МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 512.54+512.55+512.54.03

БУНИНА ЕЛЕНА ИГОРЕВНА

Автоморфизмы и элементарная эквивалентность групп Шевалле и других производных структур

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор А. В. Михалев
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, член-корр. РАН Л. Д. Беклемишев
	доктор физико-математических наук, профессор В. М. Левчук
	доктор физико-математических наук, профессор А. А. Туганбаев
Ведущая организация:	Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Защита диссертации состоится “ ” 2010 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан “ ” 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена автоморфизмам и изоморфизмам групп Шевалле над кольцами, а также элементарной эквивалентности различных производных структур (в том числе групп Шевалле).

Автоморфизмы и изоморфизмы линейных и классических групп — задача, изучаемая математиками с начала прошлого века. Линейные группы являются традиционным объектом исследования математиков. Различные вопросы, связанные с их структурой, изучались К. Жорданом, Л. Диксоном, Б. ван дер Варденом, Г. Вейлем, Ж. Дьедонне, Ж. Титсом и их многочисленными последователями в огромном количестве работ. Ко второй половине XX века сложилось несколько крупных направлений исследования линейных групп, среди которых изучение нормальных подгрупп, описание линейных групп с помощью образующих и определяющих соотношений, описание подгрупп, порожденных некоторыми специальными элементами, а также описание автоморфизмов и изоморфизмов между линейными группами.

Изучение автоморфизмов классических групп началось работой Шрайера и Ван-дер-Вардена[1] 1928 г., в которой были описаны автоморфизмы группы PSL_n ($n \geqslant 3$) над произвольным полем. Затем Дьедонне[2] в 1951 г. и Рикарт[3] в 1950 г. ввели метод инволюций, с помощью которого были описаны автоморфизмы группы GL_n ($n \geqslant 3$) над телом.

Первый шаг в построении теории автоморфизмов над кольцами, а именно для группы GL_n ($n \geqslant 3$) над кольцом целых чисел, сделали Хуа Логен и Райнер[4] в 1951 г. В 1957 г. Лэндин и Райнер[5], а также Вань Чжесянь[6] обобщили результат Хуа Логена и Райнера на некоммутативные области главных идеалов.

Методы отмечавшихся выше работ основывались главным образом на изучении инволюций в рассматриваемых группах. В 1976 г. О'Мира[7] придумал совершенно новый так называемый метод вычетных пространств, не использующий инволюций, с помощью которого ему удалось описать автоморфиз-

[1]Schreier O., van der Varden B.L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1928, 6, 303–322.

[2]Dieudonne J. On the automorphisms of the classical groups. Mem. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 1–95.

[3]Rickart C.E. Isomorphic group of linear transformations. Amer. J. Math, 1950, 72, 451–464.

[4]Hua L.K., Reiner I., Automorphisms of unimodular groups, Trans. Amer. Math. Soc., 71, 1951, 331–348.

[5]Landein I., Reiner I. Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain. Ann. Math., 1957, 65(3), 519–526.

[6]Wan C.A. The automorphism of linear group over a noncommutative principal ideal domain of characteristic $\neq 2$. Acta Math. Sinica, 1957, 7, 533–573.

[7]O'Meara O.T., The automorphisms of linear groups over any integral domain, J. reine angew. Math., 223, 1966, 56–100.

мы группы GL_n $(n \geqslant 3)$ над областями целостности. Независимо от О'Миры, опираясь на изучение инволюций, автоморфизмы группы $E_n(R)$ $(n \geqslant 3)$ над областями целостности характеристики $\neq 2$ описал Янь Шицзянь[8] (1965 г.).

Помфрэ и Макдональд[9] в 1972 г. определили автоморфизмы группы GL_n $(n \geqslant 3)$ над коммутативным локальным кольцом, в котором двойка обратима. Обратимость в кольце двойки дает возможность привлекать к изучению автоморфизмов группы GL_n технику, опирающуюся на изучение инволюций. Г.А. Носков [10] и В.Я. Блошицын[11] в 1975 г. описали автоморфизмы группы $\mathrm{GL}_n(R)$ $(n \geqslant 3)$, если R — коммутативное кольцо, которое не порождается делителями нуля, с обратимой двойкой. В.С. Дроботенко и Э.Я. Погориляк[12] в 1977 г. сделали то же для конечных сумм локальных колец, Макдональд [13] в 1978 г. — если коммутативное кольцо R содержит только нулевой и единичный идемпотенты.

Уотерхауз[14] в 1980 г. доказал стандартность автоморфизмов групп GL_n $(n \geqslant 3)$ над произвольным коммутативным кольцом с обратимой двойкой. Если 2 — необратимый элемент коммутативного локального кольца R, то автоморфизмы групп $\mathrm{SL}_n(R)$, $\mathrm{GL}_n(R)$ были изучены В.М. Петечуком в 1980 г. при $n \geqslant 4$[15] и в 1982 г. при $n = 3$[16]. Основываясь на результатах над локальными кольцами в 1982 г. В.М. Петечук [17] описал автоморфизмы линейных групп GL_n, SL_n $(n \geqslant 4)$ над произвольными коммутативными кольцами.

В качестве результатов для некоммутативных колец в 1980-х годах в работе И.З. Голубчиком и А.В. Михалевым [18] было дано описание изоморфизмов групп $\mathrm{GL}_n(R)$ и $\mathrm{GL}_m(S)$ над ассоциативными кольцами R и S с $\frac{1}{2}$ при $n, m \geqslant 3$, и несколько иным способом в работе Е.И. Зельманова[19]. Затем, в

[8] Shi-jian Yan. Linear groups over a ring. Chinese Math., 1965, 7(2), 163–179.

[9] Pomfret I., McDonald B.R. Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$, R a local ring. Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 173, 379–388.

[10] Носков Г.А. Автоморфизмы группы $\mathrm{GL}_n(O)$ при $\dim Max(O) \leqslant n-2$. Мат. Заметки, 1975, 17(2), 285–291.

[11] Блошицын В.Я. Автоморфизмы общей линейной группы над коммутативным кольцом, не порождаемым делителями нуля. Алгебра и логика, 1978, 17(6), 639–642.

[12] Дроботенко В.С., Погориляк Е.Я. Автоморфизмы полной линейной группы над некоммутативным полулокальным кольцом. УМН, 1977, 32(2), 157–158.

[13] McDonald B.R., Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$., Trans. Amer. Math. Soc., 215, 1976, 145–159.

[14] Waterhouse W.C. Automorphisms of $GL_n(R)$. Proc. Amer. Math. Soc., 1980, 79, 347–351.

