2×2

Рассмотрим систему 2×2 над $\mathbb{R}$ и отображение плоскости $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с одной и той же *матрицей коэффициентов* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$(*) \quad \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \qquad\qquad \mathcal{A}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

Найдём логические связи между следующими условиями на коэффициенты a, b, c, d.

Система $(*)$ имеет:
(1) единственное решение при любых e, f;
(2) хотя бы одно решение при любых e, f;
(3) единственное (нулевое) решение при $e = f = 0$.

Отображение $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является:
$(1)'$ биективным;
$(2)'$ сюръективным;
$(3)'$ инъективным.

1. Докажите, что все шесть указанных условий равносильны между собой, а также равносильны следующим условиям:

(4) векторы (a, b) и (c, d) не коллинеарны;
(5) векторы (a, c) и (b, d) не коллинеарны;
(6) *определитель* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$ матрицы A не равен 0.

2. Формулы Крамера. Пусть выполнены все равносильные условия, указанные выше. Решите систему $(*)$ и задайте формулой преобразование $\mathcal{A}^{-1}$.

3. Опишите подмножества в $\mathbb{R}^2$, которые могут быть множествами решений системы $(*)$.

4. Геометрический смысл определителя. Докажите, что площадь параллелограмма, построенного на векторах (a, b) и (c, d) равна $|ad - bc|$. Как должны быть расположены указанные векторы, чтобы данный модуль раскрывался со знаком $+$?

Линейные преобразования плоскости. Так называется всякое преобразование $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее двум условиям:

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \text{ для всех } u, v \in \mathbb{R}^2 \quad \text{ и } \quad f(ku) = kf(u) \text{ для всех } k \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^2.$$

5. Докажите, что **а)** преобразование $\mathcal{A}$ линейно и **б)** обратно, всякое линейное преобразование $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задаётся формулой того же вида, что и $\mathcal{A}$.

Движения плоскости. Так называются биекции плоскости, сохраняющие расстояния.

6. При каких условиях на $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ преобразование $\mathcal{A}$ является движением?

7. Задайте формулами: а) поворот на угол φ вокруг точки $(0, 0)$ против часовой стрелки; б) симметрию относительно прямой $y = \operatorname{tg}\alpha\, x$.

8. Докажите, что всякое движение плоскости, оставляющее начало координат неподвижным, является линейным.

Теорема Шаля. Движения плоскости исчерпываются следующими преобразованиями: параллельные переносы, повороты и скользящие симметрии (композиции симметрий и параллельных переносов вдоль их осей). В частности, движения с неподвижной точкой O — это в точности повороты вокруг O и симметрии относительно прямых, проходящих через O.

9*. Целочисленная решётка. Для целых a, b, c, d рассмотрим преобразование $\mathcal{B}\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, заданное той же формулой, что и $\mathcal{A}$. Найдите критерий биективности этого преобразования.

10*. Докажите, что для параллелограмма P с вершинами в $\mathbb{Z}^2$ равносильны условия:
(1) P не содержит ни внутри себя, ни на границе целочисленных точек, кроме вершин;
(2) площадь P равна 1.

Метод Гаусса

Рассмотрим линейную систему $AX=B$ над полем K (можно считать, что $K=\mathbb{Q},\mathbb{R}$):

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}\qquad (A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)\qquad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования строк расширенной матрицы $(A|B)$:
— *1-го типа* — прибавление к одной строке другой, умноженной на элемент поля;
— *2-го типа* — перестановка двух строк местами;
— *3-го типа* — умножение строки на ненулевой элемент поля.

Первый ненулевой элемент строки называется её *лидером*. Матрица имеет *ступенчатый вид*, если лидер каждой строки, начиная со второй, стоит строго правее лидера любой строки, стоящей выше. (В частности, нулевая матрица и любая $(1\times n)$-матрица имеют ступенчатый вид.) Ступенчатый вид называется *главным*, если все лидеры равны единице и все элементы над лидерами равны нулю. Будем писать $(A|B)\rightsquigarrow(A'|B')$, если матрица $(A|B)$ приводится элементарными преобразованиями строк к матрице $(A'|B')$.

Метод Гаусса исключения неизвестных основан на следующих утверждениях.

1. Если $(A|B)\rightsquigarrow(A'|B')$, то $AX=B\iff A'X=B'$.

2. Для всякой матрицы A существует такая ступенчатая матрица A', что $A\rightsquigarrow A'$, причём во всех таких матрицах A' лидеры стоят в столбцах с одними и теми же номерами и среди всех таких матриц A' ровно одна имеет главный ступенчатый вид.

Все неизвестные $x_1,\ldots,x_n$ делятся на *главные* — стоящие в столбцах с лидерами в некотором (или, что то же, в любом) ступенчатом виде, и *свободные* — все остальные.

3. Пусть $(A|B)\rightsquigarrow(A'|B')$ и матрица A' имеет ступенчатый вид. Тогда система $AX=B$
— совместна в точности тогда, когда матрица $(A'|B')$ не содержит строк вида $(0,\ldots,0|b\neq 0)$ (соответствующие уравнения $0x_1+\ldots+0x_n=b\neq 0$ называются *экзотическими*);
— определена в точности тогда, когда она совместна и в каждом столбце матрицы $(A'|B')$ есть лидер (последнее равносильно отсутствию свободных неизвестных).

4. Если система $AX=B$ определена и матрица A имеет главный ступенчатый вид, то (единственным) решением такой системы является столбец B свободных членов.

5. Если система $AX=B$ совместна, но не определена, то её решение описывается выражением главных неизвестных через свободные. (В частности, если $(A|B)=(0|0)$, то все переменные — свободные, и $AX=B\iff 0=0\iff X\in K^n$.)

1. Убедитесь, что вы понимаете доказательства утверждений 1—4.

2. Установите логические связи ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$) между следующими условиями (1)—(5) на коэффициенты a_{ij} основной матрицы A:

(1) система $(*)$ определена при $B=0$;

(2) система $(*)$ определена хотя бы при одном B;

(3) система $(*)$ определена при любом B;

(4) система $(*)$ совместна при любом B;

(5) система $(*)$ совместна хотя бы при одном B

в каждом из случаев: **а)** $n=m$; **б)** $n>m$; **в)** $n<m$.

Альтернатива Фредгольма. Если $n=m$, то либо система $(*)$ определена при любом B, либо соответствующая однородная система имеет ненулевое решение.

3. Решите систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{n-1} + x_n + x_1 = 0 \\ x_n + x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

при **а)** $n = 100$; **б)** при любом $n \geqslant 3$.

4. При каждом $a \in \mathbb{R}$ решите систему

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geqslant 0 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 \geqslant 0 \\ \dots \\ x_9 - 3x_{10} + 2x_1 \geqslant 0 \\ x_{10} - 3x_1 + 2x_2 \geqslant 0 \\ x_1 = a. \end{cases}$$

5. Два игрока по очереди записывают вместо звёздочек в системе

$$\begin{cases} *\,x + *\,y + *\,z = 0 \\ *\,x + *\,y + *\,z = 0 \\ *\,x + *\,y + *\,z = 0 \end{cases}$$

действительные числа. Докажите, что начинающий может добиться того, чтобы полученная система имела ненулевое решение.

6. Матрица Вандермонда. Найдите критерий определённости однородной квадратной системы с *матрицей Вандермонда*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

7. Однозначность определения коэффициентов многочлена как функции. Пусть функции $f, g\colon K \to K$ заданы *полиномиальными* формулами:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n, \text{ где } n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, \ldots, a_n,\ b_0, \ldots, b_n \in K.$$

Докажите, что если значения функций f и g равны в $n+1$ различных точках, то $f = g$.

Замечание. Эту задачу можно решать по-разному (например, используя *теорему Безу* для многочленов), но сейчас мы предлагаем использовать предыдущую задачу.

8*. Прямоугольник $a \times b$ разбит на конечное число квадратов. Докажите, что $a/b \in \mathbb{Q}$.

9*. Про 13 гирь известно, что любые 12 из них можно так расположить на двух чашах весов по 6 на каждой, что наступит равновесие. Докажите, что массы всех гирь одинаковы.

Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — строки матрицы A. Тогда i-е уравнение системы $(*)$ имеет вид $A_iX = b_i$.

10*. Ясно, что если строка $(A_1|b_1)$ является линейной комбинацией строк $(A_2|b_2), \ldots, (A_k|b_k)$, т. е. если $(A_1|b_1) = c_2(A_2|b_2) + \ldots + c_k(A_k|b_k)$ для некоторых $c_2, \ldots, c_k \in K$, то уравнение $A_1X = b_1$ является следствием системы уравнений $A_iX = b_i$, $i = 2, \ldots, k$. Верно ли обратное утверждение в однородном случае $b_1 = \ldots = b_k = 0$? (В общем случае, с любыми $b_1, \ldots, b_k$, вопрос оказывается тривиальным. Подумайте, почему.)

Контрольная работа №1 (первая половина)

I вариант

1. Выясните, **а)** являются ли векторы $(-1,0,0,1)$, $(-2,2,-1,-2)$, $(0,3,3,3)$, $(5,-1,5,6)$ в $\mathbb{R}^4$ линейно независимыми и **б)** выражается ли через них линейно любой вектор из $\mathbb{R}^4$.

2. При каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ решите систему $\begin{cases} x\sin 7\alpha + y\sin 3\alpha = \cos\alpha \\ x\cos 7\alpha + y\cos 3\alpha = \sin\alpha. \end{cases}$

3. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $(-35,2)$, $(-1,57)$, $(-22,23)$.

II вариант

1. Выясните, **а)** являются ли векторы $(6,-2,-4,2)$, $(1,-2,1,3)$, $(1,-2,2,-2)$, $(-1,2,-3,7)$ в $\mathbb{R}^4$ линейно независимыми и **б)** выражается ли через них линейно любой вектор из $\mathbb{R}^4$.

2. При каждом $\beta \in \mathbb{R}$ решите систему $\begin{cases} x\cos 2\beta - y\sin 5\beta = \sin 3\beta \\ x\sin 2\beta + y\cos 5\beta = \cos 3\beta. \end{cases}$

3. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $(5,-8)$, $(18,26)$, $(26,47)$.

III вариант

1. Выясните, **а)** являются ли векторы $(0,6,2,2)$, $(2,0,-1,2)$, $(-4,3,3,-3)$, $(-2,3,2,-1)$ в $\mathbb{R}^4$ линейно независимыми и **б)** выражается ли через них линейно любой вектор из $\mathbb{R}^4$.

2. При каждом $\gamma \in \mathbb{R}$ решите систему $\begin{cases} x\cos 5\gamma + y\sin 2\gamma = \cos 3\gamma \\ -x\sin 5\gamma + y\cos 2\gamma = \sin 3\gamma. \end{cases}$

3. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $(-2,-9)$, $(32,46)$, $(11,12)$.

IV вариант

1. Выясните, **а)** являются ли векторы $(1,1,-2,2)$, $(2,-2,2,8)$, $(3,-1,3,-2)$, $(0,-2,3,-2)$ в $\mathbb{R}^4$ линейно независимыми и **б)** выражается ли через них линейно любой вектор из $\mathbb{R}^4$.

2. При каждом $\delta \in \mathbb{R}$ решите систему $\begin{cases} x\cos 3\delta + y\cos 7\delta = \sin\delta \\ x\sin 3\delta + y\sin 7\delta = \cos\delta. \end{cases}$

3. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $(-15,10)$, $(19,65)$, $(-2,31)$.

Комбинаторика

Основные комбинаторные числа.

Числа сочетаний или биномиальные коэффициенты.

Количество способов выбрать k элементов из n называется *числом сочетаний из n по k* и обозначается C_n^k а также $\binom{n}{k}$.

1. Найдите явную формулу для чисел C_n^k.

2. Докажите *формулу бинома Ньютона:* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$.

Замечание. По умолчанию мы работаем с числами, т. е. $a, b \in \mathbb{R}$. Вообще, формула бинома Ньютона справедлива в любых коммутативных кольцах.

3. Докажите *основное биномиальное тождество* $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$, позволяющее выстроить биномиальные коэффициенты в *треугольник Паскаля*:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}
$$

....

4. Вычислите: **а)** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots$; **б)** $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$; **в)*** $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$

5. Докажите тождества:

а) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$;

б) *Свёртка Вандермонда.* $C_{n+m}^k = \sum\limits_{l=0}^{k} C_n^l C_m^{k-l}$

Перестановки с повторениями.

6. Сколькими способами можно переставить буквы в словах: ЗАДАЧА, МАТЕМАТИКА? (Перестановки одинаковых букв не считаются.)

7. Сколько можно составить слов длины $k_1 + \ldots + k_n$ из k_1 букв x_1, …, k_n букв x_n?

8. Выведите *полиномиальную формулу*, раскрыв скобки $(x_1 + \ldots + x_k)^n$.

9. Ясно, что биномиальные коэффициенты являются частным случаем полиномиальных. Выразите полиномиальный коэффициент через биномиальные.

Сочетания с повторениями.

10. Имеется неограниченный набор персиков, яблок и апельсинов. Сколькими способами можно набрать 100 фруктов?

11. Пусть имеется n сортов объектов, причём объектов каждого сорта неограниченное количество, а требуется набрать всего k объектов. Сколькими способами это можно сделать? Это число называется числом сочетаний с повторениями из n по k и обозначается $\overline{C_n^k}$. Например, в предыдущей задаче требовалось найти $\overline{C_3^{100}}$.

12. Для всех $n, k \in \mathbb{N}$ найдите количество решений

а) в целых неотрицательных числах уравнения $x_1 + \ldots + x_n = k$;

б) в натуральных числах того же уравнения;

в) в целых неотрицательных числах неравенства $x_1 + \ldots + x_n \leqslant k$.

Формула включений и исключений выражает мощность объединения $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$ конечных множеств $A_1, \ldots, A_n$ через мощности их всевозможных пересечений (и, в частности, через мощности самих множеств).

Ясно, что $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Это случай двух множеств.

13. Выведите формулу включений и исключений для трёх множеств A, B, C.

14. Для вывода формулы в общем случае (n множеств) предлагается использовать *характеристические функции* множеств: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$

Выразите $\chi_{\overline{A}}$, $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{A\cup B}$ через χ_A и χ_B, после чего сведите комбинаторную задачу к алгебраической, проведя выкладку в духе теоремы Виета для многочленов (произведение биномов с общим первым членом).

15*. *Числа Каталана.* Обозначим через C_n число способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (точки считаются одинаковыми). Докажите равенства:
а) $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + \ldots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0$; **б)** $C_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$.

Отображения конечных множеств.

16. Пусть $|X| = |Y| < \infty$. Докажите, что для произвольного отображения $f\colon X \to Y$ следующие условия равносильны:

$$f \text{ — биекция } \iff f \text{ — инъекция } \iff f \text{ — сюръекция.}$$

17. Пусть $|X| = k$, $|Y| = n$, $k, n \in \mathbb{N}$. Подсчитайте число:
а) всех отображений $X \to Y$;
б) всех биективных отображений $X \to Y$;
в) всех инъективных отображений $X \to Y$;
г)* всех сюръективных отображений $X \to Y$.

18*. При любых $k, n \in \mathbb{N}$ выясните, сколькими способами можно разбить множество из k элементов на n непустых подмножеств.

Подстановки

Для множества X через S_X обозначим множество (или *группу* относительно композиции) всех биекций $X \to X$. В случае $X = \{1, \ldots, n\}$ вместо S_X пишем S_n. Элементы из S_n называются *подстановками* степени n. Тождественную подстановку будем обозначать буквой e.

1. Докажите, что любую подстановку в S_n можно представить в виде произведения
а) транспозиций; **б)** транспозиций вида (12), $(23), \ldots, (n-1\ n)$;
в) транспозиций вида (12), $(13), \ldots, (1n)$; **г)** нескольких подстановок (12) и $(12\ldots n)$.

Разложение на независимые циклы.

2. Представьте в виде произведения независимых циклов (разные буквы обозначают разные элементы): **а)** $(ij)(jk)$; **б)** $(ijk)(jkl)$; **в)** $(12)(13)\ldots(1n)$.

3. Вычислите σ^3, σ^{100} для **а)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; **б)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 9 & 10 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Опишите все типы цикловых разложений в **а)** S_4; **б)** S_5; **в)** S_6.

5. Пусть $n, d \in \mathbb{N}$ и σ — цикл длины n ($\sigma \in S_N$, где $N \geqslant n$). Определите цикловое строение подстановки σ^d в каждом из случаев: **а)** $d \mid n$; **б)** $(d, n) = 1$; **в)** общий случай.

Чётность и знаки подстановок.

6. При каждом $n \in \mathbb{N}$ сравните количества чётных и нечётных подстановок в S_n.

7. Соединим подстановки $\sigma \in S_{\{1,\ldots,m\}}$ и $\tau \in S_{\{m+1,\ldots,m+n\}}$ в одну подстановку $(\sigma, \tau) \in S_{m+n}$. Докажите, что $\operatorname{sgn}(\sigma, \tau) = \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\tau$.

8. Дайте определение чётности (и знака) биекции конечного множества в себя.

9. Пусть $|X| = m$, $|Y| = n$, $\sigma \in S_X$, $\tau \in S_Y$. Определим $\xi \in S_{X\times Y}$ правилом $\xi(x, y) = (\sigma(x), \tau(y))$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Выразите $\operatorname{sgn}\xi$ через $\operatorname{sgn}\sigma$ и $\operatorname{sgn}\tau$.

10*. Игра „Пятнашки“. На игровом поле 4×4 как-то расположены 15 квадратных фишек с номерами от 1 до 15. Одна клетка всегда свободна, и на неё можно передвигать любую соседнюю фишку (вынимать и перекладывать фишки нельзя). Цель игры состоит в том, чтобы, передвигая фишки из начального положения, расположить их так, как показано на рисунке слева.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

а) Докажите, что невозможно достичь цели, начиная с положения на рисунке справа.
б) Верно ли, что из любого положения можно прийти к положению на одном из рисунков?

Порядки подстановок. *Порядком* подстановки σ называется наименьшее натуральное число n, для которого $\sigma^n = e$. Это число обозначается $O(\sigma)$.

11. Докажите, что для любой $\sigma \in S_n$ существует такое k, что $\sigma^k = e$, и поэтому любая подстановка в S_n имеет конечный порядок.

12. Докажите, что $O(\sigma) = O(\sigma^{-1}) = O(\tau\sigma\tau^{-1})$ для любых подстановок σ, τ.

13. В условиях задачи **5** вычислите порядок подстановки σ^d (в каждом из трёх случаев).

14. Найдите наибольший порядок подстановки в **а)** S_5; **б)** S_8.

15. При каждом $n \in \mathbb{N}$ сравните количества подстановок чётного и нечётного порядка в S_n.

Сопряжённые подстановки и централизаторы подстановок.

Сопряжением подстановки $\tau \in S_n$ с помощью подстановки $\sigma \in S_n$ называется подстановка, действующая по правилу: $\sigma(i) \mapsto \sigma(\tau(i))$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, то есть подстановка $\sigma\tau\sigma^{-1}$.

Подстановки $\tau, \tau' \in S_n$ называются *сопряжёнными*, если $\exists \sigma \in S_n\ \tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$.

Множество всех подстановок, сопряжённых с данной, называется её *классом сопряжённости*.

16. Докажите, что отношение „быть сопряжёнными подстановками“ является отношением эквивалентности.

17. Докажите, что подстановка, сопряжённая циклу длины k, тоже является циклом длины k.

18. Докажите, что циклы одной длины сопряжены.

Теорема. Две подстановки сопряжены в точности тогда, когда они имеют одинаковое цикловое строение.

19. Верно ли, что подстановки σ и σ^{-1} всегда сопряжены?

Централизатором подстановки называется множество всех коммутирующих с ней подстановок:

$$\mathrm{Cent}_{S_n}(\sigma) := \{\tau \in S_n \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}.$$

20. Докажите, что при каждом $n \geqslant 3$ только тождественная подстановка в S_n коммутирует со всеми, то есть *центр* $Z(S_n)$ группы S_n равен $\{e\}$ (тривиален) при таких n.

21. Найдите: **а)** $\mathrm{Cent}_{S_n}(12)$ $(n \geqslant 2)$; **б)** $\mathrm{Cent}_{S_n}(12)(34)$ $(n \geqslant 4)$; **в)** $\mathrm{Cent}_{S_n}(123)$ $(n \geqslant 3)$.

22. Решите уравнения в S_5: **а)** $\sigma(12)\sigma^{-1} = (34)$; **б)** $(123)\sigma(132) = \sigma$;
в) $\sigma(123)(45)\sigma^{-1} = (12)(345)$; **г)** $\sigma(12)(345) = (12345)\sigma$.

23*. Докажите, что для любой подстановки $\sigma \in S_n$

$$|\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_n\}| \cdot |\,\mathrm{Cent}_{S_n}(\sigma)| = n!.$$

Комбинаторика.

24. Сколько всего инверсий во всех $n!$ перестановках чисел $1, \ldots, n$?

25. Найдите мощности классов сопряжённости в **а)** S_4; **б)** S_5; **в)** S_6 (см. задачу **4**).

26. Сколько решений имеет уравнение **а)** $X^3 = e$ в S_4; **б)** $X^4 = e$ в S_5; **в)** $X^6 = e$ в S_9?

27*. Поскольку при всех $m, n \in \mathbb{N}$ число $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n}$ равно коэффициенту при $x_1^m \ldots x_n^m$ в разложении $(x_1 + \ldots + x_n)^{mn}$, а этот коэффициент целый, то $(m!)^n \mid (mn)!$, в частности, $(n!)^n \mid (n^2)!$. Докажите, что $(m!)^n n! \mid (mn)!$, в частности, $(n!)^{n+1} \mid (n^2)!$.

28. Пусть подстановки из S_n переставляют переменные $x_1, \ldots, x_n$. Для каждого из следующих многочленов сосчитайте, сколько различных многочленов можно из него получить перестановками переменных, а также найдите все подстановки, сохраняющие этот многочлен (число n в каждом случае равно числу переменных):
а) $x_1x_2 + x_3$; **б)** $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$; **в)** $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) \ldots (x_{2k-1} + x_{2k})$;
г) $x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 + x_7x_8x_9$; **д)** $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k}(x_i - x_j)$.

