от 2,  $n$  четно,  $n \geq 4$  и известно, что  $\text{SL}_n(K) \cong_{\forall} \text{SL}_n(L)$ . Тогда при любом таком конечном частичном изоморфизме  $\Phi: \text{SL}_n(K) \rightarrow \text{SL}_n(L)$ , что  $\text{dom } \Phi$  содержит все матрицы системы  $\mathcal{D}$ , а также конечный набор вспомогательных матриц из предыдущих лемм, матрица  $E - E_{11} - E_{22} - E_{12} + E_{21}$  отображается в матрицу, которая в некотором базисе (в котором вид матриц системы  $\mathcal{D}$  не изменится) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Введем обозначение для тех матриц системы  $\mathcal{D}$ , у которых ровно две  $(-1)$  на диагонали: через  $A_{ij}$ ,  $i < j$ , будем обозначать матрицу, у которой  $(-1)$  стоят на  $i$ -ом и  $j$ -ом местах.

Фиксируем некоторую матрицу с двумя  $(-1)$  на диагонали, в некотором базисе это  $A_{12}$ . Матрицы  $A_{ij}$ ,  $2 < i < j$ , характеризуются следующим свойством: это такие матрицы с двумя  $(-1)$  на диагонали, которые при умножении на  $A_{12}$  дают матрицу из  $\mathcal{D}$ , не сопряженную с  $A_{12}$ . Так как матрица  $E - E_{11} - E_{22} - E_{12} + E_{21}$  коммутирует со всеми матрицами  $A_{ij}$ ,  $2 < i < j$ , и с  $A_{12}$ , то это верно и для ее образа. Обозначим образ  $X$ . Следовательно,

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Далее,  $(E - E_{11} - E_{22} - E_{12} + E_{21})^2 = A_{12}$ , значит,  $X^2 = A_{12}$  и  $\lambda_i = \pm 1$ ,  $i = 3, \dots, n$ .

Заметим, что  $(E - E_{11} - E_{22} - E_{12} + E_{21})A_{13}(E - E_{11} - E_{22} - E_{12} + E_{21})^{-1} = A_{23}$ . В системе  $\mathcal{D}$  фиксируем такую матрицу с двумя  $(-1)$ , которая при умножении на  $A_{12}$  дает матрицу с двумя  $(-1)$  и назовем ее  $A_{13}$ , тогда  $A_{23} = A_{12}A_{13}$ . Для образов справедливо соотношение (запишем его только для левого верхнего блока):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из доказанного выше следует, что  $ad - bc = \pm 1$ . Рассмотрим сначала случай  $ad - bc = 1$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} -ad - bc & 2ab \\ -2cd & ad + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

следовательно,  $ad = ab = cd = 0$ ,  $bc = -1$  и окончательно получим:  $a = d = 0$ . Сделав замену базиса при помощи матрицы  $E + (-1 - \frac{1}{b})E_{11}$ , коммутирующей со всеми диагональными матрицами, получим искомый вид для матрицы  $X$ .

Осталось показать, что случай  $ad - bc = -1$  не реализуется. Аналогично предыдущему случаю получим, что  $a = d = 0$ ,  $bc = 1$ , но тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть  $X^2 = E$ , что противоречит условию  $X^2 = A_{12}$ . □

**Лемма 29.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику, отличную от 2,  $n$  четно,  $n \geq 4$  и известно, что  $\mathrm{SL}_n(K) \cong_{\forall} \mathrm{SL}_n(L)$ . Тогда при любом таком конечном частичном изоморфизме  $\Phi: \mathrm{SL}_n(K) \rightarrow \mathrm{SL}_n(L)$ , что  $\mathrm{dom} \Phi$  содержит все матрицы системы  $\mathcal{D}$ , матрицу  $E - E_{11} - E_{22} - E_{12} + E_{21}$  и матрицу  $\mathrm{diag}[2, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1]$ , а также конечный набор вспомогательных матриц из предыдущих лемм, матрица вида  $E + \alpha E_{12}$  отображается в матрицу того же вида.