[15] Петечук В.М. Автоморфизмы групп SL_n, GL_n над некоторыми локальными кольцами. Математические заметки, 28(2), 1980, 187–206.

[16] Петечук В.М. Автоморфизмы групп $\mathrm{SL}_3(K)$, $\mathrm{GL}_3(K)$. Математические заметки, 31(5), 1982, 657–668.

[17] Петечук В.М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. Математический сборник, 1982, 117(4), 534–547.

[18] Голубчик И.З., Михалев А.В. Изоморфизмы общей линейной группы над ассоциативным кольцом. Вестник МГУ, серия математика, 1983, 3, 61–72.

[19] Зельманов Е.И. Изоморфизмы полных линейных групп над ассоциативными кольцами. Сибирский математический журнал, 1985, 26(4), 49–67.

1997 году И.З. Голубчиком[20] описание изоморфизмов между общими линейными группами было продолжено на случай произвольных ассоциативных колец и $n, m \geqslant 4$.

С другой стороны, теория алгебраических групп также является одной из важнейших областей современной алгебры. Она возникла в середине XX века, на стыке алгебраической геометрии, теории групп и теории Ли, и в настоящее время имеет приложения как в этих, так и в других областях математики: теории конечных групп, теории чисел, теории инвариантов, теории дифференциальных уравнений и т. д. Центральное место в теории алгебраических групп занимают полупростые алгебраические группы и их непосредственное обобщение — группы Шевалле.

Основы теории групп Шевалле были заложены в 1950-х, 1960-х годах в работах К. Шевалле, Ж. Титса, А. Бореля, А. Вейля, А. Гротендика, М. Демазюра, Р. Стейнберга и др. В частности, в 1956–1958 годах К. Шевалле получил классификацию полупростых алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем. Позднее Шевалле показал, что все полупростые группы над алгебраически замкнутым полем в действительности определены над $\mathbb{Z}$, или, иначе говоря, получаются в результате расширения базы из некоторых групповых схем над $\mathbb{Z}$, называемых схемами Шевалле–Демазюра. Группы точек схем Шевалле–Демазюра над коммутативными кольцами называются группами Шевалле. Частными случаями групп Шевалле являются расщепимые классические группы матриц $\mathrm{SL}_n(R)$, $\mathrm{SO}_n(R)$, $\mathrm{Sp}_n(R)$ (над коммутативным кольцом R с единицей); конечные простые группы типа Ли $A_n(q)$–$G_2(q)$ являются центральными факторами групп Шевалле.

Таким образом, группы Шевалле являются естественным продолжением как алгебраических групп, так и классических линейных групп над коммутативными кольцами.

Изучением групп Шевалле занимались такие известные математики, как К. Шевалле, Э. Абе, Р. Стейнберг, Дж. Хамфри, Н.А. Вавилов, Е.Б. Плоткин, В.М. Левчук, С.Г. Колесников и многие другие. В том числе, изучались автоморфизмы и изоморфизмы групп Шевалле над полями и различными классами колец. Например, Р. Стейнберг и Дж. Хамфри описали изоморфизмы групп Шевалле над полями. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих ав-

[20] И.З. Голубчик. Линейные группы над ассоциативными кольцами. Диссертация на соискание степени доктора физико-математических наук. Уфа, 1997.

торов, среди которых отметим работы Бореля–Титса[21], Картера–Ю Чена[22], Ю Чена[23], Э. Абе, А.А. Клячко.

Э. Абе[24] доказал стандартность автоморфизмов для нетеровых колец, что теоретически могло бы закрыть вопрос об автоморфизмах групп Шевалле над произвольными коммутативными кольцами (для случая системы корней ранга $\geqslant 2$ и колец с обратимой двойкой), однако в рассмотрении случая присоединенных элементарных групп в работе Э. Абе содержится ошибка, которую не удается устранить методами этой статьи. Именно, в доказательстве леммы 11 используется то, что $\mathrm{ad}\,(x_\alpha)^2 = 0$ для всех длинных корней, что неверно в присоединенном представлении. Главной проблемой здесь является случай групп типа E_8, так как во всех остальных случаях группы Шевалле допускают представление, обладающие свойством $\mathrm{ad}\,(x_\alpha)^2 = 0$ для всех длинных корней, а в случае E_8 таких представлений нет.

Случаи, когда кольцо содержит достаточно много обратимых целых чисел (например, все рациональные числа) полностью закрыт в работе А.А. Клячко[25]. Таким образом, наибольший интерес на данный момент представляют кольца, в которых мало обратимых целых элементов (например, обратимы только единица и двойка, либо только единица).

По этой причине особый интерес представляет рассмотрение групп Шевалле над локальными кольцами (с обратимой двойкой или без нее), так как появляется возможность перейти к описанию автоморфизмов (и изоморфизмов) групп Шевалле над всеми коммутативными кольцами с помощью метода локализации. В данной диссертационной работе описаны автоморфизмы групп Шевалле всех типов над локальными кольцами с обратимой двойкой, а также типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой.

Заметим, что случай A_l был полностью рассмотрен в работах В. Уотерхауза, В.М. Петечука, Ли Фу-аня и Ли-Дзун-сяна, причем даже без условия обратимости двойки в кольце. Работы И.З. Голубчика и А.В. Михалева охватывают случай системы корней C_l, который в данной диссертационной работе не рассматривается.

Если алгебра рассматривает различные модели (группы, кольца и т. п.) с

[21] Borel A., Tits J. Homomorphismes “abstraits” de groupes algébriques simples. Ann. Math., 1973, 73, 499–571.

[22] Carter R.W., Chen Yu. Automorphisms of affine Kac–Moody groups and related Chevalley groups over rings. J. Algebra, 1993, 155, 44–94.

[23] Chen Yu. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras. J. Algebra, 2000, 226, 719–741.

[24] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings. Algebra and Analysis, 5(2), 1993, 74–90.

[25] Klyachko Anton A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras. arXiv:math/0708.2256v3 (2007).

точностью до изоморфизма, то теорию моделей интересует классификация структур с точностью до элементарной эквивалентности.

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ (например, две группы или два кольца) называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}'$. Любые две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. Любые две изоморфные модели элементарно эквивалентны, однако для бесконечных моделей обратное неверно. Например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поле $\overline{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел элементарно эквивалентны, но не изоморфны, так как имеют различную мощность.