29*. Пусть $P = P(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен (над любым полем K). Для $\sigma \in S_n$ обозначим через P^σ многочлен $P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Определим *орбиту* и *стабилизатор* многочлена P:

$$\mathrm{Orb}(P) := \{P^\sigma \mid \sigma \in S_n\} \subseteq K[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{и} \quad \mathrm{St}(P) := \{\sigma \mid P^\sigma = P\} \subseteq S_n.$$

В предыдущей задаче спрашивалось, чему равны мощности $|\,\mathrm{Orb}(P)|$ и $|\,\mathrm{St}(P)|$ для заданных многочленов P. Докажите, что для любого многочлена P

$$|\,\mathrm{Orb}(P)| \cdot |\,\mathrm{St}(P)| = n!.$$

30. Занумеруйте в любом удобном вам порядке вершины одного из следующих правильных многогранников: **а)** тетраэдра; **б)** куба; **в)*** додекаэдра. Сколько подстановок в S_n, переставляя вершины рассматриваемого многогранника (соответственно при $n = 4$, 8, 20), реализуют его изометрию и сколько — вращение?

I вариант

1. Расставьте вместо звёздочек по цифре, чтобы получилось верное равенство:

$$(52413) = (1*)(1*)(1*)(1*).$$

2. Найдите порядок и знак подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 9 & 8 & 1 & 7 & 3 & 10 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите σ^{55} для $\sigma = (372)^{-1}(1254)^2(56)$.

4. Сколько подстановок сопряжены с подстановкой из задачи **2**?

II вариант

1. Расставьте вместо звёздочек по цифре, чтобы получилось верное равенство:

$$(35214) = (2*)(2*)(2*)(2*).$$

2. Найдите порядок и знак подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 & 9 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите τ^{37} для $\tau = (34)(4172)^2(561)^5$.

4. Сколько подстановок сопряжены с подстановкой из задачи **2**?

III вариант

1. Расставьте вместо звёздочек по цифре, чтобы получилось верное равенство:

$$(13452) = (3*)(3*)(3*)(3*).$$

2. Найдите порядок и знак подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 8 & 9 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите ρ^{37} для $\rho = (475)^{-1}(5316)^2(26)$.

4. Сколько подстановок сопряжены с подстановкой из задачи **2**?

IV вариант

1. Расставьте вместо звёздочек по цифре, чтобы получилось верное равенство:

$$(24135) = (4*)(4*)(4*)(4*).$$

2. Найдите порядок и знак подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 7 & 1 & 2 & 9 & 8 & 5 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите ξ^{23} для $\xi = (25)(5471)^2(634)^5$.

4. Сколько подстановок сопряжены с подстановкой из задачи **2**?

Подстановки (продолжение)

Повторение и контрольные вопросы.

1. Пусть $i \neq 1 \neq j$. Вычислите $(1i)(1j)(1i)$.

2. Вычислите $(54)(43)(32)(21)(23)(34)(45)$.

3. Вычислите $\sigma(12\ldots k)\sigma^{-1}$.

4. Чему может равняться произведение **а)** двух транспозиций; **б)** двух тройных циклов?

5. Найдите хотя бы две таких подстановки σ, что $\sigma(1234)\sigma^{-1} = (3546)$.

6. Чему равен порядок и какова чётность подстановки $(12)(345)(6789)$?

7. Докажите, что уравнение $X^2 = (12)$ неразрешимо в S_n (ни при каком $n \geqslant 2$).

8. Сколько существует циклов длины 5 в группе **а)** S_5; **б)** S_7?

9. Верно ли, что две сопряжённые подстановки имеют одинаковые **а)** чётность; **б)** порядок?

10. Пусть $\sigma = (i_1 \ldots i_k)(j_1 \ldots j_l)$. Верно ли, что $\sigma^{-1} = (i_k \ldots i_1)(j_l \ldots j_1)$?

11. Найдите хотя бы одну подстановку в S_6, квадрат которой равен $(123)(456)$.

12. Пусть $\sigma^7 = e \neq \sigma$. Докажите, что $O(\sigma) = 7$.

13. Найдите все такие $\sigma \in S_n$, что $\sigma^5 = e = \sigma^7$.

14. Что можно сказать **а)** про чётность; **б)** про порядок подстановки σ, если $\sigma^{55} = e$?

15. Верно ли, что всякая чётная подстановка является квадратом некоторой подстановки?

16. Может ли цикл длины 10 быть **а)** квадратом; **б)** кубом некоторой подстановки?

Комбинаторика.

17. Сколько решений **а)** в S_4; **б)** в S_7 имеет уравнение $X^2 = e$?

18. Пусть $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_t \leqslant n$, $k_1 + \ldots + k_t = n$. Сколько подстановок в S_n раскладываются в произведение независимых циклов с длинами $k_1, \ldots, k_t$?

19. Сколько существует подстановок в S_8, сопряжённых с подстановкой $(12)(34)(56)(78)$?

20. Пусть $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_t \leqslant n$, $N_1, \ldots, N_t \geqslant 1$, $N_1k_1 + \ldots + N_tk_t = n$. Сколько подстановок в S_n раскладываются в произведение независимых циклов с длинами $\underbrace{k_1, \ldots, k_1}_{N_1}, \ldots, \underbrace{k_t \ldots, k_t}_{N_t}$?

21*. Сколько подстановок в S_n не имеют неподвижных элементов?

Уравнения в группе подстановок.

22. Докажите что уравнение **б)** $X^k = (12\ldots k)$ и, в частности, **а)** $X^2 = (12)$ неразрешимо в S_n.

23. Решите уравнения в S_n:
а) $\sigma(1234)\sigma^{-1} = (1243)$; **б)** $\sigma(12)(34) = (13)(24)\sigma$; **в)** $\sigma(12)(345)(678)\sigma^{-1} = (36)(124)(597)$.

24. Сосчитайте число решений следующих уравнений в S_n при заданных n:
а) $\sigma^3 = (12)$ при $n = 9$; **б)** $\sigma^2 = (12)(34)$ при $n = 10$; **в)** $\sigma^7 = (123456789)$ при $n = 9$.

25. Решите системы уравнений в S_n: **а)** $\begin{cases} \sigma^2 = \tau^3 \\ \tau^2 = \sigma^3; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \sigma^2 = \tau^3 \\ \tau^2 = \sigma^{-2}. \end{cases}$

Аналитическое представление подстановок.

Пусть подстановки из S_n переставляют числа $1, 2, \ldots, n$ по модулю n (то есть классы вычетов). Будем записывать подстановки формулами. Например, запись $k \mapsto k + 1 \pmod{n}$ задаёт цикл $(12\ldots n)$.

26. Запишите в виде таблицы подстановки: **а)** $k \mapsto k + 2 \pmod 5$; **б)** $k \mapsto 2k \pmod 5$.

27. Задаёт ли формула $k \mapsto k^2 \pmod 4$ подстановку из S_4?

28. При каждом $n \in \mathbb{N}$ определите чётность подстановки $k \mapsto n + 1 - k$ из S_n.

29. Для каждой пары $(n, b) \in \mathbb{N}^2$ найдите знак и порядок подстановки $k \mapsto k + b \pmod{n}$ в S_n.

30. а) При каждом $n \in \mathbb{N}$ найдите все такие пары $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, что отображение

$$k \mapsto ak + b \pmod{n}$$

задаёт подстановку из S_n. Определите число таких подстановок.

б) Докажите, что композиция любых двух подстановок из пункта **а)**, а также обратная к любой подстановке из пункта **а)** являются подстановкой того же вида.

в) При каких $n \in \mathbb{N}$ любую подстановку из S_n можно представить в таком виде? Приведите пример подстановки, не представимой в таком виде.

Определители

Всюду $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(K)$ — квадратная матрица порядка n над полем K.

Определителем матрицы A называется следующий элемент поля K:

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

1. Определитель транспонированной матрицы. Докажите, что $|A^t| = |A|$.

Замечание. Функцию det можно рассматривать как функцию от матрицы, как функцию от набора её строк (столбцов) или как функцию от набора её элементов (все наборы упорядоченные!).

2. Основные свойства определителя. Докажите следующие свойства определителя.

(1) *Полилинейность.* Функция det как функция строк полилинейна, то есть линейна по каждому аргументу; линейность по первому аргументу означает, что

$$\begin{cases} \det(A_1 + A_1', A_2, \dots, A_n) = \det(A_1, A_2, \dots, A_n) + \det(A_1', A_2, \dots, A_n) \\ \det(cA_1, A_2, \dots, A_n) = c \det(A_1, A_2, \dots, A_n) \end{cases}$$

для любых строк $A_1, A_1', A_2, \dots, A_n \in K^n$ и любого элемента $c \in K$.

(2) *Кососимметричность.* Функция det как функция строк кососимметрична, то есть меняет знак при перестановке любых двух строк местами и равна 0, если какие-то две строки одинаковы:

$$\begin{cases} \det(\dots, A_i, \dots, A_j, \dots) = -\det(\dots, A_j, \dots, A_i, \dots) \\ \det(\dots, A_i, \dots, A_i, \dots) = 0 \end{cases}$$

для любых $i \neq j$ и любых строк $A_i, A_j, \dots \in K^n$ (многоточия в левой и правой частях первого равенства соответствуют друг другу).

Задача. Пусть $f\colon K^n \times K^n \to K$ — билинейная функция. Найдите логическую связь между следующими утверждениями:

а) $f(a, b) = -f(b, a)$ для всех $a, b \in K^n$;

б) $f(a, a) = 0$ для всех $a \in K^n$.

3. Определители треугольных матриц. Чему равны определители матриц, у которых над или под **а)** главной; **б)** побочной диагональю стоят нули?

4. Определитель с углом нулей. а) Докажите, что для произвольных матриц $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $B \in \mathrm{M}_m(K)$ и $U \in \mathrm{M}_{n \times m}(K)$ справедливо равенство:

$$\begin{vmatrix} A & U \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

б) В обозначениях пункта **а)** вычислите определитель $\begin{vmatrix} 0 & B \\ A & U \end{vmatrix}$.

5. Изменение определителя при элементарных преобразованиях. Выясните, как меняется определитель при элементарных преобразованиях строк (столбцов) каждого типа.

6. Вырожденные и невырожденные матрицы. Докажите, что следующие условия на матрицу A равносильны:

(1) строки матрицы A линейно зависимы;

(2) столбцы матрицы A линейно зависимы;

(3) $|A| = 0$.

Квадратные матрицы, удовлетворяющим этим условиям, называются *вырожденными*, а остальные — *невырожденными.*

Любой определитель, стоящий в пересечении каких-то строк и каких-то столбцов (в том же количестве) прямоугольной матрицы, называется её *минором.*

Для квадратной матрицы $A = (a_{ij})_{ij}$ минор, полученный вычёркиванием её i-й строки и j-го столбца, называется *(дополняющим) минором элемента* a_{ij}. Взяв этот минор со знаком $(-1)^{i+j}$, получим *алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij}.

7. Разложение по строке (столбцу). Докажите, что при всех $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$:

а) $|A| = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$;

б) $a_{i1}A_{k1} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0$, если $k \neq i$ *(фальшивое разложение).*

8. Формулы Крамера. Докажите, что если $|A| \neq 0$, то система уравнений $AX = B$, где X, $B \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$, имеет единственное решение $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$, и оно вычисляется по формуле

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где A_i — матрица, полученная из матрицы A заменой i-го столбца на столбец B свободных членов.

9. Числа Фибоначчи. Докажите, что $(n+1)$-й член F_{n+1} последовательности Фибоначчи $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, $k \in \mathbb{N}$, равен следующему определителю порядка n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Определитель Вандермонда. Докажите, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x_1, \ldots, x_n \in K$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j).$$

11. Аксиоматический подход. Пусть функция $f\colon \mathrm{M}_n(K) \to K$ полилинейна и кососимметрична как функция строк матрицы. Докажите, что

$$f(A) = f(E) \det A.$$

Как следствие, функция det однозначно определяется своими свойствами (1) и (2) из задачи **2** и *условием нормировки* $|E| = 1$.

12. Геометрический смысл определителя. Пусть $K = \mathbb{R}$.

а) Мы уже знаем, что модуль $|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|$ определителя матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах (a_{11}, a_{12}) и (a_{21}, a_{22}). Докажите это утверждение, рассмотрев *ориентированную площадь* $S(u_1, u_2)$ параллелограмма, построенного на векторах $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$S(u_1, u_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } u_1 \parallel u_2, \\ S^+(u_1, u_2), & \text{если } (u_1, u_2) \text{ — положительно ориентированный базис,} \\ -S^+(u_1, u_2), & \text{если } (u_1, u_2) \text{ — отрицательно ориентированный базис,} \end{cases}$$

где $S^+(u_1, u_2)$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах u_1, u_2.

Докажите, что функция S удовлетворяет свойствам (1) и (2) определителя (вместо det пишем S и строки матрицы считаем векторами) и условию нормировки, поэтому по предыдущей задаче $S(u_1, u_2) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, где $u_1 = (a_{11}, a_{12})$, $u_2 = (a_{21}, a_{22})$.

б) Дайте определения положительно ориентированной тройки некомпланарных векторов в $\mathbb{R}^3$ и ориентированного объёма $V(u_1, u_2, u_3)$ параллелепипеда, построенного на векторах $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$. Выведите формулу для $V(u_1, u_2, u_3)$ с помощью определителя аналогично двумерному случаю.

I вариант

1. На отделение математики мехмата поступили триста человек. Сколькими способами их можно поровну распределить по двенадцати группам, если два распределения считаются одинаковыми, когда у каждого студента в обоих распределениях одни и те же одногруппники?

2. Пусть $\sigma = \big((654)(43)(321)\big)^{-13}\big((789\ 10\ 11)(10\ 11\ 12\ 13\ 14)\big)^5 \in S_{14}$. Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, при котором порядок подстановки σ^n равен 6.

3. Для подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ опишите с указанием числа элементов:

а) класс сопряжённости $\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_7\}$; **б)** централизатор $\{\tau \in S_7 \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$.

4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} \cos\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\gamma \end{vmatrix}$.

5. Найдите все подстановки в S_4, переставляющие переменные x_1, x_2, x_3, x_4, которые сохраняют многочлен

$$(x_1x_2 - x_3x_4)^2(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4].$$

6. Подстановка $\sigma \in S_{301}$ переставляет классы вычетов $1, \ldots, 301 \pmod{301}$ по правилу

$$k \mapsto 25k + 3 \pmod{301}.$$

Задайте подстановку σ^{-1} тем же способом.

II вариант

1. Сколько существует ломаных длины 30 с концами в точках $(0, 0, 0)$ и $(10, 10, 10)$, все узлы которых имеют целые координаты и которые не проходят через точку $(3, 4, 5)$?

2. Пусть $\sigma = (10\ 11)(11\ 2\ 12\ 3\ 13\ 1)^8(34)\big((4567)(6789)\big)^4 \in S_{13}$. Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, при котором порядок подстановки σ^n равен 2.

3. Для подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 6 & 9 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ опишите с указанием числа элементов:

а) класс сопряжённости $\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_9\}$; **б)** централизатор $\{\tau \in S_9 \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$.

4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Найдите все подстановки в S_4, переставляющие переменные x_1, x_2, x_3, x_4, которые сохраняют множество многочленов

$$\{x_1x_2 - x_3x_4,\ x_1x_3 - x_2x_4,\ x_1x_4 - x_2x_3\} \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4].$$

6. Подстановка $\tau \in S_{241}$ переставляет классы вычетов $1, \ldots, 241 \pmod{241}$ по правилу

$$k \mapsto 16k - 7 \pmod{241}.$$

Задайте подстановку τ^{-1} тем же способом.

III вариант

1. Найдите коэффициент при x^{14} после раскрытии скобок $(a + bx^2 + cx^3)^{10} \in \mathbb{R}[x]$.

2. Пусть $\sigma = \big((1234)(3456)\big)^4 \big((596)(6\ 10\ 7\ 11)(11\ 8\ 12)\big)^{10} \in S_{12}$. Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, при котором порядок подстановки σ^n равен 2.

3. Для подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ опишите с указанием числа элементов:

а) класс сопряжённости $\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_7\}$; **б)** централизатор $\{\tau \in S_7 \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$.

4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Найдите все подстановки в S_4, переставляющие переменные x_1, x_2, x_3, x_4, которые сохраняют многочлен

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 + x_2 + x_3 - x_4) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4].$$

6. Подстановка $\sigma \in S_{1000}$ переставляет классы вычетов $1, \ldots, 1000 \pmod{1000}$ по правилу

$$k \mapsto 37k - 2 \pmod{1000}.$$

Задайте подстановку σ^{-1} тем же способом.

IV вариант

1. Сколькими способами можно раскрасить вершины куба в восемь разных цветов, если раскраски, получающиеся друг из друга вращением, считаются одинаковыми?

2. Пусть $\sigma = \big((321)^{-4}(234)^4\big)^9 \big((456)(678)\big)^6 (12\ 11\ 10\ 9)^7 \in S_{12}$. Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, при котором порядок подстановки σ^n равен 6.

3. Для подстановки $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 9 & 7 & 6 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ опишите с указанием числа элементов:

а) класс сопряжённости $\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_9\}$; **б)** централизатор $\{\tau \in S_9 \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$.

4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ z & y & x & 0 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

5. Найдите все подстановки в S_4, переставляющие переменные x_1, x_2, x_3, x_4, которые сохраняют множество многочленов

$$\{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4),\ (x_1 + x_3)(x_2 + x_4),\ (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)\} \subset \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4].$$

6. Подстановка $\tau \in S_{397}$ переставляет классы вычетов $1, \ldots, 397 \pmod{397}$ по правилу

$$k \mapsto 36k - 2 \pmod{397}.$$

Задайте подстановку τ^{-1} тем же способом.

Ответы и решения к задачам контрольной по теме „Подстановки“

I вариант

1. Рассмотрим таблицу 25×12, по 12-ти столбцам которой записаны студенты при каком-то распределении. Всего таблиц $300!$, и две таблицы задают одно и то же распределение в точности тогда, когда они получаются друг из друга перестановками внутри столбцов, а также перестановкой самих столбцов.

Ответ: $\dfrac{300!}{(25!)^{12}12!}$.

2. $\sigma = (123456)(789\ 10)(11\ 12\ 13\ 14) \Longrightarrow O(\sigma) = 12,\ O(\sigma^2) = 6.$
Ответ: $n = 2$.

3. $\sigma = (174)(23)$. **а)** Подстановки, сопряжённые с σ — в точности те, что имеют то же цикловое строение[1]: $(ijk)(lm)$, где i, j, k, l, m — разные числа среди $1. \dots, 7$. Всего таких подстановок: $\dfrac{7!}{3 \cdot 2 \cdot 2}$ или $(C_7^3 \cdot 2) \cdot C_4^2$.

б) Централизатор подстановки σ:

$$\mathrm{Cent}(\sigma) \ni \tau \iff \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma \iff (\tau(1)\tau(7)\tau(4))(\tau(2)\tau(3)) = (174)(23) \iff \begin{cases} (\tau(1)\tau(7)\tau(4)) = (174) \\ (\tau(2)\tau(3)) = (23) \end{cases}$$

$$(\Longrightarrow \tau\{5,6\} = \{5,6\}) \iff \exists p \in \{0,1,2\}\ \exists q, r \in \{0,1\}\ \tau = (174)^p(23)^q(56)^r, \quad |\mathrm{Cent}(\sigma)| = 3 \cdot 2 \cdot 2.$$

Ответ: **а)** $\{(ijk)(lm) \mid i, j, k, l, m$ — разные числа среди $1. \dots, 7\},\ 7!/12$;
б) $\{(174)^p(23)^q(56)^r \mid p = 0,1,2,\ q = 0,1,\ r = 0,1\},\ 12$.

4. Переставляем строки и столбцы по циклу (23456), затем меняем местами строки 3 и 5, а также 4 и 6. Знак определителя не меняется. Полученный определитель состоит из трёх блоков 2×2 по главной диагонали, каждый из который равен 1.
Ответ: 1.

5. Пусть подстановка $\sigma \in S_4$ сохраняет данный многочлен P. Рассмотрим случаи:
1) $x_1 \to x_1 \Rightarrow x_1 - x_3 \to x_1 - x_3,\ x_2 - x_4 \to x_2 - x_4 \Rightarrow \sigma = e$;
2) $x_1 \to x_2 \Rightarrow x_1 - x_3 \leftrightarrow x_2 - x_4 \Rightarrow \sigma = (12)(34) \Rightarrow (x_1x_2 - x_3x_4)^2 \to (x_1x_2 - x_3x_4)^2$ и $P^\sigma = P$;
3) $x_1 \to x_3 \Rightarrow x_1 - x_3 \to x_3 - x_1 \Rightarrow x_2 - x_4 \to x_4 - x_2 \Rightarrow x_1 \leftrightarrow x_3, x_2 \leftrightarrow x_4 \Rightarrow \sigma = (13)(24) \Rightarrow$ $\Rightarrow (x_1x_2 - x_3x_4)^2 \to (x_1x_2 - x_3x_4)^2$ и $P^\sigma = P$;
4) $x_1 \to x_4 \Rightarrow \sigma = (14)(23)$ (аналогично) и $P^\sigma = P$.
Ответ: $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (четверная группа Клейна V_4).

6. Найдём неизвестные коэффициенты $a, b \in \mathbb{Z}_{301}$ в искомой подстановке $\sigma^{-1} \colon k \mapsto ak + b$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}_{301}\ a(25k+3) + b = k \iff \begin{cases} 25a = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -12 \text{ (т. к. } 25 \cdot 12 = 300 \equiv -1) \\ b = 36. \end{cases}$$

Ответ: $k \mapsto -12k + 36 \pmod{301}$.

II вариант

1. 1. Посчитаем сначала ломаные, включая те, что проходят через точку $(3, 4, 5)$. Каждая такая ломаная взаимно однозначно задаётся строкой длины 30 из 10 букв x, 10 букв y и 10 букв z: каждая буква обозначает одно из трёх направлений, вдоль которого проходит очередной единичный отрезок ломаной. Поэтому таких ломаных $\dfrac{30!}{10!^3}$.

[1] В частности, такие подстановки имеют ровно два неподвижных элемента.

2. Аналогично считаем ломаные с концами $(0,0,0)$ и $(3,4,5)$: таких $m = \dfrac{(3+4+5)!}{3!4!5!}$, и ломаные с концами $(3,4,5)$ и $(10,10,10)$: таких $n = \dfrac{(7+6+5)!}{7!6!5!}$.

3. Среди ломаных, посчитанных в п. 1, через точку $(3,4,5)$ проходят mn.

Ответ: $\dfrac{30!}{10!^3} - \dfrac{12!18!}{3!4!5!^2 6!7!}$.