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству леммы 19, если учесть, что роль матрицы  $-E + E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$  в данном случае играет матрица  $E - E_{11} - E_{22} - E_{12} + E_{21}$ . □

**Лемма 30.** Пусть бесконечные поля  $K$  и  $L$  имеют характеристику, отличную от 2,  $n$  четно,  $n \geq 4$  и известно, что  $\mathrm{SL}_n(K) \cong_{\forall} \mathrm{SL}_n(L)$ . Тогда для любого такого конечного частичного изоморфизма  $\Phi: \mathrm{SL}_n(K) \rightarrow \mathrm{SL}_n(L)$ , что  $\mathrm{dom} \Phi$  содержит все матрицы системы  $\mathcal{D}$ , матрицу  $E - E_{11} - E_{22} - E_{12} + E_{21}$  и матрицу  $\mathrm{diag}[2, 1, \frac{1}{2}, 1, \dots, 1]$ , а также конечный набор вспомогательных матриц из предыдущих лемм, верно  $\Phi(E + E_{12}) = E + E_{12}$ .

*Доказательство.* Так как выполняется следующее соотношение (снова выписаны только угловые блоки матриц):

$$A_{13} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_{12} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то, с учетом предыдущей леммы, для образов верно следующее:

$$A_{13} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_{12} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

таким образом,

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha^2 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

откуда получаем  $\alpha = 1$ , что и требовалось. □

Для завершения доказательства основной теоремы 2 воспользуемся ранее изложенными соображениями. Более подробно, мы уже умеем доказывать сохранение вида матриц сложения четного порядка в случае специальных линейных групп, про матрицы умножения мы знаем, что они сохраняют диагональный вид. Доказательство того, что матрицы умножения переходят в матрицы умножения, причем сохраняется соответствие пары матриц сложения и умножения одному элементу поля, полностью аналогично доказательству леммы 21 с учетом замечания из доказательства леммы 25. Теперь остается только почти дословно повторить рассуждение из доказательства теоремы 4 в условии теоремы 5. Так как благодаря лемме 15 мы можем различить случаи, в которых основные поля имеют характеристику 2 и характеристику, отличную от 2, то теорема 2 полностью доказана.

## Список литературы

- [1] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 29–35.
- [2] Eklof P. C. Some model theory for Abelian groups // J. Symbolic Logic. — 1972. — Vol. 37. — P. 335–342.

- [3] Mishchenko A. A., Timoshenko E. I. Universal equivalence of partially commutative nilpotent groups // *Siberian Math. J.* — 2011. — Vol. 52, No 5. — P. 884–891.
- [4] Poroshenko E. N., Timoshenko E. I. Universal equivalence of partially commutative metabelian Lie algebras // *J. of algebra.* — 2013. — Vol. 384. — P. 143–168.
- [5] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов  $A_l, D_l, E_l$  над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2009. — Т. 15, № 7. — С. 47–80.
- [6] Бунина Е. И. Применение метода локализации для описания автоморфизмов линейных групп над коммутативными кольцами // <http://halgebra.math.msu.su/wiki/lib/exe/fetch.php/specialcourses:speckurs10.pdf>
- [7] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // *Успехи мат. наук.* — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137–138.
- [8] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле // *Успехи мат. наук.* — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 157–158.
- [9] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами // *Мат. сб.* — 2010. — Т. 201, № 3. — С. 3–20.
- [10] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1265–1278.
- [11] Бунина Е. И., Михалев А. В., Пинус А. Г. Элементарная и близкие к ней логические эквивалентности классических и универсальных алгебр. — М.: МЦНМО, 2015.
- [12] Гуревич Ю. Ш., Кокорин А. И. Универсальная эквивалентность упорядоченных абелевых групп // *Алгебра и логика.* — 1963. — Т. 2, вып. 1. — С. 37–39.
- [13] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М.: Наука, 1987.
- [14] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // *Проблемы мат. и механики.* — 1961. — С. 110–132.
- [15] О’Мира О. Лекции о линейных группах // *Аutomорфизмы классических групп.* — М.: Мир, 1976.
- [16] Тайманов А. Д. Характеристики аксиоматизируемых классов моделей // *Алгебра и логика.* — 1962. — Т. 1, вып. 4. — С. 5–31.
- [17] Тимошенко Е. И. Об универсально эквивалентных разрешимых группах // *Алгебра и логика.* — 2000. — Т. 39, вып. 2. — С. 227–240.
- [18] Хисамиев Н. Г. Универсальная теория структурно упорядоченных абелевых групп // *Алгебра и логика.* — 1966. Т. 5, вып. 3. — С. 71–76.