Ряд интересных задач в теории групп возник в связи с применением в ней теоретико-модельных методов. К их числу относится проблема классификации групп с точностью до элементарной эквивалентности, или в другой формулировке — проблема классификации *полных теорий* групп.

Анализ решений проблемы элементарной классификации групп определенного класса позволяет выделить три основных метода доказательств: модельной полноты, перехода к насыщенным моделям и прямой, когда доказывается формульность характеристик, определяющих групповую структуру исследуемой группы. Наиболее полные результаты по проблеме элементарной эквивалентности были получены для абелевых и линейных групп.

Весьма прозрачная и полезная в приложениях классификация абелевых групп по элементарным свойствам получена в 1954 г. польским математиком Шмелевой[26]. Одним из наиболее важных следствий теоремы Шмелевой является разрешимость элементарной теории класса абелевых групп.

Проблема классификации групп по элементарным свойствам, как правило, является трудной задачей. Удовлетворительные результаты по ее решению получены для свободных групп, для некоторых классов нильпотентных групп и для классических линейных групп.

Сформулируем результаты по элементарной эквивалентности для степенных нильпотентных групп:

Теорема. (А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников[27]). *Пусть G и H — нильпотентные $\mathbb{Q}$-группы конечного ранга. Тогда группа G элементарно экви-*

[26]Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups. — Fundamenta Mathematica, 1955, 41, 203–271.

[27]Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп. В кн. *Мат. логика и теория алгоритмов*, Новосибирск, Наука, 1982, 56–87. Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп. ДАН СССР, 1981, 258(5), 1056–1059. Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Формульность множества мальцевских баз и элементарные теории конечных алгебр. I., 1982, 23(5), 152–167.

валентна группе H тогда и только тогда, когда основы G и H изоморфны, причем G и H одновременно либо совпадают со своими основами, либо не равны им.

По определению, подгруппа $\overline{G} \leqslant G$ называется *основой* группы G, если $Z(\overline{G}) \leqslant G'$ и $G = \overline{G} \times C$, где $Z(G)$ — центр G, G' — коммутант G и $C \leqslant Z(G)$. Основа по группе определяется единственным образом с точностью до изоморфизма.

Эта теорема резко контрастирует с соответствующим результатом для абелевых групп и сводит проблему элементарной эквивалентности к проблеме изоморфизма для нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп конечного ранга. Последняя проблема алгоритмически разрешима[28].

Ситуация в случае нильпотентных групп, т. е. степенных групп над кольцом $\mathbb{Z}$, более сложная, чем в случае поля $\mathbb{Q}$. Б. И. Зильбер[29] построил пример двух неизоморфных элементарно эквивалентных конечно порожденных 2-нильпотентных групп.

В районе 1945 года Тарский сформулировал два предположения об элементарных теориях свободных групп. Первое из них состояло в том, что две свободные неабелевы группы различных рангов элементарно эквивалентны. Второе состояло в том, что элементарная теория свободной неабелевой группы разрешима. Обе гипотезы были доказаны в окрестности 1999 года А. Мясниковым и О. Харлампович[30].

Впервые вопросы связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были рассмотрены в 1961 г. А.И. Мальцевым[31]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ ($G = \mathrm{GL}$, SL, PGL, PSL, $n, m \geqslant 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Продолжение эта теория получила в 1992 году, когда с помощью кон-

[28] Саркисян Р. А. Об одной проблеме равенства для когомологий Галуа. Алгебра и логика, 1980, 19(6), 707–725.

[29] Зильбер Б. И. Пример двух элементарно эквивалентных, но не изоморфных конечно порожденных метабелевых групп. Алгебра и логика, 1971, 10(3), 309–315.

[30] Kharlampovich Olga, Myasnikov Alexei. Elementary theory of free non-abelian groups. Journal of Algebra, 2006, 302, 451–552. Kharlampovich O., Myasnikov A. TarskiЎs problem about the elementary theory of free groups has a positive solution, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 4 (December 1998) 101–108. Kharlampovich O., Myasnikov A., Irreducible affine varieties over a free group: I. Irreducibility of quadratic equations and nullstellensatz, J. Algebra 1998, 200, 472–516. Kharlampovich O., Myasnikov A., Irreducible affine varieties over a free group: II. Systems in triangular quasiquadratic form and description of residually free groups, J. Algebra, 1998, 200, 517–570

[31] Мальцев А.И. Об элементарных свойствах линейных групп. Проблемы математики и механики, Новосибирск, 1961, 110–132.

струкции ультрапроизведения и теоремы об изоморфизме[32] К.И. Бейдар и А.В. Михалев[33] нашли общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур и обобщили теорему Мальцева для случая, когда K и L являются телами и ассоциативными кольцами.

Продолжением исследований в этой области явились работы Е.И. Буниной 1998–2001 гг., в которых результаты А.И. Мальцева была распространены на унитарные линейные группы над телами и ассоциативными кольцами с инволюцией, а также на группы Шевалле над алгебраически замкнутыми полями.

Тематика исследований А.И. Мальцева активно продолжается в данной диссертации. Во второй главе изучается элементарная эквивалентность групп Шевалле над полями и локальными кольцами.

В третьей главе изучены элементарные свойства полугрупп неотрицательных матриц над линейно упорядоченными кольцами. Элементарные свойства полугрупп неотрицательных матриц над частично упорядоченными коммутативными кольцами были изучены Е.И. Буниной и П.П. Семеновым[34], они не вошли в данную диссертацию.

Элементарная эквивалентность колец инцидентности изучалась автором совместно с А.С. Доброхотовой–Майковой[35] и также не вошла в данную работу.

В конце прошлого века стало ясно, что элементарная эквивалентность производных структур не всегда связана именно с элементарной эквивалентностью структур, по которым они были построены, в некоторых случаях возникает эквивалентность в логиках более высоких порядков.

Фелгнер[36] предложил изучить проблему элементарной эквивалентности бесконечномерных общих линейных групп и других классических групп над полями. В. Толстых[37] решил эту проблему для бесконечномерных групп типов GL, PGL, ΓL, $P\Gamma L$ для достаточно широкого класса тел. Предмет изучения работы В. Толстых может быть описан как исследование *выразительности* языка логики первого порядка для бесконечномерных классических

[32] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. Москва, Мир, 1977.

[33] Beidar C.I., Michalev A.V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups. Contemporary mathematics, 1992, 131, 29–35.

[34] Е.И. Бунина, П.П. Семенов. Элементарная эквивалентность полугрупп обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными коммутативными кольцами. Фундаментальная и прикладная математика. 2008, 14(4), 3-17.