2. $\sigma = (123456)(789)(10\ 11\ 12\ 13)$, поэтому если $O(\sigma^n) = 2$, то $3 \mid n$ и $2 \mid n$. $O(\sigma^6) = 2$.
Ответ: 6.

3. $\sigma = (137)(4569)$.
Ответ: **а)** $(ijk)(lmno)$, $9!/24$; **б)** $\{(137)^p(4569)^q(28)^r \mid p = 0,1,2,\ q = 0,1,2,3,\ r = 0,1\}$, 24.

4. *Ответ:* $-a^3b^2c$.

5. 1. Переменная x_1 должна оставаться на месте, так как это единственная переменная, для которой в каждом из трёх многочленов содержащий её моном входит со знаком $+$. (Если $x_i \to x_1$ при $i \neq 1$, то в новых трёх многочленах такой переменной будет x_i, хотя x_i входит в два из исходных многочленов со знаком $-$.)

2. Любые перестановки переменных x_2, x_3, x_4 сохраняют данное множество многочленов.
Ответ: $\{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 1\} = S_{\{2,3,4\}} \cong S_3$.

6. *Ответ:* $k \mapsto -15k - 105 \pmod{241}$.

III вариант

1. Моном x^{14} можно получить из x^2 и x^3 только тремя способами: $(x^3)^4x^2$, $(x^3)^2(x^2)^4$, $(x^2)^7$.
Ответ: $\dfrac{10!}{4!5!}a^5bc^4 + \dfrac{10!}{4!4!2!}a^4b^4c^2 + \dfrac{10!}{3!7!}a^3b^7$.

2. $\sigma = (123)(45)(678)(9\ 10\ 11\ 12)$, поэтому если $O(\sigma^n) = 2$, то $3 \mid n$ и $2 \mid n$. $O(\sigma^6) = 2$.
Ответ: 6.

3. $\sigma = (125)(67)$.
Ответ: **а)** $(ijk)(lm)$, $7!/12$; **б)** $\{(125)^p(67)^q(34)^r \mid p = 0,1,2,\ q = 0,1,\ r = 0,1\}$, 12.

4. *Ответ:* 1.

5. 1. Посмотрим на знаки при кубах: x_1^3, $-x_2^3$, $-x_3^3$, $-x_4^3$. Значит, $x_1 \to x_1$.

2. Знак у x_4 противоположен знаку у x_1 в каждой скобке, а знакам у x_2 и x_3 — не в каждой, поэтому $x_4 \to x_4$.

3. Транспозиция (23) подходит.
Ответ: e, (23).

6. *Ответ:* $-27k - 54 \pmod{1000}$.

IV вариант

1. Куб можно совместить с собой $8 \cdot 3$ вращениями: вращение куба определяется образом одной из восьми вершин и и образом одной из трёх смежных с ней вершин. Поэтому все $8!$ раскрасок вершин куба разбиваются на классы по 24 раскраски в каждом: раскраски, получаемые друг из друга вращением, принадлежат одному классу.
Ответ: $8!/24$.

2. $\sigma = (12)(345678)(9\ 10\ 11\ 12)$. *Ответ:* 2.

3. $\sigma = (149)(2357)$.
Ответ: **а)** $(ijk)(lmno)$, $9!/24$; **б)** $\{(149)^p(2357)^q(68)^r \mid p = 0,1,2,\ q = 0,1,2,3,\ r = 0,1\}$, 24.

4. *Ответ:* x^3y^2z.

5. Ясно, что $(x_1 - x_4)(x_2 - x_3) \to (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)$, поэтому *ответ* $\subseteq \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V_4$. Обратное включение тоже верно. *Ответ:* V_4.

6. *Ответ:* $k \mapsto -11k - 22 \pmod{397}$.

Линейная зависимость в линейных пространствах

Линейное (векторное) пространство над полем K — это абелева группа $(V,+)$ с операциями умножения на элементы из K: $K\times V\to V$, $(k,v)\mapsto kv$, такая, что выполнены следующие условия:

(1) $k(u+v)=ku+kv$; (2) $(k+l)u=ku+lu$; (3) $(kl)u=k(lu)$; (4) $1v=v$ $(k,l\in K,\ u,v\in V)$.

При этом часто пишут ${}_KV$, элементы V называют векторами, а элементы поля K — скалярами. Будем обозначать ноль в поле K и ноль в V одним символом 0.

1. Докажите, что **а)** $(-1)v=-v$; **б)** $0v=0$, $k0=0$ и если $kv=0$, то $k=0$ или $v=0$.

Непустое подмножество U векторного пространства ${}_KV$ называется *подпространством* в V, если U замкнуто относительно сложения и умножения на скаляры, то есть если ${}_KU$ — векторное пространство относительно тех же операций[2], что и ${}_KV$.

Мешок примеров.

2. Изучите предлагаемые примеры пространств, подпространств, подмножеств, не являющихся подпространствами, а также пополните мешок своими примерами.

а) Поле над собой и, более общо, **над своим подполем**; операции — как в самом поле. Например, ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$, ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$, ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\pi)$. Пусть K — подполе поля L. Является ли K подпространством в ${}_LL$? Опишите все подпространства в ${}_LL$.

б) Арифметическое пространство. Так называется пространство строк или столбцов (в общем, упорядоченных наборов) одной длины или высоты над данным полем с операциями *покомпонентного* сложения и умножения на скаляры (наследуемыми с того самого поля). Является ли K^{n-1} подпространством в K^n? (Формально, нет, но в K^n есть подпространства, изоморфные K^{n-1}.) А множество всех таких строк $(x_1,\ldots,x_n)\in K^n$, что $x_1+\ldots+x_n=0$; $x_1=0$; $x_1\neq 0$; $x_1=1$; $x_1^2=x_2^2$?

в) Пространство функций K^X из данного множества X в данное поле K с *поточечными* операциями. Во что оно превращается в случае конечного и в случае счётного множества X? В случае, например, $K=\mathbb{R}=X$ можно рассмотреть *цепочку подпространств*:

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\supsetneq\{$непрерывные функции$\}\supsetneq\{$дифференцируемые функции$\}\supsetneq\{$аналитичные функции$\}$.

г) Пространство многочленов $K[x]$ над полем K фактически является подпространством *финитных*[3] последовательностей в пространстве всех последовательностей $K^{\mathbb{N}_0}$, только элементы записываются не строками вида $(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots)$, а *формальными выражениями* вида $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, где $a_0,a_1,\ldots,a_n\in K$, x — *формальная переменная*. Примеры подпространств: многочлены с нулевыми членами при фиксированных степенях x, в частности, многочлены степени $\leqslant n$ (включая нулевой многочлен); многочлены, кратные заданному многочлену.

д) Пространство матриц $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ над полем K фактически является арифметическим пространством K^{mn}, только элементы записываются не строками длины mn, а таблицами $m\times n$ с элементами из K. Образуют ли подпространство матрицы с нулями на заданных позициях, с элементами из заданного подполя на заданных позициях? Пусть $m=n$. Образуют ли подпространства верхнетреугольные, симметрические, диагональные, скалярные, вырожденные, невырожденные матрицы?

е) Трёхмерное пространство геометрических векторов над полем $\mathbb{R}$. При введении координат становится арифметическим пространством $\mathbb{R}^3$. Являются ли подпространствами прямая, плоскость, проходящие через данную точку?

ж) Пространство решений линейной однородной системы уравнений над данным полем рассматривается как подпространство в пространстве строк K^n, где n — число неизвестных системы. Однородность системы важна[4]! Подпространства можно получать, если добавлять однородные уравнения в систему.

---

[2] Точнее их ограничений.

[3] То есть таких, в которых лишь конечное число ненулевых элементов.

[4] Ох, как важна!

Линейная зависимость, базис и размерность пространства, ранг системы векторов.

Конечная система векторов $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ называется *линейно зависимой* над K, если существуют скаляры $k_1, \ldots, k_n \in K$, не все равные 0, для которых $k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n = 0$. Бесконечная система векторов называется *линейно зависимой*, если она содержит конечную линейно зависимую подсистему. Система, не являющаяся линейно зависимой, называется *линейно независимой.*

3. Основная лемма о линейной зависимости. Пусть каждый из векторов $v_1, \ldots, v_m$ выражается через векторы $u_1, \ldots, u_n$, причём $m > n$. Тогда векторы $v_1, \ldots, v_m$ линейно зависимы[5].

Линейная оболочка системы $M \subseteq V$ векторов — это подпространство в V, *порождённое* этими векторами: $\langle M \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \,|\, n \in \mathbb{N},\ k_1, \ldots, k_n \in K,\ v_1, \ldots, v_n \in M \right\}$.

Линейно независимая система порождающих в пространстве называется его *базисом.*

Теорема. Любые два базиса в любом линейном пространстве имеют одинаковую мощность.

4. Докажите теорему в предположении, что пространство имеет конечный базис[6]. Теорема позволяет определить *размерность* $\dim_K V$ пространства ${}_K V$ как мощность некоторого его базиса, а также *ранг* $\operatorname{rk} M$ системы M векторов как размерность её линейной оболочки: $\operatorname{rk} M := \dim\langle M \rangle$.

5. Пусть $\dim V = n$. Докажите, что: **а)** всякая линейно независимая система векторов в V содержит $\leqslant n$ элементов, и если $< n$, то может быть дополнена до базиса V;

б) всякая система порождающих в V содержит $\geqslant n$ элементов и если $> n$, то может быть ограничена до базиса V;

в) если U — подпространство в V, то $\dim U \leqslant n$, причём $\dim U = n \Longleftrightarrow U = V$.

6. Пусть дана конечная последовательность векторов $(v_1, \ldots, v_n)$ в V. Докажите, что в ней можно выбрать базис $(u_1, \ldots, u_k)$ по следующему правилу:

1) u_1 — это первый ненулевой вектор среди $v_1, \ldots, v_n$;

2) если $u_1 = v_{i_1}, \ldots, u_m = v_{i_m}$ уже выбраны, то в качестве u_{m+1} берём первый вектор после v_{i_m}, линейно независимый со всеми $u_1, \ldots, u_m$; если такого нет, то заканчиваем процесс.

Решётка подпространств.

Для любых двух подпространств $U_1, U_2 \subseteq V$ определены их пересечение $U_1 \cap U_2$ и сумма $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$, которые также являются подпространствами в V (очевидно).

7. а) Приведите пример, показывающий, что пересечение подпространств не дистрибутивно относительно сложения, то есть, вообще говоря, неверно равенство $(U_1 + U_2) \cap V = U_1 \cap V + U_2 \cap V$.

б) Закон модулярности. Докажите, что равенство из пункта **а)** верно при условии $U_1 \subseteq V$.

8. Докажите, что следующие условия на подпространства $U_1, U_2 \subseteq V$ равносильны:

(1) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$;

(2) каждый вектор из $U_1 + U_2$ однозначно представляется в виде $u_1 + u_2$, где $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$;

(3) некоторый вектор из $U_1 + U_2$ однозначно представляется в виде $u_1 + u_2$, где $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$;

(4) если системы $M_1 \subseteq U_1$ и $M_2 \subseteq U_2$ линейно независимы, то такова же и система $M_1 \cup M_2$;

(5) если M_1 — базис в U_1 и M_2 — базис в U_2, то $M_1 \cup M_2$ — базис в $U_1 + U_2$,

а если пространства U_1 и U_2 конечномерны, то условия (1)—(5) равносильны также следующему:

(6) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

При выполнении этих условий сумма $U_1 + U_2$ называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2$.

9. Докажите, что для всякого подпространства U в V существует *линейное дополнение*, то есть такое подпространство $U' \subseteq V$, что $U \oplus U' = V$. Однозначно ли определено U'?

10. Докажите, что $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$.

Понятие прямой суммы распространяется на любое конечное[7] число подпространств $U_1, \ldots, U_n$ с помощью аналога условия (2) задачи **8**.

11. Обобщите условия (1)—(6) задачи **8**, сохранив их равносильность, на случай n слагаемых.

12. Обобщите результат задачи **10** на случай **а)** трёх; **б)*** n слагаемых.

---

[5] Если „много“ выражается через „мало“, то „много“ линейно зависимы.

[6] В бесконечномерном случае требуется *лемма Цорна*, равносильная *аксиоме выбора* из теории множеств.

[7] И бесконечное, только число слагаемых в представлении каждого вектора конечно.

Линейная зависимость: стандартные задачи

0. Докажите, что столбцы ступенчатой матрицы, содержащие лидеры строк, образуют базис в системе столбцов этой матрицы.

Пусть векторы $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ заданы своими координатами. Запишем их по столбцам матрицы, которую обозначим через A:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \; \ldots, \; v_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

1. Является ли данная система векторов линейно независимой?

Линейная независимость векторов $v_1, \ldots, v_m$ означает, что для $k_1, \ldots, k_m \in K$ равенство

$$k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m = 0 \iff \begin{cases} k_1 a_{11} + \ldots + k_m a_{1m} = 0 \\ \ldots \\ k_1 a_{n1} + \ldots + k_m a_{nm} = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

выполнено только при $k_1 = \ldots = k_m = 0$, то есть система $AX = 0$ имеет только нулевое решение $X = (k_1, \ldots, k_m)^t$.

2. а) Выражается ли данный вектор через данную систему векторов?

$$w = (b_1, \ldots, b_n)^t \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \iff \exists k_1, \ldots, k_m \in K \colon w = k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m \iff$$

$$\iff \exists \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} \in K^m \; \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть вопрос равносилен совместности системы с расширенной матрицей $(A|w)$.

б) И если выражается, то как? Приводим матрицу $(A|w)$ к главному ступенчатому виду $(A'|w')$ и возьмём столбцы с лидерами. Выражение вектора w' через эти столбцы, если оно существует, получить легко (задача **0**). Вектор w выражается через столбцы с теми же номерами матрицы A, причём с теми же коэффициентами, поскольку

при элементарных преобразованиях строк матрицы линейные соотношения между её столбцами не меняются!

Докажите утверждение в рамке!

3. Как найти базис линейной оболочки данных векторов?

Приводим матрицу A к ступенчатому виду A'. В системе столбцов матрицы A' базис образуют столбцы, содержащие лидеры строк, а в системе столбцов матрицы A — столбцы с теми же номерами. Обоснование — как в **2б)**.

4. Как задать подпространство системой линейных уравнений?

Требуется составить систему линейных однородных уравнений, пространство решений которой совпадает с $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. В искомую систему может войти уравнение $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = 0$ в точности тогда, когда ему удовлетворяют координаты всех векторов $v_1, \ldots, v_m$, то есть когда

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_n a_{n1} = 0 \\ \ldots \\ p_1 a_{1m} + p_2 a_{2m} + \ldots + p_n a_{nm} = 0 \end{cases} \iff A^t \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, достаточно найти ФСР линейной системы с матрицей A^t (координаты заданных векторов записываем по строкам), и каждое решение из ФСР записать как набор коэффициентов уравнения.

5. Как найти базис пересечения линейных оболочек данных векторов?

I способ. Можно свести задачу к двум решённым: 1) задать каждую линейную оболочку линейной системой; 2) объединить полученные системы уравнений в одну и решить её.

II способ. Пусть B — $(n\times l)$-матрица, по столбцам которой стоят координаты векторов $w_1,\dots,w_l$. Требуется найти базис в пространстве всех таких $z=(b_1,\dots,b_n)^t\in K^n$, что

$$z\in\langle v_1,\dots,v_m\rangle\cap\langle w_1,\dots,w_l\rangle \iff$$

$$\iff \exists\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta_1,\dots,\beta_l\in K\colon z=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_mv_m=\beta_1w_1+\ldots+\beta_lw_l \iff$$

$$\iff \exists \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \alpha_m\\ \beta_1\\ \cdot\\ \beta_l\end{pmatrix}\in K^{m+l}\left\{\begin{aligned}&\underbrace{(A|-B)}_{n\times(m+l)}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \alpha_m\\ \beta_1\\ \cdot\\ \beta_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in K^n \quad (1)\\ &A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdot\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \cdot\\ b_n\end{pmatrix}. \qquad\qquad (2)\end{aligned}\right.$$

Найдём ФСР системы (1) — конечное число столбцов высоты $m+l$. Возьмём у каждого столбца его первые m координат (значения переменных $\alpha_1,\dots,\alpha_m$) и подставим полученные m-столбцы в (2). Полученные в правой части (2) n-столбцы порождают $\langle v_1,\dots,v_m\rangle\cap\langle w_1,\dots,w_l\rangle$, но могут быть линейно зависимыми, так что остаётся выбрать из них базис (задача **3**).

6. Как найти базис суммы линейных оболочек, согласованный с их пересечением и с каждой из них?

Два подпространства U_1 и U_2 в K^n заданы порождающими. Требуется найти такой базис $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q\}$ в U_1+U_2, что $\{u_1,\dots,u_k\}$ — базис в $U_1\cap U_2$. $\{u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_p\}$ — базис в U_1 и $\{u_1,\dots,u_k,w_1,\dots,w_q\}$ — базис в U_2.

Запишем данные порождающие подпространства U_1 по столбцам матрицы A, а порождающие подпространства U_2 — по столбцам матрицы B. Сначала, как в предыдущей задаче, найдём базис в $U_1\cap U_2$; запишем найденные векторы по столбцам матрицы C. Приведём матрицу $(C|A|B)$ к ступенчатому виду, после чего станет ясно, какие столбцы матрицы A и какие столбцы матрицы B дополняют столбцы матрицы C соответственно до базиса системы столбцов матрицы $(C|A)$ (базис в U_1) и матрицы $(C|B)$ (базис в U_2).

Матрица перехода от старого базиса $(e_1,\dots,e_n)$ к новому $(e'_1,\dots,e'_n)$ — это $(n\times n)$-матрица, по столбцам которой записаны координаты векторов нового базиса в старом базисе:

$$\begin{cases}e'_1=c_{11}e_1+c_{21}e_2+\ldots+c_{n1}e_n\\ e'_2=c_{12}e_1+c_{22}e_2+\ldots+c_{n2}e_n\\ \ldots\\ e'_n=c_{1n}e_1+c_{2n}e_2+\ldots+c_{nn}e_n\end{cases}\iff (e'_1,\dots,e'_n)=(e_1,\dots,e_n)C,\ \text{где } C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\dots&c_{1n}\\ c_{21}&c_{22}&\dots&c_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ c_{n1}&c_{n2}&\dots&c_{nn}\end{pmatrix}.$$

7. Как найти матрицу перехода, зная оба базиса?

Даны координаты векторов двух базисов $e_1,\dots,e_n$ и $e'_1,\dots,e'_n$ в стандартном базисе пространства K^n. Требуется найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

Если первый базис стандартный, то матрицей перехода является матрица координат векторов-столбцов второго базиса. Общий случай сводится к этому следующим образом. Запишем координаты векторов первого базиса по столбцам матрицы A, а второго — по столбцам матрицы B рядом с A. Получим $(n\times 2n)$-матрицу $(A|B)$, которую приведём к главному ступенчатому виду. Так как матрица A невырожденная, то мы получим на её месте единичную матрицу E: $(A|B)\rightsquigarrow(E|C)$. Тогда матрица C является искомой.

Обоснование: столбцы матрицы C выражаются через столбцы матрицы E *точно так же*, как столбцы матрицы B через столбцы матрицы A (см. выше текст в рамочке), то есть с помощью искомой матрицы перехода.

Произведение матриц как матрица композиции линейных отображений

Пример. Обозначим через $\mathcal{R}_\varphi$ поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол $\varphi \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{R}_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейное отображение, которое в стандартном базисе $(1,0)^t$, $(0,1)^t$ плоскости $\mathbb{R}^2$ задаётся матрицей

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \text{ так как } \mathcal{R}_\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},\ \mathcal{R}_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}_{\alpha+\beta}$. Перемножим матрицы R_α и R_β по определению:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha(-\sin\beta) - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha(-\sin\beta) + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \text{ — матрица поворота на угол } \alpha+\beta.$$

Почти общий[1] случай. Пусть K — поле. Рассмотрим линейные отображения $\mathcal{A}\colon K^3 \to K^2$ и $\mathcal{B}\colon K^2 \to K^4$ с матрицами $A = (a_{jk}) \in \mathrm{M}_{2\times 3}(K)$ и $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{4\times 2}(K)$ соответственно:

$$\mathcal{A}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{pmatrix} \text{ и } \mathcal{B}\colon \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \\ b_{31}y_1 + b_{32}y_2 \\ b_{41}y_1 + b_{42}y_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда их композиция $\mathcal{BA}\colon K^3 \to K^4$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ b_{31}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{32}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ b_{41}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{42}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \\ b_{41}a_{11} + b_{42}a_{21} & b_{41}a_{12} + b_{42}a_{22} & b_{41}a_{13} + b_{42}a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =: C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица $C = (c_{ik}) \in \mathrm{M}_{4\times 3}(K)$, где $c_{ik} = b_{i1}a_{1k} + b_{i2}a_{2k}$ ($i = 1,2,3,4,\ \ k = 1,2,3$), является матрицей композиции $\mathcal{BA}\colon K^3 \to K^4$ и называется произведением BA матриц B и A:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} & b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} & b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} \\ b_{41}a_{11} + b_{42}a_{21} & b_{41}a_{12} + b_{42}a_{22} & b_{41}a_{13} + b_{42}a_{23} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Для матрицы $X \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ обозначим через $X_1, \ldots, X_m$ её строки, а через $\hat{X}_1, \ldots, \hat{X}_n$ — её столбцы. Тогда $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \ldots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_1 & \ldots & \hat{X}_n \end{pmatrix}$. Распишем $(*)$ по строкам и по столбцам:

$$C_i = b_{i1}A_1 + b_{i2}A_2 \text{ при } i = 1,2,3,4; \qquad \hat{C}_k = \hat{B}_1 a_{1k} + \hat{B}_2 a_{2k} \text{ при } k = 1,2,3.$$

[1] Общим он будет, если вместо чисел $3, 2, 4$ взять, к примеру, m, n, k.

Обратная матрица

Матрицы $A, B \in M_n(K)$ над полем K, для которых $AB = E = BA$, называются *взаимно обратными.*

1. а) Докажите, что если $AB = BA = E = AC = CA$, то $B = C$. Это позволяет ввести обозначение A^{-1} для матрицы, обратной к A.