[35] Бунина Е.И., Доброхотова-Майкова А.С. Элементарная эквивалентность обобщенных колец инцидентности. Фундаментальная и прикладная математика, 2008, 14(7), 37-42.

[36] Felgner U. Problem Notebook Model Theory and groups. LMS Durham Symp., 16–28 July 1988.

[37] Tolstykh V. Elementary equivalence of infinite-dimensional classical groups. Annals of Pure and Applied Logic, 2000, 105, 103–156.

групп и близких структур. Похожие проблемы изучались во многих статьях, например, Шелахом для бесконечномерных симметрических групп, полугрупп эндоморфизмов свободных алгебр, автоморфизмов групп булевых алгебр и т. п.

Другая работа В. Толстых[38] посвящена исследованию теории группы автоморфизмов бесконечно порожденной свободной группы. Пусть F_k — свободная группа бесконечного ранга k. В ней доказано, что теория второго порядка множества k и элементарная теория группы $\mathrm{Aut}\, F_k$ интерпретируются друг в друге равномерно по F_k, а следовательно, группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, F_k$ и $\mathrm{Aut}\, F_\lambda$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда k и λ эквивалентны в логике второго порядка.

Связь между совпадением теорий первого порядка одних структур и совпадением теорий второго порядка некоторых других структур была установлена в ряде работ А. Г. Пинусом. Например, он доказал[39], что выразительные возможности решеток разбиений в логике первого порядка совпадают с выразительными возможностями логики второго порядка. Именно, пусть $L(A)$ — решетка разбиений на множестве A, $Th(L(A))$ — теория первого порядка решетки $L(A)$, $Th_2(A)$ — теория множества A (с пустой сигнатурой) в полной логике второго порядка. Доказано, что для любых множеств A, B теории $Th(L(A))$ и $Th(L(B))$ совпадают тогда и только тогда, когда $Th_2(A) = Th_2(B)$.

Результаты, полученные в 2000 г. А. Г. Пинусом и Г. Роузом[40], посвящены элементарной эквивалентности решеток подалгебр свободных алгебр.

В силу элементарной эквивалентности любых двух бесконечно порожденных V-свободных алгебр понятен интерес к вопросу об элементарной эквивалентности производных структур от свободных алгебр многообразий[41].

В четвертой главе данной диссертации рассмотрена связь свойств второго порядка ассоциативных колец и свойств первого порядка категорий модулей, колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов и проективных пространств модулей бесконечного ранга над этими кольцами.

Также в четвертой главе доказываются теоремы, аналогичные теореме Бэра–Капланского о кольцах эндоморфизмов абелевых p-групп (абелева p-

[38] Tolstyh V. Set theory is interpretable in the automorphism group of an infinitely generated free group. J. London Math. Soc., 2000, 62(1), 17–26.

[39] Пинус А. Г. Элементарная эквивалентность решеток разбиений. — Сибирский математический журнал. — 1988. — т. 29. — в. 3. — с. 211–212.

[40] Пинус А. Г., Роуз Г. Элементарная эквивалентность решеток подалгебр свободных алгебр. Алгебра и логика, 2000, 39(5), 595–601.

[41] Pinus A. G., Rose H. Second order equivalence of cardinals: an algebraic approach, Contributions to General algebra. 13, Verlag J. Heyn, Klagenfurt, 2001, 275–284.

группа определяется своим кольцом эндоморфизмов), но для элементарной эквивалентности. Показано, что элементарная теория кольца эндоморфизмов абелевой p-группы определяет полную теорию второго порядка (в некоторых случаях ее счетное ограничение) самой абелевой группы.

Е.И. Бунина и А.В. Михалев[42] рассматривали категории полигонов над моноидами, а также моноиды эндоморфизмов свободных полигонов над моноидами. Было показано, что при определенных условиях на исходные моноиды моноиды эндоморфизмов свободных полигонов над ними элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда сами моноиды эквивалентны в логике второго порядка (эти результаты не включены в диссертацию).

Различными математиками рассматривалась также элементарная эквивалентность других структур и производных конструкций.

Для модулей существует достаточно простой критерий элементарной эквивалентности. Именно: два модуля M и N над кольцом R элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда для любых двух 1-позитивно-примитивных формул (т. е. формул вида $\exists x\Theta$, где Θ — конъюнкция атомных формул) φ, ψ таких, что $\psi \to \varphi$, мощности абелевых групп $\varphi(M)/\psi(M)$ и $\varphi(N)/\psi(N)$ либо бесконечны, либо конечны и совпадают.

В ряде работ изучался вопрос о сохранении элементарной эквивалентности для различных теоретико-групповых конструкций. Например, для модулей над вполне приводимым кольцом тензорное произведение, рассматриваемое как абелева группа, сохраняет элементарную эквивалентность; для счетного свободного булевого кольца R существуют R-модули A, B, C, D такие, что $A \equiv B$, $C \equiv D$, $A \otimes_R C \cong \langle 0 \rangle$ и $B \otimes_R D \cong \mathbb{Z}(2)$.

Фильтрованные произведения, фильтрованные степени, прямые произведения сохраняют элементарную эквивалентность.

Не сохраняют элементарной эквивалентности: а) операция сплетения групп, б) нильпотентные произведения групп.

Большое число работ посвящено проблеме элементарной эквивалентности расширенных теорий абелевых групп[43].

Уилер[44] установил, что кольца верхних треугольных матриц порядка ≥ 3 над полями P и P^* элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда элементарно эквивалентны поля P и P^*.

[42] Бунина Е.И., Михалев А.В. Элементарные свойства категории полигонов над моноидом. Алгебра и логика, 2006, 45(6), 687-709.

[43] Кокорин А. И., Пинус А. Г. Вопросы разрешимости расширенных теорий. Успехи мат. наук, 1978, 33(2), 49–84.

[44] Weeler W. H. Model theory of strictly upper triangular matrix rings. J. Symb. Logic, 1980, 45(3), 455–463.

Цель работы и основные задачи. Цель работы состоит в создании новых универсальных методов исследования автоморфизмов, изоморфизмов и элементарной эквивалентности различных важнейших производных алгебраических структур таких, как кольца эндоморфизмов, группы автоморфизмов, проективные геометрии, категории модулей, матричные группы (в первую очередь, группы Шевалле), в установлении связи между изоморфизмами или элементарной эквивалентностью производных структур и условиями, которым должны отвечать базисные структуры, в точном описании автоморфизмов различных алгебраических структур, таких, как группы Шевалле над коммутативными кольцами, полугруппы неотрицательных обратимых матриц над упорядоченными кольцами. Основными задачами диссертации являются: описание (доказательство стандартности) автоморфизмов групп Шевалле над локальными кольцами; нахождение необходимых и достаточных условий того, что (элементарные) группы Шевалле над полями или локальными кольцами элементарно эквивалентны; описание автоморфизмов и элементарной эквивалентности полугрупп неотрицательных обратимых матриц над линейно упорядоченными кольцами; нахождение необходимых и достаточных условий того, чтобы две категории модулей над кольцами, два кольца эндоморфизмов, две группы автоморфизмов, две проективные геометрии модулей бесконечного ранга над кольцами были элементарно эквивалентны; продолжение теоремы Бэра–Капланского об изоморфизмах колец эндоморфизмов абелевых p-групп на случай элементарной эквивалентности.

Основные методы исследования. В работе используются классические методы структурной теории колец, линейной алгебры, теории линейных групп, теории моделей и математической логики, в том числе методы А.И. Мальцева, К.И. Бейдара, А.В. Михалева, И.З. Голубчика, В.М. Петечука, метод инволюций, переработанный автором в кандидатской диссертации, а также новые методы,введенные автором, в том числе метод перевода задач об автоморфизмах матричных групп над локальными кольцами к системам целочисленных линейных уравнений, метод интерпретации теорий второго порядка алгебраических систем в их производных структурах.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. Они заключаются в следующем.

- Разработаны новые методы описания автоморфизмов и изоморфизмов групп Шевалле с помощью линейных уравнений над локальными кольцами. Получено полное описание (доказательство стандартности) автоморфизмов групп Шевалле следующих типов:

— типов A_l, D_l, E_l, B_l, C_l, F_4, $l > 1$, над локальными кольцами с обратимой двойкой;

— типа G_2 над локальными кольцами с обратимыми двойкой и тройкой;

— типов A_l, D_l, E_l, $l > 2$, над локальными кольцами с необратимой двойкой (теорема 1.1).

- Описаны элементарные свойства и элементарная эквивалентность групп Шевалле над полями и локальными кольцами с обратимой двойкой с использованием метода инволюций (доработанного автором для случая групп Шевалле), методов А.И. Мальцева и метода ультрастепеней К.И. Бейдара и А.В. Михалева. Элементарная эквивалентность групп Шевалле описанных типов сведена к элементарной эквивалентности базисных полей или колец (теоремы 2.1 и 2.2).

- Описаны автоморфизмы и элементарная эквивалентность полугруппы неотрицательных обратимых матриц над линейно упорядоченными кольцами с обратимой двойкой, что является продолжением описания аналогичных полугрупп над линейно упорядоченными телами, полученного А.В. Михалевым и А.М. Шаталовой (теоремы 3.1 и 3.2).

- Получена связь между элементарной эквивалентностью

  — категорий модулей над кольцами,

  — колец эндоморфизмов свободных модулей над кольцами бесконечных рангов,

  — групп автоморфизмов свободных модулей над кольцами бесконечных рангов,

  — проективных геометрий свободных модулей над кольцами
  и эквивалентности в логике второго порядка структур, связанных с кольцами (теоремы 4.7, 4.13, 4.15 и 4.19).

  Автором разработаны методы работы с логикой второго порядка, построена интерпретация теории второго порядка кольца в теории первого порядка его производной структуры (категории модулей над ним, кольца эндоморфизмов, группы автоморфизмов, проективной геометрии модулей над ним).

  Получено в качестве следствий полное описание элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей бесконечного ранга над

— телами;

— областями главным идеалов;

— коммутативными кольцами;

— локальными кольцами;

— артиновыми кольцами;

— полупростыми кольцами (следствия из теорем 4.13 и 4.19).

- Получен аналог теорема Бэра–Капланского об изоморфизме колец эндоморфизмов абелевых p-групп для элементарной эквивалентности. Логика второго порядка абелевой p-группы проинтерпретирована в кольце ее эндоморфизмов, разработаны методы кодирования элементов абелевой группы в кольце ее эндоморфизмов (теоремы 4.33, 4.34, 4.35).

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных задачах теории групп, теории колец, линейной алгебры, математической логики, теории моделей.

Апробация результатов. Результаты диссертации неоднократно (с 1998 по 2010 гг.) докладывались на научно-исследовательских семинарах: кафедральный семинар по алгебре кафедры Высшей алгебры МГУ; семинар "Кольца и модули" в МГУ; семинар "Алгебра и теория моделей" в МГУ; на различных алгебраических семинарах кафедры высшей алгебры МГУ; были сделаны доклады по результатам диссертации на Международной алгебраической конференции, Москва, 2004; на Логическом коллоквиуме-2005, Афины, Греция; на конференции по теории моделей и ее приложениям, 2005, Кембридж, Англия; на конференции по частично упорядоченным множествам, 2005, Сан-Франциско, США; на Международной конференции “Мальцевские чтения-2005”, Новосибирск, Россия (пленарный доклад); на международной конференции “Геометрическая теория групп и ее приложения”, 2006, Барселона, Испания; на Международной конференции “Мальцевские чтения-2006”, Новосибирск, Россия; на Второй международной конференции “Матричные методы и операторные уравнения”, 2007, Москва, Россия; на Международной алгебраической конференции, посвященной 75-летию профессора Шункова, 2007, Красноярск, Россия; на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, 2008, Москва, Россия (пленарный доклад); на Школе-семинаре “Семантика и логические системы”, 2008, Владивосток, Россия (пленарный доклад); на Международной алгебраической конференции на Украине, 2009, Харьков, Украина (пленарный доклад); на Международной конференции "Мальцевские чтения-2009", посвященной 100-летию А.И. Мальцева, 2009, Новосибирск, Россия (пленарный доклад). Большинство результатов диссертации вошло в тезисы этих конференций.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 26 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Тезисы докладов не включены в этот список.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, разбитых на параграфы (нумерация параграфов подчинена нумерации глав, нумерация теорем подчинена нумерации глав) и списка литературы. Полный объем диссертации — 313 страниц, библиография включает 206 наименований, из которых 26 — публикации автора по теме диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 посвящена изучению автоморфизмов групп Шевалле над локальными кольцами. Автоморфизмы групп Шевалле над полями были полностью описаны в 1970-е годы Стейнбергом и Хамфри, в 1993 году появилась работа Э. Абе, описывающая автоморфизмы групп Шевалле над нетеровыми кольцами с обратимой двойкой. В этой работе для случая системы корней E_8 имела место ошибка, не устранимая методами самой работы. В главе 1 данной диссертации проблема автоморфизмов групп Шевалле решена для групп Шевалле различных типов над локальными кольцами с обратимой двойкой, а также для групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l, $l \geqslant 3$, над локальными кольцами с необратимой двойкой. Для доказательства объединены различные методы, использованные ранее для описания автоморфизмов групп GL и SL над локальными кольцами, методы линейной алгебры, а также их специфическое объединение, придуманное автором диссертации. Для доказательства приходилось проводить очень много различных матричных расчетов, они выполнялись как вручную, так и на компьютере, не все из них приведены в тексте диссертации. Особенно сложными подсчетами отличается случай необратимой двойки, в процессе вычислений неоднократно возникали матрицы размера, большего чем 20×20.