б) Докажите, что если матрицы A^{-1} и B^{-1} существуют, то $(A^{-1})^{-1} = A$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ и $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

2. Докажите, что следующие условия на матрицу $A \in \mathrm{M}_n(K)$ равносильны:
(1) существует матрица A^{-1};
(2) существует такая матрица $B \in \mathrm{M}_n(K)$, что $AB = E$;
(2)$'$ существует такая матрица $B \in \mathrm{M}_n(K)$, что $BA = E$;
(3) равенство $AC = 0$ для $C \in \mathrm{M}_n(K)$ возможно лишь при $C = 0$;
(3)$'$ равенство $CA = 0$ для $C \in \mathrm{M}_n(K)$ возможно лишь при $C = 0$;
(4) однородная система линейных уравнений $AX = 0$, где $X \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$, определена;
(5) произвольная система линейных уравнений $AX = B$, где $X, B \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$, определена;
(6) матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение $X \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ для любой матрицы $B \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$;
(7) строки матрицы A линейно независимы;
(7)$'$ столбцы матрицы A линейно независимы;
(8) $\mathrm{rk}\, A = n$;
(9) $|A| \neq 0$.

Делители нуля в кольце $\mathrm{M}_n(K)$ — в точности необратимые матрицы — в точности матрицы с нулевым определителем.

При выполнении этих условий матрица A называется *невырожденной*, матрица B как из условия (2), так и из условия (2)$'$ является обратной к A и может быть вычислена по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(A_{ji})_{ij}$, где A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы $A = (a_{ij})_{ij}$.

Рассмотрим для примера случаи[1] $n = 2$ и $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

3. Пусть $A, B, C \in \mathrm{M}_n(K)$ и $ABC = E$. Какие из равенств: $ACB = E$, $BAC = E$, $BCA = E$, $CAB = E$, $CBA = 0$ отсюда следуют?

4. Матрицы элементарных преобразований. Рассмотрим три типа матриц из $\mathrm{M}_n(K)$: (1) $E + cE_{ij}$, $c \in K$, $i \neq j$; (2) $E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, $i \neq j$; (3) $E + (c-1)E_{ii}, c \in K$.

а) Домножьте матрицу $A \in \mathrm{M}_{n\times k}(K)$ справа на каждую из данных матриц.

б) Найдите матрицы, обратные к данным матрицам.

5. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Приведём $(n \times 2n)$-матрицу $(A \mid E)$ к главному ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк: $(A \mid E) \rightsquigarrow (X \mid B)$. Докажите, что если $X = E$, то $B = A^{-1}$, а если $X \neq E$, то матрица A не имеет обратной.

6. Обобщите результат предыдущей задачи на случай матричных уравнений вида $AX = B$ (см. условие (6) задачи **1**).

---

[1] Случай $n = 2$ стоит выучить.

Матричная техника

Буквами $A, B, C, \ldots$ по умолчанию обозначены матрицы над фиксированным полем K, причём в записях вида $A+B, AB$ размеры матриц согласованы. Если порядок матрицы не указан, то он либо не важен, либо ясен из контекста. Далее введены обозначения:

$\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) := \begin{pmatrix} d_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$ — диагональная матрица, в частности,

$E = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ — единичная матрица и $\lambda E = \operatorname{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$ — скалярная матрица;

E_{ij} — матричная единица (на (ij)-м месте стоит единица, на остальных местах — нули);

$J_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ — *жорданова клетка* с элементом $\lambda \in K$ на диагонали (над диагональю — единицы, остальные элементы — нули;

$N := J_0$ — стандартная нильпотентная матрица.

1. Пусть $C = BA$. Докажите, что **а)** строки (столбцы) матрицы C линейно выражаются через строки матрицы A (столбцы матрицы B); **б)** всякому линейному соотношению между строками матрицы B (столбцами матрицы A) удовлетворяют строки (столбцы) матрицы C, в частности, если какие-то строки матрицы B линейно зависимы (нулевые), то таковы же строки с теми же номерами у матрицы C.

2. Вычислите: **а)** $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_m)A$ и $B \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$; **б)** NA и BN; **в)** $E_{ij}A$ и BE_{ij}.

$$\boxed{E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il} = \begin{cases} E_{il} & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k, \end{cases} \quad \text{где } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ при } j = k, \\ 0 \text{ при } j \neq k \end{cases} \text{— символ Кронекера.}}$$

3. Центр кольца квадратных матриц над полем. Найдите все квадратные матрицы, коммутирующие со всеми квадратными матрицами того же порядка.

Указание. Для коммутирования со всеми матрицами достаточно коммутировать с матричными единицами.

4. Вычислите **а)** $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$.

5. Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_n(K)$ и любых многочленов $f(x), g(x) \in K[x]$ матрицы $f(A)$ и $g(A)$ коммутируют.

6.

7. а) Опишите матрицы, коммутирующие с матрицей N и с жордановой клеткой.

б) Докажите, что с жордановой клеткой J_λ коммутируют в точности матрицы вида $f(J_\lambda)$, где $f(x) \in K[x]$.

8. Какие из следующих формул справедливы в кольце $\mathrm{M}_n(K)$:

а) $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}$; **б)** $A^n - B^n = (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}$;

а)$'$ $(A+E)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k$; **б)**$'$ $A^n - E = (A-E)\sum_{k=0}^{n-1} A^k$?

9. Вычислите все степени **б)** жордановой клетки J_λ и, в частности, **а)** матрицы $N = J_0$.

10. Числа Фибоначчи. Вычислите все степени матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Блочная техника

11. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ и $B \in \mathrm{M}_{n\times k}(K)$, тогда определено произведение AB. Разобьём матрицы A и B на блоки.

Ранг матрицы

Все матрицы рассматриваются над произвольным полем K.

Теорема о ранге матрицы. Для любой матрицы A следующие числа равны:
(1) ранг системы строк;
(2) ранг системы столбцов;
(3) число ненулевых строк в ступенчатом виде;
(4) наибольший порядок ненулевого минора.
Это общее число называется *рангом матрицы* A и обозначается $\operatorname{rk} A$.
Доказательство теоремы состоит из решения задач **1, 2, 8а)**.

1. Докажите, что для матрицы, имеющей ступенчатый вид, ненулевые строки образуют базис системы её строк, а столбцы, содержащие лидеры строк, образуют базис системы её стобцов.

В ступенчатых матрицах число лидеров строк равно как рангу системы строк, так и рангу системы столбцов.

2. Докажите, что при элементарных преобразованиях строк матрицы:

а) линейные соотношения между её столбцами не меняются, в частности, ранг системы столбцов не меняется;

б) пространство, порождённое её строками, не меняется, в частности, ранг системы строк не меняется.

3. Пусть A и B — матрицы одного размера. Докажите, что $\operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$.

4. Пусть A и B — матрицы с одинаковым числом строк. Докажите, что $\operatorname{rk}(A|B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$.

5. Докажите, что $\operatorname{rk} A = r$ в точности тогда, когда элементарными преобразованиями строк и столбцов матрицу A можно привести к виду $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_r — единичная матрица порядка r.

6. Теорема Кронекера—Капелли. Пусть дана система линейных уравнений $AX = B$, где $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $X \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{m\times 1}(K)$. Докажите, что

а) система $AX = B$ совместна $\iff \operatorname{rk}(A|B) = \operatorname{rk}(A)$;

б) система $AX = B$ определена $\iff \operatorname{rk}(A|B) = \operatorname{rk}(A) = n$.

7. Единственность главного ступенчатого вида матрицы. Пусть матрица A приведена двумя способами к ступенчатому виду: $A \rightsquigarrow B$ и $A \rightsquigarrow C$. Докажите, что:

а) лидеры строк в матрицах B и C стоят в столбцах с одними и теми же номерами;

б) если обе матрицы B и C имеют главный ступенчатый вид, то $B = C$.

8. Докажите следующие утверждения.

а) Наибольший порядок ненулевого минора матрицы не меняется при элементарных преобразованиях её строк, а для ступенчатых матриц равен числу лидеров.

б) Окаймляющие миноры. Пусть матрица A имеет ненулевой минор порядка r, а любой его *окаймляющий минор* (то есть минор порядка $r+1$, его содержащий) равен нулю. Тогда $\operatorname{rk} A = r$.

в) Пусть $\operatorname{rk} A = r$. Тогда любой минор порядка r в пересечении линейно независимых строк и линейно независимых столбцов отличен от нуля. Существенно ли условие $\operatorname{rk} A = r$?

9. Докажите, что **а)** $\operatorname{rk} AB \leqslant \operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B$, причём **б)** если $A \in \mathrm{M}_n(K)$ и $|A| \neq 0$, то $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} B$.

10. Обязательно ли $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} BA$ для $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$?

11. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Для всякого ли $k \in \mathbb{N}$ можно найти такие матрицы $B \in \mathrm{M}_{m\times k}(K)$ и $C \in \mathrm{M}_{k\times n}(K)$, что $A = BC$? См. также задачу **7.12** из задачника под ред. А. И. Кострикина.

12. Неравенство Сильвестра. Докажите, что $\operatorname{rk} AB \geqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n$ для любых матриц $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ и $B \in \mathrm{M}_{n\times k}(K)$.

13. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $n \geqslant 2$. Каким может быть ранг *присоединённой матрицы* $\hat{A} = (A_{ji})_{ij}$, составленной из алгебраических дополнений A_{ji} элементов a_{ji} матрицы A^t? (Опишите все случаи.)

14. Как может измениться ранг матрицы, если ко всем её элементам прибавить 1?

Линейные отображения и их матрицы

Всюду K — любое поле, элементы из K^n для $n \in \mathbb{N}$ — столбцы высоты n над K.
Отображение $\mathcal{A}\colon K^n \to K^m$ называется *линейным*, если оно удовлетворяет двум условиям:

$$\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v \text{ для всех } u, v \in K^n \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(ku) = k\mathcal{A}u \text{ для всех } k \in K \text{ и } u \in K^n.$$

1. Докажите, что отображение, обратное к линейному биективному, тоже линейно.

2. Докажите, что для линейного отображения $\varphi\colon V \to W$ его *ядро* $\operatorname{Ker}\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ и *образ* $\operatorname{Im}\varphi := \{\varphi(v) \in W \mid v \in V\}$ являются подпространствами в V и W соответственно, а также докажите равенство $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$.

3. Зафиксируем векторы $v_1, \ldots, v_n \in V$. Докажите, что отображение

$$\mathcal{A}_{v_1,\ldots,v_n} = \mathcal{A}\colon \begin{cases} K^n \to V \\ (k_1, \ldots, k_n) \mapsto k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n \end{cases}$$

является линейным, а также установите критерии его инъективности и сюръективности.

4. Пусть пространства V и W конечномерны. Докажите равносильность следующих условий:
(1) существует линейная инъекция *(мономорфизм)* $V \to W$;
(2) существует линейная сюръекция *(эпиморфизм)* $W \to V$;
(3) $\dim V \leqslant \dim W$.

Матрица линейного отображения $\mathcal{A}\colon K^n \to K^m$ — это $(m \times n)$-матрица A над K со столбцами $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n$, где e_i — столбец в K^n с единицей на i-м месте и нулями на остальных местах.

5. Докажите, что **а)** разным отображениям соответствуют разные матрицы и **б)** любая матрица является матрицей некоторого линейного отображения.

Далее матрицы линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ будем обозначать $A, B, \ldots$ соответственно.

6. Докажите, что сумма линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon K^n \to K^m$ (определяемая поточечно) **а)** линейна и **б)** имеет матрицу $A + B$.

7. а) Докажите, что композиция (или *произведение*) $\mathcal{BA} := \mathcal{B} \circ \mathcal{A}\colon K^n \to K^l$ линейных отображений $K^n \xrightarrow{\mathcal{A}} K^m \xrightarrow{\mathcal{B}} K^l$ является линейным отображением и **б)** найдите его матрицу.

Эта матрица называется *произведением матриц* $B \in \mathrm{M}_{l\times m}(K)$ и $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ и обозначается BA. Произведение BA матриц $B \in \mathrm{M}_{l\times m}(K)$ и $A \in \mathrm{M}_{m'\times n}(K)$ в случае $m \neq m'$ не определено.

8. Докажите, что умножение матриц ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения (слева и справа).

Рассмотрим линейную систему $AX = B$ над полем K и линейное отображение $\mathcal{A}\colon K^n \to K^m$ с одной и той же матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$:

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \mathcal{A}\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

9. Докажите следующие утверждения:

а) отображение $\mathcal{A}$ инъективно $\iff$ система $(*)$ определена при $B = 0$ $\implies$ $n \leqslant m$;
б) отображение $\mathcal{A}$ сюръективно $\iff$ система $(*)$ совместна при любом B $\implies$ $n \geqslant m$;
в) отображение $\mathcal{A}$ биективно $\iff$ система $(*)$ определена при любом B $\implies$ $n = m$.

Альтернатива Фредгольма. Если $n = m$, то либо система $(*)$ определена при любом B, либо соответствующая однородная система имеет ненулевое решение.

Обратная матрица. Квадратная матрица B называется *обратной* к (квадратной того же порядка) матрице A, если $AB = E = BA$. Легко понять, что этими равенствами матрица B определяется однозначно. Пишут $B = A^{-1}$.

10. Если линейное отображение $\mathcal{A}\colon K^n \to K^n$ биективно, то обратное к нему отображение $\mathcal{A}^{-1}$ также линейно, причём матрицы отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ взаимно обратны.

11. Вариации альтернативы Фредгольма. Докажите, что при $n = m$:
б) $\mathcal{A}$ инъективно $\iff$ $\mathcal{A}$ сюръективно $\iff$ $\mathcal{A}$ биективно $\iff$ элементы $\mathcal{A}e_1, \ldots, \mathcal{A}e_n \in K^n$ линейно независимы над K;
в) $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{E} \iff \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{E} \iff \mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ для любого отображения $\mathcal{B}\colon K^n \to K^n$ ($\mathcal{E} = \mathrm{id}\,|_{K^n}$).
а) Сравните утверждение пункта **б)** с принципом Дирихле в следующей форме.

Для отображения $f\colon M \to M$ **конечного** множества M в себя: f инъективно $\iff$ f сюръективно $\iff$ f биективно.

Ранг линейного преобразования $\mathcal{A}\colon K^n \to K^m$ — это ранг его матрицы: $\operatorname{rk}\mathcal{A} = \operatorname{rk} A$.

12. Докажите, что а) $\operatorname{rk}\mathcal{A} = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$; б) $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = n$.

13. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$. Обязательно ли $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(BA)$?

14. Пусть $C = AB$. Докажите, что всякому линейному соотношению между строками матрицы A (столбцами матрицы B) удовлетворяют также строки (столбцы) матрицы C. В частности, если какие-то строки матрицы A линейно зависимы (нулевые), то таковы же строки с теми же номерами у матрицы C.

В задачах **15—17** может оказаться полезным переход от матриц к линейным отображениям.

15. Докажите, что для любых матриц $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ и $B \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(K)$ верны утверждения:
а) $\operatorname{rk} AB \leqslant \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$;
б) если $n = k = \operatorname{rk} B$, то $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} A$;
в) $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B \leqslant n + \operatorname{rk} AB$.

16. Докажите, что для любых матриц $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ верны утверждения:
а) если $ABC = 0$, то $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B + \operatorname{rk} C \leqslant 2n$;
б) если $A^2 = A$, то $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk}(E - A) = n$;
в) если $A^2 = A$ и $AB = 0 = BA$, то $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$.

17*. Регулярность кольца матриц над полем. Докажите, что уравнение $AXA = A$ разрешимо для любой квадратной матрицы A над полем.

Кольца, в которых разрешимо уравнение $axa = a$ для любого a, называются *регулярными по фон Нейману* (или просто *регулярными*). Например, любое тело регулярно. Утверждение задачи **17** усиливает следующая теорема.

Теорема. Кольцо матриц над регулярным кольцом регулярно.

Можно также показать, что утверждение задачи **17** справедливо и для прямоугольных матриц над полем.

18*. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon K^n \to K^n$ — линейные отображения. Ясно, что $\operatorname{rk}(\mathcal{B}\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{rk}\mathcal{A}$. Докажите, что

$$\operatorname{rk}\mathcal{A} - \operatorname{rk}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}).$$

19*. Неравенство Фробениуса. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\colon K^n \to K^n$ — линейные отображения. Докажите, что

$$\operatorname{rk}(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \operatorname{rk}(\mathcal{A}\mathcal{C}) \leqslant \operatorname{rk}\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}.$$

К вопросам коллоквиума по алгебре

1. Что такое (бинарная) операция на множестве? Примеры неассоциативных операций. Векторное произведение $\times\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ассоциативно?

3. Для отображения $f\colon X \to Y$: **а)** f обратимо $\iff f$ — биекция;

б) f — обратимо справа $\iff$?; **в)** f — обратимо слева $\iff$?

г) Примеры отображений, обратимых слева, но не справа, и наоборот (см. $x \mapsto x^2, \sqrt{x}$ и др.).

д) Докажите, что для линейного отображения $\mathcal{A}\colon K^n \to K^n$ обратимость равносильна как обратимости слева, так и обратимости справа.

4. а) Преобразование системы „к каждому уравнению прибавим все остальные“ сводится ли к применению элементарных преобразований 1-го, 2-го, 3-го типов?

б) При каких $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ системы $\begin{cases} \alpha X + \beta Y = 0 \\ \gamma X + \delta Y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ сводятся друг к другу элементарными преобразованиями?

5. а) Выпишите матрицы, „отвечающие“ за элементарные преобразования строк.

б) Верно ли, что всякую невырожденную квадратную матрицу можно привести к треугольному виду элементарными преобразованиями 1-го типа (прибавление к одной строке другой с коэффициентом)?

в) Верно ли, что всякую матрицу можно привести к ступенчатому виду элементарными преобразованиями 1-го типа?

6. Сформулируйте и докажите **альтернативу Фредгольма** для квадратной системы.

7. Утверждение этого билета применяется в ключевой **лемме о линейной зависимости,** необходимой, к примеру для определения базиса векторного пространства и ранга системы векторов.

9. а) Пусть X_0 — частное решение линейной системы $AX = B$. Тогда множество решений этой системы есть $\{X_0 + Y \mid AY = 0\}$. Кратко: **ОРН=ЧРН+ОРО** (Общее Решение Неоднородной системы = Частное Решение Неоднородной + Общее Решение Однородной).

б) Если X_1, X_2 — частные решения системы $AX = B$, то $X_1 - X_2$ — решение однородной системы $AX = 0$.

в) Множество решений системы $AX = B$ образует подпростанство (в пространстве столбцов значений неизвестных) $\iff B = 0$ (нулевой столбец).

10. а) Чётность цикла определяется его длиной (почему и как?). Чётность подстановки определяется её цикловым строением.

б) Порядок подстановки определяется её цикловым строением.

в) Определите чётность подстановки $\sigma\colon X \to X$, где X — конечное множество, элементы которого не упорядочены, например, $X = \{\square, \triangle, \lozenge, \bigstar, \bigcirc\}$. Найдите чётность и порядок подстановки $\begin{pmatrix} \square & \triangle & \lozenge & \bigstar & \bigcirc \\ \lozenge & \bigcirc & \bigstar & \square & \triangle \end{pmatrix}$.

11. Основные свойства определителя как функции строк: полилинейность и кососимметричность. Определитель однозначно характеризуется этими свойствами и условием нормировки $|E| = 1$.

13. Какое свойство подстановок используется при доказательстве равенства $|A| = |A^t|$?

15. а) Где в курсе применяется лемма о фальшивом разложении?

б) Пусть $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $n \geqslant 2$. Каким может быть ранг *присоединённой матрицы* $\hat{A} = (A_{ji})_{ij}$, составленной из алгебраических дополнений A_{ji} элементов a_{ji} матрицы A^t? (Опишите все случаи.)

16. Формулы Крамера как один из способов нахождения обратной матрицы и, вообще, решения матричных уравнений $AX = B$ с $|A| \neq 0$.

17. Здесь понадобится определитель Вандермонда.

18. а) Докажите равносильность следующих условий:

(1) существует инъективное линейное отображение *(мономорфизм)* $K^m \to K^n$;

(2) существует сюръективное линейное отображение *(эпиморфизм)* $K^n \to K^m$;

(3) $m \leqslant n$.

б) Зафиксируем векторы $v_1, \dots, v_n \in V$. Докажите, что отображение

$$\mathcal{A}_{v_1,\dots,v_n} = \mathcal{A}\colon \begin{cases} K^n \to V \\ (k_1, \dots, k_n) \mapsto k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n \end{cases}$$

является линейным, а также установите критерии его инъективности и сюръективности (в терминах $v_1, \dots, v_n$).

19. Докажите, что если линейное отображение $\mathcal{A}\colon K^n \to K^n$ биективно, то обратное к нему отображение $\mathcal{A}^{-1}$ также линейно, причём матрицы отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{-1}$ взаимно обратны.

20. Напрямую следует из предыдущего билета. Но надо уметь устанавливать биекцию между матрицами $m \times n$ над K и линейными преобразованиями $K^n \to K^m$.

21. Вычислите все степени жордановой клетки J_λ порядка n ($\lambda \in \mathbb{C}$) и матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 0 & B \\ A & U \end{vmatrix}$ (размеры матриц согласованы).

24. а) Докажите, что если $AB = BA = E = AC = CA$ для $A, B, C \in \mathrm{M}_n(K)$, то $B = C$.

б) Докажите, что если матрица A обратима, то матрица A^t тоже обратима и $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

в) Вычислите $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, если существует. См. **3д).**

г) Каков критерий обратимости матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$?

26. Найдите логические связи между условиями:
(1) система $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно зависима;
(2) любой вектор системы $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно выражается через остальные;
(3) хотя бы один вектор системы $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно выражается через остальные;
(4) система $\{v_1, \dots, v_n\}$ содержит нулевой вектор.

27. Докажите, что для $A \in \mathrm{M}_n(K)$: $|A| = 0 \iff$ строки (столбцы) матрицы A линейно зависимы $\iff \exists B, C \in \mathrm{M}_n(K)\ \ AB = CA = 0$.

28. Следующие условия на систему векторов $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ в векторном пространстве V равносильны:
(1) M — базис в V;
(2) M — максимальная линейно независимая система векторов в V (если добавить к M ещё один вектор, станет линейно зависимой);
(3) M — минимальная система порождающих в V (если вычеркнуть из неё любой вектор, перестанет порождать V);
(4) M — линейно независимая система порождающих в V.

29. Пусть $M = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m\} \subseteq V$, причём $v_1, \dots, v_k$ — базис M (не V!). Когда в M нет других базисов?

30. а) Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ и $\operatorname{rk} A = r$. Верно ли, что любой минор порядка r матрицы A отличен от 0?

б) Для матрицы, имеющей ступенчатый вид, ненулевые строки образуют базис системы её строк, а столбцы, содержащие лидеры строк, образуют базис системы её стобцов.