Основными объектами, рассматриваемыми в первой главе, являются группа Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$ с системой корней Φ ранга, большего единицы, над локальным кольцом R (с обратимой или необратимой двойкой) и ее элементарная подгруппа $E_\pi(\Phi, R)$, порожденная элементарными корневыми унипотентами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$.

В первом параграфе приводятся основные определения групп Шевалле, их свойства, определяются четыре типа автоморфизмов группы Шевалле $G_\pi(\Phi, R)$, называемые *стандартными*:

Центральные автоморфизмы. Пусть $C_G(R)$ — центр группы $G_\pi(\Phi, R)$, $\tau : G_\pi(\Phi, R) \to C_G(R)$ — гомоморфизм групп. Тогда отображение $x \mapsto \tau(x)x$ из $G_\pi(\Phi, R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$, который обозначается буквой τ и называется *центральным автоморфизмом* группы $G_\pi(\Phi, R)$.

Кольцевые автоморфизмы. Пусть $\rho : R \to R$ — автоморфизм кольца R. Отображение $(x_{i,j}) \mapsto (\rho(x_{i,j}))$ из $G_\pi(\Phi, R)$ на себя является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$, который обозначается той же буквой ρ и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G_\pi(\Phi, R)$. Заметим, что для всех $\alpha \in \Phi$ и $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha(\rho(t))$.

Внутренние автоморфизмы. Пусть S — некоторое кольцо, содержащее R, g — элемент группы $G_\pi(\Phi, S)$, нормализующий подгруппу $G_\pi(\Phi, R)$. Тогда отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ является автоморфизмом группы $G_\pi(\Phi, R)$, который обозначается i_g и называется *внутренним автоморфизмом, индуцированным элементом* $g \in G_\pi(\Phi, S)$. Если $g \in G_\pi(\Phi, R)$, то назовем i_g *строго внутренним* автоморфизмом.

Диаграммные (графовые) автоморфизмы. Пусть δ — автоморфизм системы корней Φ такой, что $\delta\Delta = \Delta$. Тогда существует единственный автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, R)$ (будем обозначать его той же буквой δ) такой, что для любого $\alpha \in \Phi$ и $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ переходит в $x_{\delta(\alpha)}(\varepsilon(\alpha)t)$, где $\varepsilon(\alpha) = \pm 1$ для всех $\alpha \in \Phi$ и $\varepsilon(\alpha) = 1$ для всех $\alpha \in \Delta$.

Автоморфизм σ группы $G_\pi(\Phi, R)$ (или $E_\pi(\Phi, R)$) называется *стандартным*, если он является композицией автоморфизмов введенных четырех типов.

Наряду со стандартными автоморфизмами автором вводится следующий "временный" тип автоморфизмов элементарной присоединенной группы Шевалле:

Автоморфизмы-сопряжения. Пусть V — пространство представления группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $C \in \mathrm{GL}(V)$ — матрица, оставляющая группу Шевалле на месте:

$$CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R).$$

Тогда отображение $x \mapsto CxC^{-1}$ из $E_\pi(\Phi, R)$ на себя является автоморфизмом группы Шевалле, который обозначается i и называется *автоморфизмом-*

сопряжением группы $E(R)$, *индуцированным элементом* C группы $\mathrm{GL}\,(V)$.

Далее в первом параграфе формулируется следующая основная теорема:

Теорема 1.1. *Пусть* $G = G_\pi(\Phi, R)$ $(E_\pi(\Phi, R))$ — *(элементарная) группа Шевалле со следующими условиями*:

1) *если рассматривается система корней* A_l, D_l *или* E_l, $l \geqslant 3$, *то* R — *произвольное локальное коммутативное кольцо*;

2) *если рассматривается система корней* A_2, F_4, B_l, C_l, $l \geqslant 2$, *то* R — *произвольное локальное коммутативное кольцо с* $1/2$;

3) *если рассматривается система корней* G_2, *то* R — *произвольное локальное коммутативное кольцо с* $1/2$ *и* $1/3$.

Тогда любой автоморфизм группы G *стандартен. Если группа Шевалле при этом присоединенная, то внутренний автоморфизм в композиции является строго внутренним.*

Этот основной результат получается с помощью применения двух следующих теорем:

Теорема 1.2. *Каждый автоморфизм элементарной присоединенной группы Шевалле рассматриваемого выше типа является композицией кольцевого, диаграммного автоморфизмов и автоморфизма–сопряжения.*

Теорема 1.3. *Каждый автоморфизм–сопряжение элементарной присоединенной группы Шевалле рассматриваемого типа является композицией строго внутреннего (сопряжения с помощью элемента соответствующей группы Шевалле) и диаграммного автоморфизмов.*

Во втором, третьем, четвертом и пятом параграфах доказывается теорема 1.2 для колец с обратимой двойкой: во втором параграфе по произвольному автоморфизму элементарной присоединенной групп Шевалле G строится (с помощью замены базиса в пространстве представления группы G) изоморфизм группы G на некоторую подгруппу $\mathrm{GL}_n(R)$, с тем свойством, что ее образ при факторизации R по радикалу совпадает с кольцевым автоморфизмом. В третьем параграфе с помощью еще одной замены базиса мы приходим к изоморфизму G на подгруппу в $\mathrm{GL}_n(R)$ со всеми свойствами предыдущего и такому, что все элементы $w_\alpha(1)$ переходят сами в себя. В четвертом параграфе проводится еще одна дополнительная замена базиса такая, что рассматриваемый изоморфизм начинает обладать дополнительным свойством: все элементы $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$, также переходят в себя. Доказано, что при этом элементы $h_\alpha(t)$ переходят в элементы $h_\alpha(s)$. В пятом параграфе показано, что соответствие $t \mapsto s$ продолжается до автоморфизма кольца R, после чего получается, что композиция изначального автоморфизма и некоторой замены базиса (т. е. внутреннего автоморфизма) является кольцевым автоморфизмом группы Шевалле G. Таким образом, в параграфе 5 теорема 1.2 доказана для локальных колец с обратимой двойкой.