в) Пусть $\operatorname{rk} A = r$. Докажите, что любой минор порядка r в пересечении линейно независимых строк и линейно независимых столбцов отличен от нуля.

г) Окаймляющие миноры. Пусть матрица A имеет ненулевой минор порядка r, а любой его *окаймляющий минор* (то есть минор порядка $r+1$, его содержащий) равен нулю. Тогда $\operatorname{rk} A = r$.

31. Пусть $C = BA$. Докажите, что **а)** строки (столбцы) матрицы C линейно выражаются через строки матрицы A (столбцы матрицы B); **б)** всякому линейному соотношению между строками матрицы B (столбцами матрицы A) удовлетворяют строки (столбцы) матрицы C, в частности, если какие-то строки матрицы B линейно зависимы (нулевые), то таковы же строки с теми же номерами у матрицы C.

в) Неравенство Сильвестра. Докажите, что $\operatorname{rk} AB \geqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n$ для любых матриц $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ и $B \in \mathrm{M}_{n\times k}(K)$.

г) Обязательно ли $\operatorname{rk} AB = \operatorname{rk} BA$ для $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$?

д) Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Для всякого ли $k \in \mathbb{N}$ можно найти такие матрицы $B \in \mathrm{M}_{m\times k}(K)$ и $C \in \mathrm{M}_{k\times n}(K)$, что $A = BC$? См. также задачу **7.12** из задачника под ред. А. И. Кострикина.

32. Докажите и критерий совместности, и критерий определённости (прямоугольной) системы линейных уравнений в терминах рангов матриц.

33. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Как связаны ранг матрицы A и ранг пространства решений линейной однородной системы с матрицей A?

34. а) Выполняются ли аксиомы поля для множества матриц (с обычными матричными операциями) вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$?

б) А для факторкольца $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$?

35. а) Опишите геометрически отображение $\mathcal{R}_\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto (\cos\alpha + i\sin\alpha)z, \end{cases}$ где $\alpha \in \mathbb{R}$.

б) На комплексной плоскости отмечены числа 1 и $z \neq 0$. Постройте с помощью циркуля и линейки все значения $\sqrt[4]{z}$.

в) Студент Н. Е. Удачный сформулировал формулу Муавра так:

$$(\sin\varphi + i\cos\varphi)^n = \sin n\varphi + i\cos n\varphi.$$

Что он получит за коллоквиум и при каких $n \in \mathbb{Z}$ верна его формула?

36, 37, 38. Возьмём формулировку и доказательство **а)** леммы о поведении модуля многочлена; **б)** леммы Даламбера и **в)** основанном на них доказательстве основной теоремы алгебры. Заменим всюду $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$. Найдите все математические ошибки в полученных текстах.

I вариант

1. В пространстве строк K^5 заданы два подпространства:

U — пространство решений системы уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 = 0, \end{cases}$

$V = \langle (1,0,1,0,1),\ (0,2,1,1,0),\ (1,2,1,2,-1) \rangle.$

а) Составьте систему линейных однородных уравнений с пространством решений V.
б) Найдите базис пространства $U \cap V$.
в) Дополните базис, найденный в пункте **б)**, как до базиса U, так и до базиса V.

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу A^{-n}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 2n-3 & 2n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ вычислите $\begin{pmatrix} \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha & -\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha \\ \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha & \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha \end{pmatrix}^n.$

5. Про матрицу $A \in \mathrm{M}_n(K)$ и число $k \in \mathbb{N}$ известно, что $\operatorname{rk} A^{k+1} < \operatorname{rk} A^k$. Докажите, что $\operatorname{rk} A^k < \operatorname{rk} A^{k-1}$ и $k < n$.

II вариант

1. В пространстве строк K^5 заданы два подпространства:

U — пространство решений системы уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0, \end{cases}$

$V = \langle (0,1,1,0,1),\ (2,0,0,-1,1),\ (2,1,-1,-2,1) \rangle.$

а) Составьте систему линейных однородных уравнений с пространством решений V.
б) Найдите базис пространства $U \cap V$.
в) Дополните базис, найденный в пункте **б)**, как до базиса U, так и до базиса V.

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & n-4 & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу B^{-n}, если

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

4. Для всех $\beta \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ вычислите $\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos\beta - \sin\beta & -\sqrt{3}\sin\beta - \cos\beta \\ \sqrt{3}\sin\beta + \cos\beta & \sqrt{3}\cos\beta - \sin\beta \end{pmatrix}^n.$

5. Про матрицу $A \in \mathrm{M}_n(K)$ известно, что $\exists k \in \mathbb{N}\ A^k = 0$. Докажите, что $A^n = 0$.

III вариант

1. В пространстве строк K^5 заданы два подпространства:

U — пространство решений системы уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$

$V = \langle (1,0,1,1,0),\ (0,-2,1,0,1),\ (1,-2,1,-1,2) \rangle$.

а) Составьте систему линейных однородных уравнений с пространством решений V.
б) Найдите базис пространства $U \cap V$.
в) Дополните базис, найденный в пункте **б)**, как до базиса U, так и до базиса V.

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

3. Вычислите $(2n \times 2n)$-матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^t & 0 \end{pmatrix}^{-1} \text{ для } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

4. Для всех $\gamma \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ вычислите $\begin{pmatrix} \sin\gamma + \cos\gamma & -\sin\gamma + \cos\gamma \\ \sin\gamma - \cos\gamma & \sin\gamma + \cos\gamma \end{pmatrix}^n$.

5. Про матрицу $A \in \mathrm{M}_n(K)$ известно, что $\operatorname{rk} A^n < \operatorname{rk} A^{n-1}$. Докажите, что $\operatorname{rk} A^k = n - k$ для всех $k = 1, \dots, n$.

IV вариант

1. В пространстве строк K^5 заданы два подпространства:

U — пространство решений системы уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$

$V = \langle (1,2,-1,1,2),\ (1,0,1,1,0),\ (0,2,0,1,1) \rangle$.

а) Составьте систему линейных однородных уравнений с пространством решений V.
б) Найдите базис пространства $U \cap V$.
в) Дополните базис, найденный в пункте **б)**, как до базиса U, так и до базиса V.

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-2 & n-1 & n & \dots & n & n & n \\ n-1 & n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

3. Вычислите $(2n \times 2n)$-матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & D^t \\ D & 0 \end{pmatrix}^{-1} \text{ для } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

4. Для всех $\delta \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ вычислите $\begin{pmatrix} \sin\delta - \cos\delta & \sin\delta + \cos\delta \\ -\sin\delta - \cos\delta & \sin\delta - \cos\delta \end{pmatrix}^n$.

5. Для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(K)$ по теореме о ранге произведения матриц справедлива бесконечная цепочка неравенств

$$\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} A^2 \geqslant \operatorname{rk} A^3 \geqslant \dots.$$

Какое наибольшее число строгих неравенств может быть в этой цепочке?

Ответы

I.1. а) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-2x_3+x_5=0. \end{cases}$ **б)** $(1,1,1,1,0),\ (0,1,1,0,1).$ **в)** До U: $(0,0,1,1,1)$; до V: $(1,0,1,0,1)$.

II.1. а) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-2x_5=0. \end{cases}$ **б)** $(0,-1,1,1,0),\ (1,0,1,0,1).$ **в)** До U: $(1,1,-1,0,0)$; до V: $(0,1,1,0,1)$.

III.1. а) $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+x_4=0 \\ -x_1+x_2+x_3+x_5=0. \end{cases}$ **б)** $(0,-1,1,1,0),\ (1,-1,1,0,1).$ **в)** До U: $(1,-2,1,0,0)$; до V: $(1,0,1,1,0)$.

IV.1. а) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-2x_4=0 \\ x_1+x_2-x_3-2x_5=0. \end{cases}$ **б)** $(0,1,1,1,0),\ (1,0,-1,0,1).$ **в)** До U: $(1,1,-1,0,0)$; до V: $(1,0,1,1,0)$.

I.2. $-\sum_{k=1}^n \prod_{i\neq k} a_i$. **II.2.** $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$. **III.2.** $\sum_{k=1}^n a_k \prod_{i\neq k} x_i$. **IV.2.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$.

I.3. $\begin{pmatrix} C_{2n}^0 & -C_{2n}^1 & C_{2n}^2 & \ldots & C_{2n}^{2n-2} & -C_{2n}^{2n-1} \\ 0 & C_{2n}^0 & -C_{2n}^1 & \ldots & -C_{2n}^{2n-3} & C_{2n}^{2n-2} \\ 0 & 0 & C_{2n}^0 & \ldots & C_{2n}^{2n-4} & -C_{2n}^{2n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_{2n}^0 & -C_{2n}^1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C_{2n}^0 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} (= B^{-2})$.

II.3. $\begin{pmatrix} C_n^0 & -C_n^1 & C_n^2 & \ldots & (-1)^n C_n^{n-2} & (-1)^{n+1} C_n^{n-1} \\ 0 & C_n^0 & -C_n^1 & \ldots & (-1)^{n+1} C_n^{n-3} & (-1)^n C_n^{n-2} \\ 0 & 0 & C_n^0 & \ldots & (-1)^n C_n^{n-4} & (-1)^{n+1} C_n^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & C_n^0 & C_n^1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C_n^0 \end{pmatrix}$. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.3. $\begin{pmatrix} 0 & (C^{-1})^t \\ C^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, где $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \ldots & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{n+1} & (-1)^n \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV.3. $\begin{pmatrix} 0 & D^{-1} \\ (D^{-1})^t & 0 \end{pmatrix}$, где $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **4.** $R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

I.4. $2^n R\left(n\alpha - \frac{n\pi}{3}\right)$. **II.4.** $2^n R\left(n\beta + \frac{n\pi}{6}\right)$. **III.4.** $2^{n/2} R\left(n\gamma - \frac{n\pi}{4}\right)$. **IV.4.** $2^{n/2} R\left(n\delta + \frac{5n\pi}{4}\right)$.

5. 1. Для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(K)$ и соответствующего линейного отображения $\mathcal{A}\colon K^n \to K^n$ пространства K^n столбцов имеем: $\operatorname{rk} A = \dim\{Y \in K^n \mid \exists X \in K^n\ AX = Y\} = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A}$.

2. По п. 1 для всех $k \in \mathbb{N}$ верны импликации: $\operatorname{rk} A^k = \operatorname{rk} A^{k-1} \iff \operatorname{Im}\mathcal{A}^k = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k-1} \implies \operatorname{Im}\mathcal{A}^{k+1} = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^k) = \mathcal{A}(\operatorname{Im}\mathcal{A}^{k-1}) = \operatorname{Im}\mathcal{A}^k \iff \operatorname{rk} A^{k+1} = \operatorname{rk} A^k$.

3. Если $\operatorname{rk} A = n$, то $\operatorname{rk} A^k = n$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Если $\operatorname{rk} A < n$, то в цепочке $\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} A^2 \geqslant \ldots$ не более $n-1$ строгих неравенств, причём ровно $n-1$ их будет только в случае

$$n-1 = \operatorname{rk} A > \operatorname{rk} A^2 > \ldots > \operatorname{rk} A^n = 0 \quad\iff\quad \operatorname{rk} A^k = n-k \text{ для всех } k = 1, \ldots, n.$$

Это выполняется, например, для матрицы $A = N$, $N_{i,i+1} = 1$, $N_{ij} = 0$ при $j \neq i+1$.

4. Если $\operatorname{rk} A^n < \operatorname{rk} A^{n-1}$, то по п. 2 $\operatorname{rk} A^n < \operatorname{rk} A^{n-1} < \ldots < \operatorname{rk} A$ — $(n-1)$ строгое неравенство, поэтому по п. 3 $\operatorname{rk} A^k = n-k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

5. Если $\exists k \in \mathbb{N}\ A^k = 0$, то $\operatorname{rk} A < n$ и цепочка $\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} A^2 \geqslant \ldots$ стабилизируется на 0, причём не позднее n-го шага (максимум $(n-1)$ строгое неравенство по п. 3), значит, $A^n = 0$.

Круговые многочлены

Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через ε_n любой первообразный корень степени n из 1. Тогда

$$x^n - 1 = \prod\nolimits_{j=1}^{n} (x - \varepsilon_n^j).$$

Перемножив только скобки с первообразными корнями, получим *круговой многочлен* (или *многочлен деления круга*):

$$\Phi_n(x) := \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n, \\ (j,n)=1}} (x - \varepsilon_n^j).$$

В частности, $\Phi_1(x) = x - 1$ и $x - 1 \nmid \Phi_n(x)$ при $n > 1$.
Ясно, что $\deg \Phi_n(x) = \varphi(n)$, где φ — функция Эйлера.

1. Выпишите многочлены $\Phi_n(x)$ при $n = 2, 3, \ldots, 10$.

2. Найдите $\Phi_n(x)$ для **а)** простого $n = p$ и, вообще, для **б)** степени $n = p^k$ простого p.

3. а) Докажите, что каждый корень из единицы является первообразным ровно для одной степени.
б) Докажите, что $(\Phi_m, \Phi_n) = 1$ при $m \neq n$.

4. Докажите следующие равенства многочленов, предварительно сравнив их степени:
а) $x^n - 1 = \prod\limits_{d|n} \Phi_d(x)$;
б) $\Phi_n(x) = \prod\limits_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$, где μ — функция Мёбиуса;
в) $\Phi_{pn}(x) = \begin{cases} \Phi_n(x^p), & \text{если простое } p \mid n, \\ \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x), & \text{если простое } p \nmid n; \end{cases}$
г) $\Phi_n(x) = \Phi_{p_1 \ldots p_s}(x^{n/p_1 \ldots p_s})$, где $p_1, \ldots, p_s$ — все простые делители n;
д) $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ для нечётных $n > 1$.

Пункт **а)** позволяет вычислять многочлены $\Phi_n(x)$ рекуррентно.
Из **а)** индукцией, а также из **б)** вытекает, что $\Phi_n(x) = x^{\varphi(n)} + \ldots \in \mathbb{Z}[x]$.

5. При каждом $n \in \mathbb{N}$ вычислите **а)** $\Phi_n(0)$; **б)** $\Phi_n(1)$.

6. Докажите неприводимость над $\mathbb{Q}$ многочленов $\Phi_p(x)$ при простых p.
Указание. Сделайте замену $x = y + 1$ и воспользуйтесь признаком Эйзенштейна.

Теорема. Все круговые многочлены неприводимы над $\mathbb{Q}$.

Пусть $x^n - 1 = f(x)g(x)$, где $f(x)$ — унитарный неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен с корнем $\varepsilon = \varepsilon_n$. Надо доказать, что $f(x) = \Phi_n(x)$. Для этого докажите следующие утверждения.

7*. $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
Далее p — простое число, $p \nmid n$. Для многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ обозначим через $\overline{P}(x)$ многочлен из $\mathbb{Z}_p[x]$, полученный из $P(x)$ редукцией коэффициентов по модулю p.

8*. Многочлены $\overline{f}(x)$ и $\overline{g}(x)$ взаимно просты.

9*. а) $f(x) \mid f(x^p)$ или $f(x) \mid g(x^p)$;
б) если $f(x) \mid g(x^p)$, то утверждение **8** неверно;
в) $f(\varepsilon^p) = 0$.

10*. Если $k \in \mathbb{N}$, $(k, n) = 1$, то $f(\varepsilon^k) = 0$. Значит, $f(x) = \Phi_n(x)$.

Многочлены и комплексные числа

1. При каждом $n \in \mathbb{N}$ найдите остаток от деления многочлена $x^n + x + 1$ на **а)** $x^2 - 1$; **б)** $x^2 + 1$.

2. Докажите, что **а)** $x^2 + 1 \mid (\cos\varphi + x\sin\varphi)^n - \cos n\varphi - x\sin n\varphi$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}$;
б) $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2 \mid x^n\sin\varphi - r^{n-1}x\sin n\varphi + r^n\sin(n-1)\varphi$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

3. Решите уравнение $(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^6)^2$.

4. Докажите, что $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \mid 1 + x^{111} + x^{222} + x^{333} + x^{444}$.

5. Найдите все пары $(p, q) \in \mathbb{C}^2$, при которых $x^2 + px + q \mid x^4 + 1$.

6. Найдите все пары $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, при которых многочлен $x^3 + ax^2 + 18$ и $x^3 + bx + 12$ имеют два общих корня.

7. **а)** Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен A, а на $x - b$ — равен B. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $(x - a)(x - b)$.
б) В условиях пункта **а)** остатое от деления многочлена $f(x)$ на $x - c$ равен C. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $(x - a)(x - b)(x - c)$.

8. Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $n \in \mathbb{N}$, причём $x - 1 \mid f(x^n)$. Докажите, что $x^n - 1 \mid f(x^n)$.

9. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых **а)** $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$;
б) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n \mid 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$.

10. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $2x^{2m} + ax^m + 3 \nmid 3x^{2n} + ax^n + 2$.

Многочлены и комплексные числа

1. При каждом $n \in \mathbb{N}$ найдите остаток от деления многочлена $x^n + x + 1$ на **а)** $x^2 - 1$; **б)** $x^2 + 1$.

2. Докажите, что **а)** $x^2 + 1 \mid (\cos\varphi + x\sin\varphi)^n - \cos n\varphi - x\sin n\varphi$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}$;
б) $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2 \mid x^n\sin\varphi - r^{n-1}x\sin n\varphi + r^n\sin(n-1)\varphi$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

3. Решите уравнение $(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^6)^2$.

4. Докажите, что $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \mid 1 + x^{111} + x^{222} + x^{333} + x^{444}$.

5. Найдите все пары $(p, q) \in \mathbb{C}^2$, при которых $x^2 + px + q \mid x^4 + 1$.

6. Найдите все пары $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, при которых многочлен $x^3 + ax^2 + 18$ и $x^3 + bx + 12$ имеют два общих корня.

7. **а)** Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен A, а на $x - b$ — равен B. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $(x - a)(x - b)$.
б) В условиях пункта **а)** остатое от деления многочлена $f(x)$ на $x - c$ равен C. Найдите остаток от деления $f(x)$ на $(x - a)(x - b)(x - c)$.

8. Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $n \in \mathbb{N}$, причём $x - 1 \mid f(x^n)$. Докажите, что $x^n - 1 \mid f(x^n)$.

9. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых **а)** $x^2 + x + 1 \mid x^{2n} + x^n + 1$;
б) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n \mid 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$.

10. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $2x^{2m} + ax^m + 3 \nmid 3x^{2n} + ax^n + 2$.

Кубические многочлены

Формула корней

1. Решите уравнение $x^3 = 3uvx + u^3 + v^3$ при любых **а)** $u, v \in \mathbb{C}$ над $\mathbb{C}$; **б)** $u, v \in \mathbb{R}$ над $\mathbb{R}$.

2. Решите уравнения над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$: **а)** $x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$; **б)** $x^3 + 6x - 2 = 0$; **в)** $x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$.

3. Вычислите в $\mathbb{R}$: **а)** $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$; **б)** $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}}$.

Симметрические многочлены и теорема Виета

4. Пусть x_1, x_2, x_3 — тройка корней многочлена x^3+ax^2+bx+c. Составьте кубический многочлен с тройкой корней:

а) $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$, $x_2 + x_3$; **б)** x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3; **в)** x_1^3, x_2^3, x_3^3; **г)** $1/x_1$, $1/x_2$, $1/x_3$ (при $c \neq 0$).

5. Пусть x, y, z — тройка корней многочлена $t^3 + pt + q$. Докажите, что

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + xz + z^2 = y^2 + yz + z^2 = -p.$$

6. Докажите, что если $\begin{cases} x + y + z = a \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}, \end{cases}$ то хотя бы одно из чисел x, y, z равно a.

7. Разложите на линейные множители следующие однородные многочлены над $\mathbb{C}$:

а) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$; **б)** $(ab + ac + bc)(a + b + c) - abc$;

в) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$; **г)** $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

8*. Найдите все $k \in \mathbb{C}$, при которых многочлен $a^3 + b^3 + c^3 - kabc \in \mathbb{C}[a, b, c]$ раскладывается на линейные множители.

9. Пусть корни кубического многочлена f образуют правильный треугольник на комплексной плоскости. Докажите, что многочлен f' имеет двойной корень, лежащий в центре этого треугольника.

10*. Пусть корни кубического многочлена f образуют треугольник на комплексной плоскости. Докажите, что оба корня многочлена f' лежат внутри этого треугольника.

Дискриминант

11. Установите критерий того, что многочлен $x^3 + px + q$ имеет **а)** тройной корень; **б)** кратный корень.

Выражение $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ называется *дискриминантом* приведённого кубического многочлена с тройкой корней x_1, x_2, x_3.

12. Выразите дискриминант многочлена $x^3 + px + q$ через p и q.

13. Пусть $p, q \in \mathbb{R}$. Найдите число действительных корней многочлена x^3+px+q в зависимости от знака его дискриминанта.

Многочлены четвёртой степени

14. Метод Феррари решения уравнения $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ состоит в сведении его к виду

$$(x^2 + a)^2 + Q(x) = 0,$$

где $Q(x)$ — квадрат линейного двучлена. Как подобрать a?

15. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — четвёрка корней многочлена $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$.

а) Составьте кубический многочлен с тройкой корней $x_1x_2 + x_3x_4$, $x_1x_3 + x_2x_4$, $x_1x_4 + x_2x_3$.

б) Составьте кубический многочлен с тройкой корней $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$, $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$.

в) Пусть $g(x) = x^4 + \ldots$ — многочлен с чётверкой корней $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$. Найдите отношение дискриминантов многочленов $g(x)$ и $f(x)$ при условии, что они ненулевые.

Многочлены с целыми и рациональными коэффициентами

1. Теорема о рациональных корнях. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$ и m/n — корень многочлена $f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Тогда $m \mid a_0$ и $n \mid a_k$.

В частности, если $a_k = 1$, то всякий рациональный корень многочлена $f(x)$ является целым.

2. Докажите, что в условиях теоремы о рациональных корнях верно утверждение: для любого $t \in \mathbb{Z}$ число $m - nt$ является делителем числа $f(t)$.

3. а) Найдите все $n \in \mathbb{Z}$, при которых многочлен $x^3 + nx + 2$ приводим над $\mathbb{Z}$.

б) Сформулируйте и докажите критерий неприводимости кубического многочлена над $\mathbb{Q}$.

4. Приводим ли над $\mathbb{Z}$ многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$?

5. Найдите все $n \in \mathbb{Z}$, при которых уравнение $x^3 + nx^2y + y^3 = 0$ имеет хотя бы одно ненулевое решение $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$.

6. Докажите, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ многочлен $x^n - 2$ неприводим над $\mathbb{Q}$ двумя способами:

1) переходя к расширению $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$;   2) оставаясь в поле $\mathbb{Q}$.

7. Теорема Безу для многочлена над $\mathbb{Z}$. Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $a, b \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $a - b \mid f(a) - f(b)$.

8. Про многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и число $n \in \mathbb{Z}$ известно, что $f(1) = 1$ и $f(n) = 0$. Найдите n.

9. Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Известно, что числа $f(2)$ и $f(3)$ кратны 6. Докажите, что число $f(5)$ кратно 6.

10. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

11. Докажите, что $(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^l) \mid (1-x^{k+1})(1-x^{k+2})\ldots(1-x^{k+l})$ при всех $k, l \in \mathbb{N}$.

12. Многочлены Гаусса. Из решения задачи **11** следует, что при всех $k, l \in \mathbb{N}_0$ дроби

$$g_{k,l}(x) := \frac{(1-x^{k+1})(1-x^{k+2})\ldots(1-x^{k+l})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^l)}$$

являются многочленами ($g_{k,0} = g_{0,l} = 1$). Они называются *многочленами Гаусса.*

а) Вычислите $\deg g_{k,l}(x)$.

б) Вычислите $g_{k,l}(1)$.

в) Докажите аналоги биномиальных тождеств для многочленов $g_{k,l}(x)$:

$$g_{k,l}(x) = g_{l,k}(x) = g_{k-1,l}(x) + x^k g_{k,l-1}(x) \quad \text{при } k, l \geqslant 1.$$

13*. Докажите, что при каждом простом p число k-мерных подпространств в пространстве $\mathbb{Z}_p^{k+l}$ (над полем $\mathbb{Z}_p$) равно $g_{k,l}(p)$.

Многочлен над $\mathbb{Z}$ называется *примитивным*, если все его коэффициенты взаимно просты в совокупности.

14. Лемма Гаусса. Произведение примитивных многочленов является примитивным многочленом.

15. Теорема. Многочлен над $\mathbb{Z}$ неприводим над $\mathbb{Z}$ в точности тогда, когда он неприводим над $\mathbb{Q}$.

16. Признак[1] Эйзенштейна. Многочлен $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим, если для некоторого простого p его коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) $p \nmid a_n$;
2) $p \mid a_{n-1}, \ldots, a_0$;
3) $p^2 \nmid a_0$.

---

[1] Который часто, по традиции, ошибочно называют критерием.

17. Докажите, что круговой многочлен $\Phi_p(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$ при каждом простом p. *Указание.* Сделайте подстановку $x = y + 1$.

Теорема. Все круговые многочлены неприводимы над $\mathbb{Z}$.

Целозначные многочлены. Многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ называется *целозначным*, если $f(n) \in \mathbb{Z}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что всякий многочлен над $\mathbb{Z}$ целозначен.

18. Докажите, что коэффициенты каждого целозначного многочлена рациональны.

19. Приведите пример целозначного многочлена хотя бы с одним нецелым коэффициентом.

20. Докажите, что если многочлен степени n принимает в n последовательных целых точках целые значения, то он целозначен.

21*. Найдите базис над $\mathbb{Z}$ в кольце целозначных многочленов, т. е. такую систему целозначных многочленов $f_0, \ldots, f_n, \ldots$, что любой целозначный многочлен представим, и притом однозначно, в виде $a_0 f_0 + \ldots + a_k f_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}_0$ и некоторых $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$.

22*. Найдите индекс подгруппы целозначных многочленов степени $\leqslant 5$ в группе (по сложению) многочленов над $\mathbb{Z}$ степени $\leqslant 5$.

23*. Числа 7, 41, 997, 2011 простые, а многочлены $7x$, $4x+1$, $9x^2+9x+7$, $2x^3+x+1$ неприводимы над $\mathbb{Z}$. Пусть $p = \overline{a_n \ldots a_1 a_0}$ — простое число, записанное в десятичной системе счисления. Докажите, что многочлен $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

24. Суммы Ньютона. Известно, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \ldots,$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \ldots,$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \ldots.$$

Докажите, что при любом $k \in \mathbb{N}$ существует такой многочлен $P_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + \ldots$, что

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k = P_{k+1}(n) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Линейные рекурренты

1. Сколькими способами можно покрыть прямоугольник $2 \times n$ доминошками из двух клеток?

2. Сколько существует последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых длина каждого блока из единиц чётна?

3. Сколько существует последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых нет двух подряд идущих нулей?

4. Лягушка прыгает по вершинам **а)** треугольника ABC; **б)** пятиугольника $ABCDE$, перемещаясь каждый раз на одну из соседних вершин. Сколькими способами она может попасть из A в A ровно за n прыжков?

5. Ханойская башня. Имеется три колышка, на первый из которых нанизаны n дисков с уменьшающимися кверху диаметрами. За один ход можно перенести один диск с любого колышка на любой другой, причём нельзя класть больший диск на меньший.

а) За какое наименьшее число ходов можно перенести все n дисков на третий колышек?

б) Тот же вопрос при условии, что диски можно переносить только по циклу $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

6. Арифметико-геометрическая прогрессия. Так называется последовательность x, удовлетворяющая для некоторых q и d соотношению

$$x_n = qx_{n-1} + d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При всех q и d выразите x_n через n.

7. Сколько n-разрядных десятичных чисел, которые могут начинаться с нуля,

а) не содержат в своей записи двух стоящих рядом чётных цифр;

б) не содержат в своей записи цифры 5 после цифры 2?

8. Сколькими способами можно покрыть прямоугольник $2 \times n$, используя квадратики 1×1, доминошки из двух клеток и уголки из трёх клеток?

9. Периодические последовательности. Найдите все такие последовательности $x\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, что при всех $n \in \mathbb{N}_0$: **а)** $x_{n+2} = x_n$; **б)** $x_{n+4} = x_n$; **в)** $x_{n+3} = x_n$; **г)*** $x_{n+k} = x_n$, где $k \in \mathbb{N}$.

10. Определим целые числа a_n и b_n равенствами

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

а) Выразите явно a_n и b_n через n (число операций в формуле не должно зависеть от n).

б)* Ясно, что $\left(1 - \sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, и поэтому $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$. Докажите, что *уравнение Пелля* $x^2 - 2y^2 = 1$ не имеет других решений в целых числах, кроме $(x, y) = (\pm a_{2k}, \pm b_{2k})$, $k \in \mathbb{N}_0$.

11. Многочлены Чебышёва. Докажите, что

а) $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ при $n \geqslant 2$;

б) $T_n(x) = \dfrac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{2}$ при $n \geqslant 0$.

12*. Сколько существует последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых все блоки из нулей имеют длину $\geqslant 3$?

I вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{x}{x^5-1}$ на простейшие над полем **а)** $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_5$.

2. Вычислите сумму обратных квадратов комплексных корней многочлена $2x^3+2x-5$.

3. Найдите сумму всех первообразных корней из 1 степени 55.

4. Изобразите на комплексной плоскости множество $\{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{-x} \mid x\in\mathbb{R}\}$.

5. Сколько существует строк длины n из цифр 0, 1, 2, 3, в которых после 0 всегда стоит 1?

II вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{1}{x^5+1}$ на простейшие над полем **а)** $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_2$.

2. Вычислите сумму обратных квадратов комплексных корней многочлена $2x^3-3x+7$.

3. Найдите сумму всех первообразных корней из 1 степени 45.

4. Найдите все $a\in\mathbb{C}$, при которых все корни многочлена z^9-az^3+1 лежат в круге $\{w \mid |w|\leqslant 1\}$.

5. Сколько существует строк длины n из букв a, b, c, d, в которых нет фрагмента bb?

III вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{x}{x^5+1}$ на простейшие над полем **а)** $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_5$.

2. Вычислите сумму обратных квадратов комплексных корней многочлена $3x^3-x+4$.

3. Найдите все элементы множества $\sqrt[75]{-1}\cap\left(\sqrt[90]{1}\setminus\sqrt[45]{1}\right)$ в тригонометрической форме.

4. Найдите все $a\in\mathbb{R}$, при которых многочлен $4x^9-3x^3-a$ имеет ровно один действительный корень.

5. Сколько существует строк длины n из цифр 1, 2, 3, в которых нет фрагмента 22?

IV вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{1}{x^5-1}$ на простейшие над полем **а)** $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_2$.

2. Вычислите сумму обратных квадратов комплексных корней многочлена $2x^3+3x-4$.

3. Найдите все значения выражения $\left(\sqrt[63]{1}\right)^{15}\left(\sqrt[15]{1}\right)^{7}$.

4. Изобразите на комплексной плоскости все такие $z\in\mathbb{C}$, что среди комплексных значений выражения $\sqrt[4]{z^3+1}$ встречается вещественное.

5. Сколько существует строк длины n из букв x, y, z, в которых перед z всегда стоит y?

Комплексные числа и многочлены: ответы

1. Если $g(x)=(x-x_1)\dots(x-x_n)$ над полем K, все x_i различны и $\deg f<n$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{x-x_k},\ \text{где } a_k=\frac{f(x_k)}{g'(x_k)},\ k=1,\dots,n.$$

Обозначим $\omega:=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$. Тогда $\omega+\omega^4=2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt5}{2}$, $\omega^2+\omega^3=2\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt5}{2}$.

I. а), б), в) $\dfrac{x}{x^5-1}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\omega^2}{x-\omega}+\dfrac{\omega^3}{x-\omega^4}+\dfrac{\omega^4}{x-\omega^2}+\dfrac{\omega}{x-\omega^3}\right)=$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2\cos\frac{4\pi}{5}x-2\cos\frac{2\pi}{5}}{x^2-2\cos\frac{2\pi}{5}x+1}+\frac{2\cos\frac{2\pi}{5}x-2\cos\frac{4\pi}{5}}{x^2-2\cos\frac{4\pi}{5}x+1}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{x^3+2x^2+3x-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\right).$$

II. а), б), в) $\dfrac{1}{x^5+1}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{\omega}{x+\omega}+\dfrac{\omega^2}{x+\omega^2}+\dfrac{\omega^3}{x+\omega^3}+\dfrac{\omega^4}{x+\omega^4}\right)=$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2\cos\frac{2\pi}{5}x+2}{x^2+2\cos\frac{2\pi}{5}x+1}+\frac{2\cos\frac{4\pi}{5}x+2}{x^2+2\cos\frac{4\pi}{5}x+1}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x^3-2x^2+3x-4}{x^4-x^3+x^2-x+1}\right);$$

III. а), б), в) $\dfrac{x}{x^5+1}=\dfrac{-1}{5}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{\omega^2}{x+\omega}+\dfrac{\omega^3}{x+\omega^4}+\dfrac{\omega^4}{x+\omega^2}+\dfrac{\omega}{x+\omega^3}\right)=$

$$=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2\cos\frac{4\pi}{5}x+2\cos\frac{2\pi}{5}}{x^2+2\cos\frac{2\pi}{5}x+1}+\frac{2\cos\frac{2\pi}{5}x+2\cos\frac{4\pi}{5}}{x^2+2\cos\frac{4\pi}{5}x+1}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{x^3-2x^2+3x+1}{x^4-x^3+x^2-x+1}\right).$$

IV. а), б), в) $\dfrac{1}{x^5-1}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\omega}{x-\omega}+\dfrac{\omega^2}{x-\omega^2}+\dfrac{\omega^3}{x-\omega^3}+\dfrac{\omega^4}{x-\omega^4}\right)=$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2\cos\frac{2\pi}{5}x-2}{x^2-2\cos\frac{2\pi}{5}x+1}+\frac{2\cos\frac{4\pi}{5}x-2}{x^2-2\cos\frac{4\pi}{5}x+1}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+x^2+x+1}\right);$$

I, III. 1г). $\dfrac{1}{(x+1)^4}-\dfrac{1}{(x+1)^5}$. **II, IV. 1г).** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x^3+x}{x^4+x^3+x^2+x+1}$.

2. Сумма обратных квадратов корней многочлена ax^3+bx^2+cx+d при $a,d\neq0$ равна сумме квадратов корней многочлена dy^3+cy^2+by+a, то есть величине $\sigma_1^2-2\sigma_2=\frac{c^2}{d^2}-\frac{2b}{d}$.

I. $\frac{4}{25}$. **II.** $\frac{9}{49}$. **III.** $\frac{1}{16}$. **IV.** $\frac{9}{16}$.

3.I. 1. **3.II.** 0. **3.III.** $\cos\frac{\pi+2\pi k}{15}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{15}$, $k=0,\dots,14$. **3.IV.** $\left(\sqrt[63]{1}\right)^{15}\left(\sqrt[15]{1}\right)^{7}=\sqrt[105]{1}$.

4.I. Прямые, проходящие через 0, с углами $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. **4.II.** $a=0$. **4.III.** $|a|>1$.
4.IV. Три прямые с углами $\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$ и три отрезка длины 1 с углами $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$, проходящие через 0. $\sqrt[4]{z^3+1}\cap\mathbb{R}\neq\varnothing\iff z^3+1\geqslant0$ ($\Rightarrow z^3\in\mathbb{R}$).

5.I. $a_n=\frac{3+\sqrt{13}}{2\sqrt{13}}\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n+\frac{-3+\sqrt{13}}{2\sqrt{13}}\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n$. $a_n=3a_{n-1}+a_{n-2}$. $a_1=3$, $a_2=10\Rightarrow a_0=1$.

5.II. $b_n=\frac{5+\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n+\frac{-5+\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n$. $b_n=3b_{n-1}+3b_{n-2}$. $b_1=4$, $b_2=15\Rightarrow b_0=1$.

5.III. $c_n=\frac{2+\sqrt3}{2\sqrt3}\left(1+\sqrt3\right)^n+\frac{-2+\sqrt3}{2\sqrt3}\left(1-\sqrt3\right)^n$. $c_n=2c_{n-1}+2c_{n-2}$. $c_1=3$, $c_2=8\Rightarrow c_0=1$.

5.IV. $d_n=\frac{1+\sqrt2}{2\sqrt2}\left(1+\sqrt2\right)^n+\frac{-1+\sqrt2}{2\sqrt2}\left(1-\sqrt2\right)^n$. $d_n=2d_{n-1}+d_{n-2}$. $d_1=2$, $d_2=5\Rightarrow d_0=1$.

I вариант

1. Сколькими способами можно раскрасить стороны правильного семиугольника в q цветов, если раскраски, получаемые друг из друга поворотом, считаются одинаковыми?

2. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((123)(2345)(456)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)\big)^3$.

3. Сколько существует таких подстановок $\sigma \in S_7$, что $O(\sigma^3) = O(\sigma^4)$?

4. Опишите все такие подстановки $X \in S_9$, что $X^2 = (123)(789)$, и укажите их количество.

5. Найдите все подстановки в S_5, переставляющие переменные $x_1, \ldots, x_5$ и сохраняющие многочлен $x_1x_2x_3 + x_3x_4x_5$.

6. Подстановки $\sigma, \tau \in S_{10}$ переставляют классы вычетов $1, \ldots, 11$ по правилам: $\sigma(k) = 2k+1$, $\tau(k) = 3k-2$ для всех $k \in \mathbb{Z}_{11}$. Задайте подстановку $\tau^{-1}\sigma\tau$ формулой того же вида.

II вариант

1. Сколькими способами могут встать в круг n мальчиков и n девочек так, чтобы мальчики и девочки чередовались? (Расстановки одинаковы, если у каждого ребёнка одни и те же соседи.)

2. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((1234)(345)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)(11\,12\,13)\big)^3$.

3. Сколько существует таких подстановок $\tau \in S_6$, что $O(\tau^2) = O(\tau^5)$?

4. Опишите все такие подстановки $Y \in S_9$, что $Y^3 = (45)(67)(89)$, и укажите их количество.

5. Найдите все подстановки в S_6, переставляющие переменные $y_1, \ldots, y_6$ и сохраняющие многочлен $y_1y_2y_3y_4 + y_3y_4y_5y_6$.

6. Подстановки $\sigma, \tau \in S_9$ переставляют классы вычетов $1, \ldots, 9$ по правилам: $\sigma(k) = 4k-1$, $\tau(k) = 2k+3$ для всех $k \in \mathbb{Z}_9$. Задайте подстановку $\tau\sigma\tau^{-1}$ формулой того же вида.

I вариант

1. Сколькими способами можно раскрасить стороны правильного семиугольника в q цветов, если раскраски, получаемые друг из друга поворотом, считаются одинаковыми?

2. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((123)(2345)(456)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)\big)^3$.

3. Сколько существует таких подстановок $\sigma \in S_7$, что $O(\sigma^3) = O(\sigma^4)$?

4. Опишите все такие подстановки $X \in S_9$, что $X^2 = (123)(789)$, и укажите их количество.

5. Найдите все подстановки в S_5, переставляющие переменные $x_1, \ldots, x_5$ и сохраняющие многочлен $x_1x_2x_3 + x_3x_4x_5$.

6. Подстановки $\sigma, \tau \in S_{10}$ переставляют классы вычетов $1, \ldots, 11$ по правилам: $\sigma(k) = 2k+1$, $\tau(k) = 3k-2$ для всех $k \in \mathbb{Z}_{11}$. Задайте подстановку $\tau^{-1}\sigma\tau$ формулой того же вида.

II вариант

1. Сколькими способами могут встать в круг n мальчиков и n девочек так, чтобы мальчики и девочки чередовались? (Расстановки одинаковы, если у каждого ребёнка одни и те же соседи.)

2. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((1234)(345)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)(11\,12\,13)\big)^3$.

3. Сколько существует таких подстановок $\tau \in S_6$, что $O(\tau^2) = O(\tau^5)$?

4. Опишите все такие подстановки $Y \in S_9$, что $Y^3 = (45)(67)(89)$, и укажите их количество.

5. Найдите все подстановки в S_6, переставляющие переменные $y_1, \ldots, y_6$ и сохраняющие многочлен $y_1y_2y_3y_4 + y_3y_4y_5y_6$.

6. Подстановки $\sigma, \tau \in S_9$ переставляют классы вычетов $1, \ldots, 9$ по правилам: $\sigma(k) = 4k-1$, $\tau(k) = 2k+3$ для всех $k \in \mathbb{Z}_9$. Задайте подстановку $\tau\sigma\tau^{-1}$ формулой того же вида.

I вариант

1. Сколькими способами можно раскрасить стороны правильного семиугольника в q цветов, если раскраски, получаемые друг из друга поворотом, считаются одинаковыми?

Ответ: $q + \dfrac{q^7 - q}{7}$.

2. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((123)(2345)(456)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)\big)^3$.

Ответ: нечётная, 10. $\sigma = (12)(34)(5)(67)(8\,9\,10\,11\,12)$, $\sigma^3 = (12)(34)(5)(67)(8\,11\,9\,12\,10)$.

3. Сколько существует таких подстановок $\sigma \in S_7$, что $O(\sigma^3) = O(\sigma^4)$?

Ответ: $1225 = 1 + C_7^5 \cdot 4! + 6!$. e – 1, циклы длины 5 – $C_7^5 \cdot 4!$, циклы длины 7 – $6!$.

4. Опишите все такие подстановки $X \in S_9$, что $X^2 = (123)(789)$, и укажите их количество.

Ответ: 16. $X|_{\{1,2,3,7,8,9\}} \in \{(132)(798), (172839), (182937), (192738)\}$ – 4 варианта и $X|_{\{4,5,6\}} \in \in \{e, (45), (46), (56)\}$ – 4 варианта.

5. Найдите все подстановки в S_5, переставляющие переменные $x_1, \ldots, x_5$ и сохраняющие многочлен $x_1x_2x_3 + x_3x_4x_5$.

Ответ: $(12)^i(45)^j$, $i, j \in \{0, 1\}$, $(14)(25)$, $(15)(24)$, (1425), (1524) (всего 8).

6. Подстановки $\sigma, \tau \in S_{10}$ переставляют классы вычетов $1, \ldots, 11$ по правилам: $\sigma(k) = 2k+1$, $\tau(k) = 3k - 2$ для всех $k \in \mathbb{Z}_{11}$. Задайте подстановку $\tau^{-1}\sigma\tau$ формулой того же вида.

Ответ: $k \mapsto 2k - 4 \pmod{11}$.

II вариант

1. Сколькими способами могут встать в круг n мальчиков и n девочек так, чтобы мальчики и девочки чередовались? (Расстановки одинаковы, если у каждого ребёнка одни и те же соседи.)

Ответ: $\dfrac{(n!)^2}{2n}$ при $n \geqslant 2$ (в частности, 1 при $n = 4$).

2. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((1234)(345)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)(11\,12\,13)\big)^3$.

Ответ: нечётная, 12. $\sigma = (123)(4567)(8\,9\,10\,11)(12\,13)$, $\sigma^3 = (7654)(11\,10\,9\,8)(12\,13)$.

3. Сколько существует таких подстановок $\tau \in S_6$, что $O(\tau^2) = O(\tau^5)$?

Ответ: $81 = 1 + C_6^3 \cdot 2 + \dfrac{6!}{3^2 \cdot 2}$. e – 1, (abc) – $C_6^3 \cdot 2 = 40$, $(abc)(def)$ – $\dfrac{6!}{3^2 \cdot 2} = 40$.

4. Опишите все такие подстановки $Y \in S_9$, что $Y^3 = (45)(67)(89)$, и укажите их количество.

Ответ: 27. $Y|_{\{4,5,6,7,8,9\}} \in \{(45)(67)(89), (468579), (478569), \ldots, (487596), (497586)\}$ – $1 + 8 = = 9$ вариантов, $Y|_{\{1,2,3\}} \in \{e, (123), (132)\}$ – 3 варианта.

5. Найдите все подстановки в S_6, переставляющие переменные $y_1, \ldots, y_6$ и сохраняющие многочлен $y_1y_2y_3y_4 + y_3y_4y_5y_6$.

Ответ: $(34)^i\sigma$, где $i = 0, 1$, $\sigma \in \{e, (12), (56), (12)(56), (15)(26), (16)(25), (1526), (1625)\}$.

6. Подстановки $\sigma, \tau \in S_9$ переставляют классы вычетов $1, \ldots, 9$ по правилам: $\sigma(k) = 4k - 1$, $\tau(k) = 2k + 3$ для всех $k \in \mathbb{Z}_9$. Задайте подстановку $\tau\sigma\tau^{-1}$ формулой того же вида.

Ответ: $k \mapsto 4k + 7 \pmod{9}$.