В шестом и седьмом параграфах доказывается теорема 1.3. В шестом параграфе первой главы показано, как свести доказательство к линейным уравнениям над локальными кольцами, а в седьмом параграфе показано, как найти нужное решение этих уравнений для различных систем корней. В конце седьмого параграфа полностью доказывается теорема 3. Наконец, восьмой параграф первой главы посвящен доказательству теоремы 1.1. Для присоединенных элементарных групп Шевалле эта теорема является прямым следствием теорем 1.2 и 1.3, теорему 1.1 остается доказать для всех других элементарных групп Шевалле, а далее для самих групп Шевалле.

Девятый параграф посвящен рассмотрению групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой. Требуется только доказать теорему 1.2, так как теорема 1.3 доказывается сразу и для колец с обратимой двойкой, и для колец с необратимой двойкой. Для этого случая все основные идеи и методы остаются теми же, но приходится рассматривать более сложные матрицы (матрицы порядка три вида $w_\alpha(1)\cdot x_\alpha(1)$), которые требуется на первом этапе переводить в себя заменой базиса. Все вычисления усложняются из-за того, что нет возможности делить на два.

Глава 2 посвящена элементарной эквивалентности групп Шевалле над полями и локальными кольцами. Теоремы об элементарной эквивалентности линейных групп восходят к А.И. Мальцеву, доказавшему в 1961 году, что линейные (GL , SL) и проективные линейные (PGL , PSL) группы над полями элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их размеры совпадают, а поля элементарно эквивалентны. Подобные теоремы получены и для групп Шевалле:

Теорема 2.1. *Пусть $G = G_\pi(\Phi, K)$ и $G' = G_{\pi'}(\Phi', K')$ (или $E_\pi(\Phi, K)$ и $E_{\pi'}(\Phi', K')$) — две (элементарные) группы Шевалле над бесконечными полями K и K' характеристики, отличной от двух, с решетками весов Λ и Λ' соответственно. Тогда группы G и G' элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда системы корней Φ и Φ' изоморфны, поля K и K' элементарно эквивалентны, решетки Λ и Λ' совпадают.*

Теорема 2.2. *Пусть $G = G_\pi(\Phi, R)$ и $G' = G_{\pi'}(\Phi', R')$ (или $E_\pi(\Phi, R)$ и $E_{\pi'}(\Phi', R')$) — две (элементарные) группы Шевалле над локальными кольцами R и R' с обратимой двойкой (в случае системы корней G_2 еще и с обратимой тройкой), в одной из систем корней Φ, Φ' присутствует про-*

стая подсистема корней, отличная от A_1. Пусть решетки весов групп G и G' обозначены через Λ и Λ' соответственно. Тогда группы G и G' элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда системы корней Φ и Φ' изоморфны, кольца R и R' элементарно эквивалентны, решетки Λ и Λ' совпадают.

В первом параграфе доказываются более простые импликации, а именно, следующие две теоремы:

Теорема 2.3. *Если две группы Шевалле $G = G_\pi(\Phi, R)$ и $G' = G_\pi(\Phi, R')$ построены с помощью одной и той же комплексной алгебры Ли типа Φ и одного и того же ее представления π, а также с помощью элементарно эквивалентных колец R и R', то $G \equiv G'$.*

Теорема 2.4. *Если две элементарные группы Шевалле $E = E_\pi(R, \Phi)$ и $E' = E_\pi(R', \Phi)$ построены с помощью одной и той же комплексной алгебры Ли типа Φ и одного и того же ее представления π, а также с помощью элементарно эквивалентных полулокальных колец R и R' с $1/2$, то $E \equiv E'$.*

Во втором параграфе доказано, что если две (элементарные) группы Шевалле элементарно эквивалентны, то их системы корней совпадают, а исходные кольца элементарно эквивалентны, решетки весов изоморфны. Далее, имея две элементарно эквивалентные элементарные группы Шевалле E и E', мы также имеем две элементарно эквивалентные элементарные присоединенные группы Шевалле E_{ad} и E'_{ad}, являющиеся факторами по центру исходных групп.

В параграфах 3–12 рассматриваются группы Шевалле над полями, доказывается теорема 2.1. Можно считать, что поле имеет характеристику, отличную от двух, и бесконечно (для конечных полей элементарная эквивалентность совпадает с изоморфизмом, поэтому результат будет следовать из теорем Стейнберга и Хамфриса).

В § 3 классические элементарные присоединенные группы Шевалле над полями отождествляются с некоторыми подгруппами группы $\mathrm{GL}_n(K)$.

В § 4 описывается, как устроены инволюции (элемента порядка два) в классических группах Шевалле над полями.

В пятом параграфе второй главы доказано, что для любых двух классических групп Шевалле с неизоморфными системами корней существует предложение первого порядка, истинное в одной группе и ложное во второй. Делается это с помощью рассмотрения инволюций, максимальных множеств коммутирующих инволюций, коммутантов централизаторов инволюций.

В параграфах 6–10 рассматриваются по отдельности исключительные системы корней. Например, в § 6 рассматриваются группы Шевалле типа G_2 и доказывается следующая лемма:

Лемма 2.10. *Существует предложение φ_{G_2} первого порядка, истинное в любой присоединенной группе типа G_2 и ложное во всех классических присоединенных группах Шевалле.*

В § 7 рассматриваются группы Шевалле типа F_4, а в § 8,9,10 соответственно группы типа E_6, E_7, E_8. Наконец, в конце десятого параграфа доказано следующее

Предложение 2.3. *Если две (элементарные) группы Шевалле над бесконечными полями характеристики, не равной 2, элементарно эквивалентны, то соответствующие системы корней совпадают.*

Параграф 11 посвящен доказательству того, что если две группы Шевалле одинакового типа элементарно эквивалентны, то поля, по которым они построены, элементарно эквивалентны. Для этого сначала данный результат доказывается для самой "маленькой" системы корней — A_1:

Лемма 2.15. *Если группы $\mathrm{PSL}_2(K)$ и $\mathrm{PSL}_2(K')$ (K, K' — бесконечные поля характеристики $\neq 2$) элементарно эквивалентны, то поля K, K' элементарно эквивалентны.*

Этот результат, в том числе, является дополнением к теореме А.И. Мальцева об элементарной эквивалентности линейных групп над полями, так как в работе Мальцева для групп SL и PSL рассматривался размер, больший двух.