Комплексные числа, I вариант

1. Изобразите на комплексной плоскости все числа, кубы которых вещественны.

2. Вычислите $\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$.

3. Найдите все значения выражения $\quad \sqrt{3-4i}\sqrt{3i} - \sqrt{12+9i}$.

4. Найдите остаток от деления многочлена $x^{55} + 2x^4 + 3$ на многочлен $x^2 + x + 1$.

5. Вычислите $\quad C_n^1 + C_n^6 + C_n^{11} + \ldots \quad$ при каждом $n \in \mathbb{N}$.

6. Найдите многочлен Чебышёва II рода $U_4(x)$: $\quad \sin 5\varphi = \sin\varphi\, U_4(\cos\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

7. Найдите круговой многочлен $\Phi_{175}(x)$.

Комплексные числа, II вариант

1. Изобразите на комплексной плоскости все такие точки z, что $|z-1| = 2|z+i|$.

2. Вычислите $\quad \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg} 8$.

3. Решите уравнение $\quad z^2 + (i-4)z + 5(i+1) = 0$.

4. Найдите остаток от деления многочлена $2x^{100} - 3x^{12} + x^2$ на многочлен $x^2 - x + 1$.

5. Вычислите $\quad C_n^2 + C_n^7 + C_n^{12} + \ldots \quad$ при каждом $n \in \mathbb{N}$.

6. Найдите многочлен Чебышёва I рода $T_6(x)$: $\quad \cos 6\varphi = T_6(\cos\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

7. Найдите круговой многочлен $\Phi_{99}(x)$.

Комплексные числа, III вариант

1. Найдите образ верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

2. Вычислите $\quad \dfrac{(1+2i)(1+3i)\ldots(1+99i)(1+100i)}{(2-i)(3-i)\ldots(99-i)(100-i)}$.

3. Найдите все значения выражения $\quad \sqrt{9-12i} - \sqrt{4i-3}\sqrt{-3}$.

4. Найдите все такие $n \in \mathbb{N}$, что $x^2 + x + 1 \mid (x+1)^n + x^n + 1$.

5. Вычислите $\quad C_n^3 + C_n^8 + C_n^{13} + \ldots \quad$ при каждом $n \in \mathbb{N}$.

6. Найдите многочлен Чебышёва II рода $U_5(x)$: $\quad \sin 6\varphi = \sin\varphi\, U_5(\cos\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

7. Найдите круговой многочлен $\Phi_{147}(x)$.

Комплексные числа, IV вариант

1. Найдите прообраз единичного круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ при отображении $z \mapsto \frac{iz+1}{z+i}$.

2. Обозначим $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите все такие $z \in \mathbb{C}$, что $|z| = 1$ и $z + \varepsilon$ — корень некоторой степени из единицы.

3. Решите уравнение $\quad z^2 - 2(3+i)z + 11 + 2i = 0$.

4. Пусть $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $x^2 + x + 1 \mid f(x^3) + xg(x^3)$. Докажите, что $f(1) = 0 = g(1)$.

5. Вычислите $\quad C_n^4 + C_n^9 + C_n^{14} + \ldots \quad$ при каждом $n \in \mathbb{N}$.

6. Найдите многочлен Чебышёва I рода $T_6(x)$: $\quad \cos 6\varphi = T_6(\cos\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

7. Найдите круговой многочлен $\Phi_{63}(x)$.

Комплексные числа, ответы

I вариант

1. $\mathrm{Im} z = 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{Re}\, z$.

2. $\frac{\pi}{4}$.

3. $0, \pm\sqrt{6}(3+i)$.

4. $3x+3$.

5. $\dfrac{2^n + \omega^4(1+\omega)^n + \omega^3(1+\omega^2)^n + \omega^2(1+\omega^3)^n + \omega(1+\omega^4)^n}{5}$, где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

6. $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$.

7. $\Phi_{175}(x) = x^{120} - x^{115} + x^{95} - x^{90} + x^{85} - x^{80} + x^{70} - x^{65} + x^{60} - x^{55} + x^{50} - x^{40} + x^{35} - x^{30} + x^{25} - x^5 + 1$.

II вариант

1. Окружность с центром $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ и радиусом $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. $\frac{7\pi}{4}$.

3. $\dfrac{4 - i \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{809}-5}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{809}+5}{2}}\right)}{2}$.

4. $-x+2$.

5. $\dfrac{2^n + \omega^3(1+\omega)^n + \omega(1+\omega^2)^n + \omega^4(1+\omega^3)^n + \omega^2(1+\omega^4)^n}{5}$, где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

6. $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$.

7. $\Phi_{99}(x) = x^{60} - x^{57} + x^{51} - x^{48} + x^{42} - x^{39} + x^{33} - x^{30} + x^{27} - x^{21} + x^{18} - x^{12} + x^9 - x^3 + 1$.

III вариант

1. $|w| < 1$.

2. -1.

3. $0, \pm\sqrt{3}(-2+i)$.

4. $n \equiv 2, 4 \pmod 6$.

5. $\dfrac{2^n + \omega^2(1+\omega)^n + \omega^4(1+\omega^2)^n + \omega(1+\omega^3)^n + \omega^3(1+\omega^4)^n}{5}$, где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

6. $U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$.

7. $\Phi_{147}(x) = x^{84} - x^{77} + x^{63} - x^{56} + x^{42} - x^{28} + x^{21} - x^7 + 1$.

IV вариант

1. $\mathrm{Im} w > 0$.

2. $z = 1, \varepsilon^2$.

3. $2 - i, 4 + 3i$.

4. Подставим ε и ε^2.

5. $\dfrac{2^n + \omega(1+\omega)^n + \omega^2(1+\omega^2)^n + \omega^3(1+\omega^3)^n + \omega^4(1+\omega^4)^n}{5}$, где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.

6. $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$.

7. $\Phi_{63}(x) = x^{36} - x^{33} + x^{27} - x^{24} + x^{18} - x^{12} + x^9 - x^3 + 1$.

I вариант

1. Найдите все тройки $(a, b, k) \in \mathbb{R}^3$, при которых линейное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с матрицей $\begin{pmatrix} 3k & ak \\ 4k & bk \end{pmatrix}$ сохраняет длины отрезков.

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

3. Вычислите матрицу, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q}).$$

4. После семинара по алгебре на доске остались частично стёртые система линейных однородных уравнений и одна из её фундаментальных систем решений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 * * * * * * * * * * = 0 \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \begin{matrix} (1 & 1 & 1 & * & *) \\ (-1 & 1 & 1 & * & *) \\ (2 & * & * & * & *) \end{matrix}$$

а) Найдите какую-нибудь ФСР системы из первых двух уцелевших уравнений.

б) Заполните пропуски хотя бы одним правильным способом. Какие пропуски восстанавливаются однозначно?

5. Пусть A — квадратная матрица порядка n и ранга $n-1$ над полем K. Какие значения может принимать ранг присоединённой матрицы $\hat{A}$? ($\hat{A}_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы A.)

II вариант

1. Найдите все пары $(a, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, при которых $\begin{pmatrix} a & -a \\ a & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^n \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \dots & C_{n+1}^n \\ 1 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 & \dots & C_{n+2}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{2n}^1 & C_{2n}^2 & \dots & C_{2n}^n \end{vmatrix}$$

3. Вычислите матрицу, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q}).$$

4. Решив систему линейных однородных уравнений, студент получил фундаментальную систему решений и сверился с ответом в задачнике:

$$\text{Ответ студента: } \begin{matrix} (5 & 3 & -1 & 0 & 0) \\ (6 & 4 & 1 & 1 & 0) \\ (5 & 4 & 1 & 1 & 1) \end{matrix} \qquad \text{Ответ в задачнике: } \begin{matrix} (1 & 1 & 2 & 1 & 0) \\ (0 & 1 & 2 & 1 & 1) \\ (3 & 2 & -3 & -1 & 1) \end{matrix}$$

а) Составьте систему линейных уравнений с ответом как в задачнике.

б) Эквивалентен ли ответ в задачнике ответу, полученному студентом?

5. Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка n над полем K, причём $AB = 0$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$.

III вариант

1. Найдите все пары $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, при которых $\begin{pmatrix} x & -xy \\ xy & x \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^2 & \dots & C_{n+1}^n \\ 1 & C_3^1 & C_4^2 & \dots & C_{n+2}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+2}^2 & \dots & C_{2n}^n \end{vmatrix}$$

3. Вычислите матрицу, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q}).$$

4. После семинара по алгебре на доске остались частично стёртые система линейных однородных уравнений и одна из её фундаментальных систем решений:

$$\begin{cases} ******-x_3+x_4+2x_5=0 \\ *********-x_4+x_5=0 \\ ************+5x_5=0 \end{cases} \qquad \text{ФСР: } \begin{matrix} (0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ -1) \\ (-2\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 2) \\ (*\ \ *\ \ 1\ \ 0\ \ 0) \end{matrix}$$

а) Составьте какую-нибудь систему линейных однородных уравнений с ФСР из первых двух уцелевших строк на доске справа.

б) Заполните пропуски хотя бы одним правильным способом. Какие пропуски восстанавливаются однозначно?

5. Пусть A — квадратная матрица порядка n над полем K, причём $A^2 = A$. Найдите все значения, которые может принимать сумма $\operatorname{rk} A + \operatorname{rk}(E - A)$.

IV вариант

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Опишите геометрически линейное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с матрицей A. Найдите наименьшее $n \in \mathbb{N}$, при котором матрица A^n является скалярной.

2. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_2^1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & 1 \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

3. Вычислите матрицу, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q}).$$

4. В задачнике по алгебре друг под другом записаны две системы линейных однородных уравнений. Влад решил первую из них, Лена — вторую, а Владилен по невнимательности решил систему, объединённую из этих двух. Влад и Лена правильно нашли фундаментальные системы решений своих систем:

ФСР Влада: $(1, -1, 2, 3)$, $(0, 1, 2, -1)$. ФСР Лены: $(1, -2, 3, 4)$, $(-1, 3, 5, -5)$.

а) Составьте какую-нибудь систему с ФСР как у Лены.

б) Владилен правильно решил свою систему. Какой у него мог получиться ответ?

5. Пусть A — квадратная матрица порядка n и ранга r над полем K. Найдите все $k \in \mathbb{N}$, при которых существуют такие матрицы $B \in \mathrm{M}_{n\times k}(K)$ и $C \in \mathrm{M}_{k\times n}(K)$, что $A = BC$.

Ответы

1. I. $(a,b) = (\mp 4, \pm 3)$, $k = \pm\frac{1}{5}$. **II.** $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n \in 8\mathbb{Z}$. **III.** $(x,y) = (\pm 1, 0)$, $(x,y) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\sqrt{3}\right)$ (6 пар). **IV.** Гомотетия с $k = 2\sqrt{2}$ плюс поворот на $-\frac{\pi}{12}$. $n_{\min} = 12$.

3. I. $\begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$. **II.** $-\dfrac{1}{2(n+2)} \begin{pmatrix} -n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -n-1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -n-1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -n-1 \end{pmatrix}$.

III. $\dfrac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2-n \end{pmatrix}$. **IV.** $\dfrac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \dots & 2 \\ n-2 & 3(n-2) & 3(n-2) & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$.

4. I. а) $3x_1 = x_3 - 2x_4 - x_5, \ \ 3x_2 = x_3 - 5x_4 - 13x_5.$

б) $(3) = 2(1) - (2): \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 0.$

ФСР: $(1,1,1,0,-2), \ (-1,1,1,-2,8), \ (2,*,*,*,*)$. $x_4 = x_1 - x_2$, $x_5 = -5x_1 + 2x_2 + x_3$.

II. а) $\begin{cases} 7x_1 - 11x_2 + 2x_3 + 7x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

III. а) Условия на коэффициенты: $2p_1 = p_3 - p_4 + 2p_5, \ \ p_2 = -p_3 - p_4 + p_5$.

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ \mathbf{2}x_1 + \mathbf{1}x_2 + \mathbf{1}x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ \mathbf{4}x_1 + \mathbf{5}x_2 - \mathbf{1}x_3 + \mathbf{1}x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

Третье решение (неоднозначно, зависит от второго уравнения системы): $(-1,1,1,0,0)$.

IV. а) Условия на коэффициенты системы Лены: $p_1 = -19p_3 - 2p_4, \ p_2 = -8p_3 + p_4$.

Пример системы Лены: $\begin{cases} -19x_1 - 8x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

б) Условия на коэффициенты системы Влада: $p_1 = -4p_3 - 2p_4$, $p_2 = -2p_3 + p_4$.

Пример системы Влада: $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

Ответ Владилена: $(2, -5, -2, 9)$.

I вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{2x^4 - x^3 + 4x}{x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^2 - 8x + 4}$ на простейшие над полями:

а) $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_5$.

2. Найдите такой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, что для всех $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\cos^5\varphi + \sin^5\varphi = P(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

3. При всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ найдите все значения $\sqrt[n]{1 + \sin\varphi + i\cos\varphi}$.

4. Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и $f(t) > 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Докажите, что найдутся такие многочлены $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$, что $f = g^2 + h^2$.

5. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ определим целые числа a_n, b_n, c_n, d_n равенствами

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}.$$

Выразите a_n через n (количество операций не должно зависеть от n).

II вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{2x^4 - x}{x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$ на простейшие над полями:

а) $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_3$.

2. Найдите такой многочлен $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$, что для всех $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$t^7 + t^{-7} = Q(t + t^{-1}).$$

3. На комплексной плоскости без масштаба отмечены числа z и z^2. Покажите, как с помощью циркуля и линейки построить все значения $\sqrt[8]{i\overline{z}}$.

4. Найдите все $a \in \mathbb{C}$, при которых все корни многочлена $x^5 + (a^{80}+1)x + a^{48} - 1$ действительны.

5. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ определим целые числа a_n, b_n, c_n, d_n равенствами

$$\left(\sqrt{2} + i\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n i + d_n\sqrt{2}i.$$

Выразите d_n через n (количество операций не должно зависеть от n).

III вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{2x^4 + 2x^3 - x}{x^6 + 2x^5 - 2x^3 + 2x + 1}$ на простейшие над полями:

а) $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_3$.

2. При каждом $a \in \mathbb{C}$ решите систему уравнений $x^k + y^k + z^k = a^k$, $k = 1, 2, 3$.

3. Для каждой пары $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ найдите пересечение множеств $\sqrt[m]{-1}$ и $\sqrt[n]{-1}$.

4. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ найдите остаток от деления многочлена $(x+1)^n$ на многочлен $x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

5. Вычислите определитель матрицы $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, где $a_{ij} = i^{j-1}$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

IV вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{8x^4-4x^3+x}{4x^6-8x^5+4x^4+x^2-2x+1}$ на простейшие над полями:

а) $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_5$.

2. Пусть $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\in\mathbb{C}[x]$ — многочлен без кратных корней, $g(x)\in\mathbb{C}[x]$ — многочлен, корни которого — квадраты корней многочлена $f(x)$. Найдите отношение дискриминантов многочленов f и g.

3. Найдите все $n\in\mathbb{N}$, при которых

$$\sqrt[n]{-1}\cap\sqrt[1000]{-1}\neq\varnothing.$$

4. Докажите, что при всех $p,q\in\mathbb{C}$ и всех нечётных $n\in\mathbb{N}$ многочлен

$$(x+p+q)^n-x^n-p^n-q^n$$

делится в $\mathbb{C}[x]$ на многочлен

$$(x+p+q)^3-x^3-p^3-q^3.$$

5. При всех $a,b\in\mathbb{C}$ вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

порядка n.

IV вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{8x^4-4x^3+x}{4x^6-8x^5+4x^4+x^2-2x+1}$ на простейшие над полями:

а) $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_5$.

2. Пусть $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\in\mathbb{C}[x]$ — многочлен без кратных корней, $g(x)\in\mathbb{C}[x]$ — многочлен, корни которого — квадраты корней многочлена $f(x)$. Найдите отношение дискриминантов многочленов f и g.

3. Найдите все $n\in\mathbb{N}$, при которых

$$\sqrt[n]{-1}\cap\sqrt[1000]{-1}\neq\varnothing.$$

4. Докажите, что при всех $p,q\in\mathbb{C}$ и всех нечётных $n\in\mathbb{N}$ многочлен

$$(x+p+q)^n-x^n-p^n-q^n$$

делится в $\mathbb{C}[x]$ на многочлен

$$(x+p+q)^3-x^3-p^3-q^3.$$

5. При всех $a,b\in\mathbb{C}$ вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

порядка n.

III вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{2x^4+2x^3-x}{x^6+2x^5-2x^3+2x+1}$ на простейшие над полями:

а) $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_3$.

2. При каждом $a \in \mathbb{C}$ решите систему уравнений $x^k + y^k + z^k = a^k$, $k = 1, 2, 3$.

3. Для каждой пары $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ найдите пересечение множеств $\sqrt[m]{-1}$ и $\sqrt[n]{-1}$.

4. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ найдите остаток от деления многочлена $(x+1)^n$ на многочлен $x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

5. Вычислите определитель матрицы $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, где $a_{ij} = i^{j-1}$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

III вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{2x^4+2x^3-x}{x^6+2x^5-2x^3+2x+1}$ на простейшие над полями:

а) $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_3$.

2. При каждом $a \in \mathbb{C}$ решите систему уравнений $x^k + y^k + z^k = a^k$, $k = 1, 2, 3$.

3. Для каждой пары $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ найдите пересечение множеств $\sqrt[m]{-1}$ и $\sqrt[n]{-1}$.

4. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ найдите остаток от деления многочлена $(x+1)^n$ на многочлен $x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

5. Вычислите определитель матрицы $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, где $a_{ij} = i^{j-1}$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

III вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{2x^4+2x^3-x}{x^6+2x^5-2x^3+2x+1}$ на простейшие над полями:

а) $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_3$.

2. При каждом $a \in \mathbb{C}$ решите систему уравнений $x^k + y^k + z^k = a^k$, $k = 1, 2, 3$.

3. Для каждой пары $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ найдите пересечение множеств $\sqrt[m]{-1}$ и $\sqrt[n]{-1}$.

4. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ найдите остаток от деления многочлена $(x+1)^n$ на многочлен $x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

5. Вычислите определитель матрицы $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, где $a_{ij} = i^{j-1}$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

III вариант

1. Разложите дробь $\dfrac{2x^4+2x^3-x}{x^6+2x^5-2x^3+2x+1}$ на простейшие над полями:

а) $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Q}$; **г)** $\mathbb{Z}_3$.

2. При каждом $a \in \mathbb{C}$ решите систему уравнений $x^k + y^k + z^k = a^k$, $k = 1, 2, 3$.

3. Для каждой пары $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ найдите пересечение множеств $\sqrt[m]{-1}$ и $\sqrt[n]{-1}$.

4. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ найдите остаток от деления многочлена $(x+1)^n$ на многочлен $x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

5. Вычислите определитель матрицы $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, где $a_{ij} = i^{j-1}$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Комплексные числа и многочлены: ответы

1. I. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+1+i}+\dfrac{1}{x+1-i}+\dfrac{1}{x-1+i}+\dfrac{1}{x-1-i}\right)=$

$=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}\right).$

Над $\mathbb{Z}_5$: $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$.

II. $-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{3+i\sqrt{3}}{x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{3-i\sqrt{3}}{x-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{3-i\sqrt{3}}{x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{3+i\sqrt{3}}{x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}\right)=$

$=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{x^2-x+1}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\right).$

Над $\mathbb{Z}_3$: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

III. $-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{3-i\sqrt{3}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}+\dfrac{3+i\sqrt{3}}{x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}+\dfrac{3+i\sqrt{3}}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}+\dfrac{3-i\sqrt{3}}{x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}\right)=$

$=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1}+\dfrac{3x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}\right)=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{x^3}{x^4-x^2+1}.$

Над $\mathbb{Z}_3$: $-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

IV. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+\frac{1+i}{2}}+\dfrac{1}{x+\frac{1-i}{2}}+\dfrac{1}{x-\frac{1-i}{2}}+\dfrac{1}{x-\frac{1+i}{2}}\right)=$

$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2x+1}{2x^2+2x+1}-\dfrac{2x-1}{2x^2-2x+1}.$

Над $\mathbb{Z}_5$: $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$.

2. I. $-\frac{1}{4}x^5+\frac{5}{4}x$. **II.** $x^7-7x^5+14x^3-7x$. **IV.** $(ab-c)^2$.

3. I. $\sqrt[n]{|2\cos\frac{\psi}{2}|}e^{\frac{\psi}{2}+\frac{2\pi k}{n}}$, где $\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi$.

I вариант

1. Вычислите $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}^6$.

2. Найдите какой-нибудь базис системы строк и выразите через него остальные строки: $a_1 = (2, 3, -4, -1)$, $a_2 = (1, -2, 1, 3)$, $a_3 = (5, -3, -1, 8)$, $a_4 = (3, 8, -9, -5)$.

3. При каждом $a \in \mathbb{Q}$ найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

4. Вычислите определители: **а)** $\begin{vmatrix} a_1 + x & x & \dots & x \\ x & a_2 + x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n + x \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

5. Найдите все такие подстановки $\sigma \in S_9$, что $\sigma^2 = (12)(34)(56789)$.

6. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((123)(2345)(456)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)\big)^3$.

7. Пусть $\sigma = (123)(456)(10\,11) \in S_{11}$. Сколько подстановок в множестве $\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_{11}\}$?

8. Выпишите аргументы всех комплексных корней многочлена $x^9 + x^6 + x^3 + 1$.

9. Разложите дробь $\dfrac{6x(x-1)}{x^4 + 2x^3 + 8x + 16}$ на простейшие над полями **а)** $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Z}_7$.

10. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — четвёрка корней многочлена $x^4 + px^2 + qx + r$, а $x_1x_2 + x_3x_4$, $x_1x_3 + x_2x_4$, $x_1x_4 + x_2x_3$ — тройка корней многочлена $y^3 + ay^2 + by + c$. Выразите b через p, q, r.

II вариант

1. При всех $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ решите систему $\begin{cases} ax + by = c \\ -bx + ay = d. \end{cases}$

2. Выразите строку $x = (7, 14, -1, 2)$ через строки $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)$.

3. Найти все значения $b \in \mathbb{Q}$, при которых матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ b & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг.

4. Вычислите определители: **а)** $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$.

5. Найдите все такие подстановки $\sigma \in S_8$, что $\sigma^2 = (123)(678)$.

6. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((1234)(345)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)(11\,12\,13)\big)^3$.

7. Пусть $\sigma = (1234)(89)(10\,11) \in S_{11}$. Сколько подстановок в множестве $\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_{11}\}$?

8. Найдите все корни 10-й степени из 1, являющиеся корнями 25-й степени из -1.

9. Разложите дробь $\dfrac{3x(2x+1)}{x^4 - x^3 - x + 1}$ на простейшие над полями **а)** $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Z}_7$.

10. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — четвёрка корней многочлена $x^4 + ax^2 + bx + c$, а $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$, $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$ — тройка корней многочлена $z^3 + pz^2 + qz + r$. Выразите r через a, b, c.

III вариант

1. Вычислите $\begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^5$.

2. Найдите какой-нибудь базис системы строк и выразите через него остальные строки: $b_1 = (-2, 1, 1, 3)$, $b_2 = (3, 2, -4, -1)$, $b_3 = (-3, 5, -1, 8)$, $b_4 = (8, 3, -9, -5)$.

3. При каждом $c \in \mathbb{Q}$ найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & c & -1 & 2 \\ 2 & -1 & c & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Вычислите: **а)** $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n + b_n \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} + b_{n-1} & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. Найдите все такие подстановки $\sigma \in S_8$, что $\sigma^3 = (12)(34)(56)(78)$.

6. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((123)(2345)(456)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)\big)^3$.

7. Пусть $\sigma = (123)(456)(789) \in S_9$. Сколько подстановок в множестве $\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_9\}$?

8. Выпишите аргументы всех комплексных корней многочлена $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$.

9. Разложите дробь $\dfrac{2x^2 + 5x + 3}{x^4 + 2x^3 + 3x^2}$ на простейшие над полями **а)** $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{R}$; **в)** $\mathbb{Z}_{11}$.

10. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — четвёрка корней многочлена $x^4 + px^2 + qx + r$, а $x_1x_2 + x_3x_4$, $x_1x_3 + x_2x_4$, $x_1x_4 + x_2x_3$ — тройка корней многочлена $y^3 + ay^2 + by + c$. Выразите c через p, q, r.

IV вариант

1. Вычислите $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

2. Выразите строку $x = (-1, 7, 14, 2)$ через строки $e_1 = (-1, 1, 2, -2)$, $e_2 = (0, 2, 3, -1)$, $e_3 = (1, 1, 2, 4)$, $e_4 = (-1, 1, 3, 0)$.

3. При каждом $d \in \mathbb{Q}$ найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 7-d & -12 & 6 \\ 10 & -19-d & 10 \\ 12 & -24 & 13-d \end{pmatrix}$.

4. Вычислите: **а)** $\begin{vmatrix} b_1 + y & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & b_2 + y & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n + y \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

5. Найдите все такие подстановки $\sigma \in S_7$, что $\sigma^2 = (12)(67)$.

6. Найдите чётность и порядок подстановки $\big((1234)(345)(5678)(789)(9\,10\,11\,12)(11\,12\,13)\big)^3$.

7. Пусть $\sigma = (1234)(5678)(9\,10) \in S_{10}$. Сколько подстановок в множестве $\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in S_{10}\}$?

8. Разложите многочлен $x^8 + x^4 + 1$ на неприводимые над полем $\mathbb{R}$.

9. Разложите дробь $\dfrac{4x^2 - 3x}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}$ на простейшие над полями **а)** $\mathbb{C}$; **б)** $\mathbb{Q}$; **в)** $\mathbb{Z}_5$.

10. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — четвёрка корней многочлена $x^4 + ax^2 + bx + c$, а $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$, $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$ — тройка корней многочлена $z^3 + pz^2 + qz + r$. Выразите q через a, b, c.

1. I. $(a^2+b^2)^3E$. **III.** $\begin{pmatrix}32 & 80n\\ 0 & 32\end{pmatrix}$. **IV.** $\begin{pmatrix}\cos n\alpha & -\sin n\alpha\\ \sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix}$.

2. I. $x=2e_2+e_3+2e_4$. **II, IV.** a_1,a_2; $a_3=a_1+3a_2$, $a_4=2a_1-a_2$.
III. b_1,b_2; $b_3=3b_1+b_2$, $b_4=-b_1+2b_2$.

3. I. 3 при $a=0,2,4$, иначе 4. **II.** $\operatorname{rk}B=3$ при $b=3$ (иначе 2). **III.** 2 при $c=3$, иначе 3.
IV. 1 при $d=1$; 2 при $d=-1$; 3 иначе.

4. а) I. $a_1\dots a_n+\sigma_{n-1}(a_i)x$. **II.** $(-1)^{n(n+1)/2}b_1\dots b_n$. **III.** $(-1)^{n(n-1)/2}b_1\dots b_n$.
IV. $y^n+(b_1+\ldots+b_n)y^{n-1}$. **б) I, III.** $2^{n+1}-1$. **II.** $n+1$. **IV,** $3^{n+1}-2^{n+1}$.

5.

6. I, III. Нечётная, 10. $\sigma=(12)(34)(5)(67)(8\,9\,10\,11\,12)$, $\sigma^3=(12)(34)(5)(67)(8\,11\,9\,12\,10)$.
II, IV. Нечётная, 12. $\sigma=(123)(4567)(8\,9\,10\,11)(12\,13)$, $\sigma^3=(7654)(11\,10\,9\,8)(12\,13)$.

7. I. $\dfrac{11!}{3\cdot 3\cdot 2\cdot 3!}$. **II.** $\dfrac{11!}{4\cdot 3!\cdot 2^3}$. **III.** $\dfrac{9!}{3^3\cdot 3!}$. **IV.** $\dfrac{10!}{4^2\cdot 2^2}$.

8. I. $\pi n/6$, $4\nmid n$. **II.** $\sqrt[5]{-1}$. **III.** $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$, $k\not\equiv 2 \pmod 5$.
IV. $(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)$.

9. I. $\dfrac{2i\sqrt{3}}{x-1-i\sqrt{3}}-\dfrac{2i\sqrt{3}}{x-1+i\sqrt{3}}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{(x+2)^2}=\dfrac{x-1}{x^2-2x+4}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

Над $\mathbb{Z}_7$: $\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{(x+2)^2}$.

II. $\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}-\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{(x-1)^2}=-\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

Над $\mathbb{Z}_7$: $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

III. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$. Над $\mathbb{Z}_{11}$: $-\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}=\dfrac{5}{x+4}+\dfrac{5}{x-2}$.

IV. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}-\dfrac{x}{x^2+1}$. Над $\mathbb{Z}_5$: $\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}$.

10. I. $b=-4r$. **III.** $c=4pr-q^2$.

Корни многочленов

Всюду K — поле нулевой характеристики, т. е. $1 + \ldots + 1 \neq 0$ в K для любого числа единиц.

Элемент $a \in K$ называется корнем *кратности* $k \in \mathbb{N}$ многочлена $f(x) \in K[x]$, если $(x-a)^k \mid f(x)$ и $(x-a)^{k+1} \nmid f(x)$.

Корни кратности 1 называются *простыми*, корни кратности $\geqslant 2$ — *кратными*.

Производной многочлена $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ называется многочлен $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

В частности, $C' = 0$ для константы $C \in K \subset K[x]$ и $\deg f' = \deg f - 1$, если $\deg f \geqslant 1$.

По индукции определяются производные высших порядков: $f''(x) = (f'(x))'$, ..., $f^{(m)} = (f^{(m-1)})(x))'$ — производная порядка m. По определению полагают $f^{(0)} := f$.

1. Правила дифференцирования. Легко видеть, что $(f+g)' = f' + g'$ и $(cf)' = cf'$ для всех $f, g \in K[x]$ и $c \in K$, т. е. оператор дифференцирования $f \mapsto f'$ линеен. Используя это, докажите следующие равенства:

а) $(fg)' = f'g + fg'$, $(fg)'' = f'' + 2f'g' + g''$ и, вообще,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \textit{(правило Лейбница)};$$

б) $(f_1 \ldots f_k)' = ?$

в) $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ *(производная композиции).*

2. Формула Тейлора. Докажите, что для многочлена $f(x) \in K[x]$ степени n и элемента $a \in K$ верно равенство:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

3. Докажите, что корень многочлена кратности $k \geqslant 2$ является корнем его производной кратности $k-1$; простой корень многочлена не является корнем его производной.

4. Отделение кратных корней. Докажите, что многочлен $\dfrac{f}{(f, f')}$ имеет те же корни, что и f, но все — простые.

5*. Пусть $f(z) = (z-a)(z-b)(z-c) \in \mathbb{C}[z]$. Докажите, что оба корня многочлена $f'(z)$ лежат внутри треугольника abc (или на его сторонах — если он вырожден).

Теорема Гаусса—Люка. Корни производной $f'(z)$ лежат внутри выпуклой оболочки корней многочлена $f(z)$.

Геометрия в $\mathbb{R}^n$

Для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ через $|x|$ обозначим его длину: $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

Скалярное произведение.

Геометрический подход. Для двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ определяется их скалярное произведение:

$$(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0 \text{ или } y = 0, \\ |x||y| \cos \angle(x, y), \text{ иначе.} \end{cases}$$

1. Докажите, что скалярное произведение *билинейно*, то есть линейно по каждому из двух своих аргументов; линейность по первому аргументу означает, что $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ и $(kx, y) = k(x, y)$ для всех $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{R}$.

Важным следствием билинейности скалярного произведения является **полярное тождество:**

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

2. *Аксиоматический подход.* Докажите, что существует единственная функция $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а именно, скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, удовлетворяющая условиям:

(1) f билинейна;

(2) f симметрична, то есть $f(x, y) = f(y, x)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$;

(3) $f(x, x) = |x|^2$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$,

3. *Координатный подход.* а) Докажите, что для любых векторов $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ верно равенство

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

б) Докажите, что формула из п. а) верна в любом *ортонормированном базисе* (и ни в каком другом!).

4. Коэффициенты Эйлера—Фурье. Докажите, что коэффициенты разложения $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ по ортонормированному базису $e_1, \ldots, e_n$ равны

$$x_i = (x, e_i), \ i = 1, \ldots, n.$$

5. Неравенство Коши—Буняковского. Докажите, что для любых $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)$$

и найдите критерий его обращения в равенство.

Для линейного оператора $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с матрицей A (в стандартном базисе) обозначим через $\mathcal{A}^*$ оператор с матрицей $A^t (= A^*)$ (называемый *сопряжённым* к $\mathcal{A}$).

6. Докажите, что $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$ для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^n$ и любых $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Ортогональные преобразования (движения, изометрии). Так называются (биективные) преобразования, сохраняющие длины отрезков.

7. Докажите, что если $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\varphi(0) = 0$, то

$$\varphi \text{ — изометрия } \iff \forall x \in \mathbb{R}^n \ |\varphi(x)| = |x| \iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y).$$

8. а) Докажите, что линейный оператор $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является изометрией $\iff \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1} \iff A^t = A^{-1}$. Такие матрицы называются *ортогональными.*

б) Докажите, что множество всех ортогональных матриц образует группу. Она называется *ортогональной группой* пространства $\mathbb{R}^n$ и обозначается $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

в) Докажите, что $|A| = \pm 1$ для любой матрицы $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, при этом $|A| = 1 \iff A$ — матрица собственного (сохраняющего ориентацию) движения в $\mathbb{R}^n$. Такие матрицы образуют подгруппу в $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, называемую *специальной ортогональной группой* и обозначаемую $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

9. Докажите, что всякая изометрия, сохраняющая 0, является линейным оператором.

10. Теорема Эйлера. Докажите, что всякое движение в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет неподвижную ось.

Указание. Докажите, что всякое линейное отображение пространства $\mathbb{R}^3$ имеет *собственный вектор*, то есть такой ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^3$, что $\mathcal{A}x = \lambda x$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. (Число λ называется при этом *собственным числом*, отвечающем вектору x.)

По определению, векторы $u, v \in \mathbb{R}^n$ ортогональны (пишут $u \perp v$), если $(u, v) = 0$. Подпространства $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ортогональны ($U \perp V$), если $u \perp v$ для всех $u \in U$, $v \in V$.

11. Докажите, что для любого подпространства $U \subseteq \mathbb{R}^n$ существует и притом единственное *ортогональное дополнение*, то есть такое подпространство $U^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$, что $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$ и $U \perp U^\perp$. В частности, $\dim U^\perp = n - \dim U$.

Ортогональные отражения (симметрии). Так называются изометрии, являющиеся симметриями относительно некоторого подпространства:

$$\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ — симметрия } \iff \exists \text{ подпространство } U \subseteq \mathbb{R}^n \begin{cases} \mathcal{S}|_U = \mathrm{id}_U \\ \mathcal{S}|_{U^\perp} = -\,\mathrm{id}_{U^\perp}\,. \end{cases}$$

12. Опишите все типы симметрий в случаях $n = 2$ и $n = 3$ (в зависимости от $\dim U$).

13. Очевидно, всякая симметрия $\mathcal{S}$ является *инволюцией*, то есть $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$. Докажите обратное: всякая линейная инволюция является симметрией.

Проекторы. Так называются отображения, проектирующие всё пространство $\mathbb{R}^n$ на некоторое подпространство U вдоль какого-нибудь дополнительного подпространства V:

$$\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ — проектор } \iff \exists \text{ подпространства } U, V \subseteq \mathbb{R}^n : \begin{cases} U \oplus V = \mathbb{R}^n \\ \mathcal{P}|_U = \mathrm{id}_U \\ \mathcal{P}|_V = 0. \end{cases}$$

Если при этом $U \perp V$, то проектор называют ортогональным, или *ортопроектором*.

14. Очевидно, любой проектор $\mathcal{P}$ *идемпотентен*, то есть $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Докажите, что верно обратное: всякий линейный идемпотентный оператор является проектором.

15. Докажите, что проектор $\mathcal{P}$ является ортопроектором $\iff \mathcal{P} = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P}^*$.

Частичные изометрии — это линейные операторы, действующие изометрично на ортогональном дополнении к своему ядру:

$$\mathcal{A} \text{ — частичная изометрия } \iff \exists \text{ подпространства } U, V \subseteq \mathbb{R}^n \begin{cases} \mathcal{A}|_U^V : U \to V \text{ — изометрия} \\ \mathcal{A}|_{U^\perp} = 0. \end{cases}$$

16. Пусть $\mathcal{A}$ — частичная изометрия. Как действуют операторы $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$?

17. а) Докажите, что каждая частичная изометрия $\mathcal{A}$ удовлетворяет равенству $\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}$.
б) Докажите, что верно и обратное: линейный оператор $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}$, является частичной изометрией.

18. Докажите, что среди проекторов частичными изометриями являются ортопроекторы и только они.

Алгебро-геометрический словарик

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A}$ — изометрия (ортогональное преобразование)

$\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S} \iff \mathcal{S}$ — симметрия (ортогональное отражение)

$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — проектор

$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — ортопроектор

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A}$ — частичная изометрия

Алгебро-геометрический словарик

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A}$ — изометрия (ортогональное преобразование)

$\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S} \iff \mathcal{S}$ — симметрия (ортогональное отражение)

$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — проектор

$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — ортопроектор

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A}$ — частичная изометрия

Алгебро-геометрический словарик

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A}$ — изометрия (ортогональное преобразование)

$\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S} \iff \mathcal{S}$ — симметрия (ортогональное отражение)

$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — проектор

$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — ортопроектор

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A}$ — частичная изометрия

Алгебро-геометрический словарик

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A}$ — изометрия (ортогональное преобразование)

$\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S} \iff \mathcal{S}$ — симметрия (ортогональное отражение)

$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — проектор

$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — ортопроектор

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A}$ — частичная изометрия

Алгебро-геометрический словарик

$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A}$ — изометрия (ортогональное преобразование)

$\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S} \iff \mathcal{S}$ — симметрия (ортогональное отражение)

$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — проектор

$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \iff \mathcal{P}$ — ортопроектор

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A}$ — частичная изометрия

Поля

Множество K с двумя бинарными операциями $+$, $\cdot$ и двумя выделенными элементами 0, 1 называется *полем*, если выполнены следующие условия:

(1) $(K, +)$ — абелева группа с нейтральным элементом 0;

(2) $(K^*, \cdot)$ — абелева группа с нейтральным элементом 1;

(3) $a(b+c) = ab + ac$ для всех $a, b, c \in K$ (знак $\cdot$ опускается).

1. а) В любом поле справедливы стандартные формулы: полиномиальная (в частности, формула бинома Ньютона), разложение разности n-х степеней и её приложение — суммирование геометрической прогрессии. Почему?

б) В поле нет *делителей нуля*: если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$. Почему?

2. Какие из следующих множеств являются полями относительно обычных операций в $\mathbb{R}$: $\{0, 1\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Подмножество поля K, содержащее 0, 1 и замкнутое относительно обеих операций, называется *подполем* в K.

3. Докажите, что для любого поля K и любого подмножества $M \subseteq K$ существует наименьшее (в смысле $\subseteq$) подполе L в K, содержащее M.

4. Постройте подполе L из предыдущей задачи для $K = \mathbb{R}$ и

а) $M = \left\{\sqrt{2}\right\}$; $M = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$; в) $M = \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$; г) $M = \varnothing$.

Отображение $f\colon K \to L$ из поля K в поле L называется *гомоморфизмом* полей, если
$f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ для всех $a, b \in K$, $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$.

5. а) Какая неаккуратность допущена в данном выше определении гомоморфизма полей?

б) Покажите, что условие $f(0) = 0$ можно опустить, а условие $f(1) = 1$ нельзя опустить.

в) Покажите, что всякий гомоморфизм полей инъективен. (И потому часто называется *вложением*.)

6. Сколько существует вложений полей $\mathbb{Q} \to L$ для полей L из каждого пункта задачи 4?

7. Проверьте, что отображение $\mathbb{C} \ni a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ является изоморфизмом полей.

8. Можно ли на множестве $\{0, 1, \ldots\}$ из n элементов ввести структуру поля и сколькими способами, если а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 4$?

9. Найдите все такие $n \in \mathbb{N}$, что множество $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ с операциями сложения и умножения по модулю n является полем.

Рассмотрим в $(K, +)$ циклическую подгруппу $\langle 1 \rangle = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Возможны два случая: подгруппа $\langle 1 \rangle$ либо счётна, либо конечна. *Характеристикой* поля K называется число, равное 0 в первом случае и равное порядку указанной подгруппы во втором случае. Обозначение: $\mathrm{char}\, K$. Очевидно, что в первом случае существует и единственно вложение полей $\mathbb{Q} \to K$.

10. Докажите, что во втором случае:

а) порядок p группы $\langle 1 \rangle$ — простое число;

б) существует и единственно вложение полей $\mathbb{Z}_p \to K$.

11. б) Докажите, что порядок всякого конечного поля является степенью простого числа.

а) Докажите, что не существует поля из шести элементов.

в) Постройте поля из девяти и восьми элементов.

12. Постройте счётное поле, содержащее подполе $\mathbb{Z}_2$.

Кольца

Множество R с двумя бинарными операциями, сложением $+$ и умножением $\cdot$, называется *кольцом*, если выполнены следующие условия:

1) $(R, +)$ — абелева группа;

2) $\forall a, b, c \in R \begin{cases} a(b+c) = ab + ac & \text{(дистрибутивность слева)} \\ (b+c)a = ba + ca & \text{(дистрибутивность справа)} \end{cases}$ (знак $\cdot$ часто опускается).

Как и в любой аддитивной группе, нейтральный элемент по сложению обычно обозначают 0 (ноль), а обратный по сложению к элементу $a \in R$ — через $-a$ (противоположный элемент к a).

Если кольцо R содержит нейтральный элемент 1 по умножению и при этом $1 \neq 0$, то кольцо R называется *кольцом с единицей.*

Если умножение в кольце коммутативно (ассоциативно), то кольцо называется *коммутативным (ассоциативным).*

Примеры.

1. Приведите примеры: а) кольца без единицы; б) ассоциативного некоммутативного кольца.

2. Пусть $\times$ — векторное умножение в $\mathbb{R}^3$. Покажите, что $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ — некоммутативное неассоциативное кольцо без единицы.

3. *Кольцо многочленов.* Для кольца R определяется кольцо многочленов $R[x]$ (известно, как). Покажите, что если кольцо R обладает каким-либо из свойств: коммутативно, ассоциативно, содержит единицу, не содержит делителей нуля, то и кольцо $R[x]$ обладает тем же свойством.

4. *Кольцо матриц.* Для кольца R и числа $n \in \mathbb{N}$ определяется матричное кольцо R_n с покомпонентным сложением и обычным матричным умножением, индуцированными с кольца R. Покажите, что:

а) R_n содержит единицу $\iff R$ содержит единицу;

б) R_n ассоциативно $\iff R$ ассоциативно;

в) если $R \neq \{0\}$, то R_n коммутативно $\iff R$ коммутативно и $n = 1$;

г) если $R \neq \{0\}$ и $n > 1$, то R_n содержит нильпотентные элементы (и, в частности, делители нуля);

д) если R — поле, то делители нуля в R_n — это в точности ненулевые матрицы с нулевым определителем.

Ненулевой элемент a кольца R называется *левым (правым) делителем нуля*, если $ab = 0$ $(ba = 0)$ для некоторого $0 \neq b \in R$. В коммутивном кольце говорят просто о делителях нуля.

Элемент кольца, не являющийся ни левым, ни правым делителем нуля, называется *регулярным.*

Ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля называется *областью.*

5. Докажите, что для любого натурального n: $\mathbb{Z}_n$ — область $\iff \mathbb{Z}_n$ — поле $\iff n$ простое.

Частным случаем делителя нуля является *нильпотентный* элемент — такой ненулевой элемент, некоторая степень которого равна нулю.

Ассоциативное кольцо без нильпотентных элементов называется *редуцированным.*

6. Докажите, что для любого натурального n: $\mathbb{Z}_n$ — редуцированное кольцо $\iff n$ свободно от квадратов.

В кольце R с единицей вводятся понятия:

обратный (левый обратный, правый обратный) к элементу $a \in R$ — такой элемент $b \in R$, то $ab = 1 = ba$ $(ba = 1,\ ab = 1)$;

обратимый (обратимый слева, обратимый справа) элемент — элемент, имеющий обратный (левый обратный, правый обратный).

7. Покажите, что элемент кольца может иметь несколько левых обратных.

8. Докажите, что если элемент ассоциативного кольца обратим слева и справа, то всякий его левый обратный является правым обратным и наоборот.

Область, в которой каждый ненулевой элемент обратим, называется *телом.* Коммутативное тело (как мы знаем) называется полем.

9. Докажите, что всякая конечная область является телом.

Теорема Веддербарна. Всякое конечное тело коммутативно.