Далее в § 11 для произвольной системы корней Φ берется фактор по центру коммутанта централизатора подходящей инволюции, который является прямым произведением двух групп Шевалле, одна из них есть $\mathrm{PSL}_2(K)$ (в предыдущих параграфах показано, что такая инволюция всегда найдется). После этого достаточно воспользоваться леммой 2.15. В результате получается

Предложение 2.4. *Если две присоединенные элементарные группы Шевалле $G(\Phi, K)$ и $G(\Phi, K')$ (K, K' — бесконечные поля характеристики, отличной от двух) элементарно эквивалентны, то поля K, K' элементарно эквивалентны.*

В § 12 остается рассмотреть решетки весов групп Шевалле. Доказывается

Предложение 2.5. *Если две (элементарные) группы Шевалле элементарно эквивалентны, то их решетки весов совпадают.*

Таким образом, к концу § 12 полностью доказывается теорема 4. Остальные параграфы второй главы посвящены доказательству теоремы 5.

В § 13 сначала доказывается, что подгруппа $E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ определима в группе $E = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, т. е. если две элементарные присоединенные группы Шевалле над локальными кольцами элементарно эквивалентны, то и соответствующие элементарные присоединенные группы Шевалле над вычетными полями элементарно эквивалентны. Таким образом, в § 12 доказано, что если две группы Шевалле над локальными кольцами элементарно эквивалентны, то их системы корней совпадают.

В § 14 второй главы доказывается, что известное разложение Гаусса для элементов групп Шевалле над локальными кольцами можно задавать в виде формул:

Предложение 2.7. (1) *Любой элемент x группы Шевалле $G\ (E)$ над локальным кольцом R представляется в виде*

$$x = utvu' \quad (x = uhvu'),$$

где $u, u' \in U(R)$, $v \in V(R)$, $t \in T(R)$, $h \in H(R)$;

(2) *Для разложений $x_1 = u_1 t_1 v_1 u_1'$ и $x_2 = u_2 t_2 v_2 u_2'$, где*

$$\begin{aligned} u_i &= x_{\alpha_1}(t_1^{(i)}) \dots x_{\alpha_n}(t_n^{(i)}),\\ u_i' &= x_{\alpha_1}(s_1^{(i)}) \dots x_{\alpha_n}(s_n^{(i)}),\\ v_i &= x_{-\alpha_1}(r_1^{(i)}) \dots x_{-\alpha_n}(r_n^{(i)}),\\ t_i &= h_{\alpha_1}(\xi_1^{(i)}) \dots h_{\alpha_l}(\xi_l^{(i)}), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

существует формула первого порядка кольцевого языка

$$\varphi(t_1^{(1)}, \dots, t_n^{(1)}, t_1^{(2)}, \dots, t_n^{(2)}, s_1^{(1)}, \dots, s_n^{(1)}, s_1^{(2)}, \dots, s_n^{(2)},\\ r_1^{(1)}, \dots, r_n^{(1)}, r_1^{(2)}, \dots, r_n^{(2)}, \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \dots, \xi_n^{(2)}),$$

истинная тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2;$$

(3) *Аналогично, для разложений $x_1 = u_1 t_1 v_1 u_1'$, $x_2 = u_2 t_2 v_2 u_2'$ и $x_3 =$*

$u_3 t_3 v_3 u_3'$, где

$$
\begin{aligned}
u_i &= x_{\alpha_1}(t_1^{(i)}) \dots x_{\alpha_n}(t_n^{(i)}),\\
u_i' &= x_{\alpha_1}(s_1^{(i)}) \dots x_{\alpha_n}(s_n^{(i)}),\\
v_i &= x_{-\alpha_1}(r_1^{(i)}) \dots x_{-\alpha_n}(r_n^{(i)}),\\
t_i &= h_{\alpha_1}(\xi_1^{(i)}) \dots h_{\alpha_l}(\xi_l^{(i)}), \quad i = 1, 2, 3,
\end{aligned}
$$

существует формула первого порядка кольцевого языка

$$\psi(t_1^{(i)}, \dots, t_n^{(i)}, s_1^{(i)}, \dots, s_n^{(i)}, r_1^{(i)}, \dots, r_n^{(i)}, \xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}),$$

истинная тогда и только тогда, когда

$$x_3 = x_1 \cdot x_2.$$

В параграфе § 14 с помощью перехода к ультрастепеням и теореме Кейслера-Шелаха об изоморфизме (методы, впервые использованные К.И. Бейдаром и А.В. Михалевым для линейных групп над кольцами показано, что если две рассматриваемые группы Шевалле элементарно эквивалентны, то элементарно эквивалентны и базисные кольца, по которым они построены.

В последнем параграфе все результаты сводятся воедино и доказывается теорема 5.

Третья глава диссертации посвящена автоморфизмам и элементарной эквивалентности полугрупп неотрицательных обратимых матриц над упорядоченными кольцами. В первом параграфе вводятся основные определения. Определяется полугруппа $G_n(R)$, состоящая из обратимых в группе $\mathrm{GL}_n(R)$ матриц, все коэффициенты которых неотрицательны. Далее вводятся следующие важные подполугруппы и подмножества полугруппы $G_n(R)$:

Определение 3.4. Пусть $I = I_n$, $\Gamma_n(R)$ — группа, состоящая из всех обратимых матриц из $G_n(R)$, Σ_n — симметрическая группа порядка n, S_σ — матрица перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ *(*т. е. матрица $(\delta_{i\sigma(j)})$, где $\delta_{i\sigma(j)}$ — символ Кронекера*)*, $S_n = \{S_\sigma | \sigma \in \Sigma_n\}$, $\mathrm{diag}\,[d_1, \dots, d_n]$ — диагональная матрица с элементами $d_1, \dots, d_n$ на диагонали, $d_1, \dots, d_n \in R_+^*$. Через $D_n(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_n(R)$, через $D_n^Z(R)$ — центр группы $D_n(R)$.

Определение 3.8. Через $B_{ij}(x)$ обозначим матрицу $I + xE_{ij}$. Пусть $\mathbf{P}$ обозначает подполугруппу в $G_n(R)$, порожденную всеми матрицами S_σ *(*$\sigma \in \Sigma_n$*)*, $B_{ij}(x)$ *(*$x \in R_+, i \neq j$*)* и $\mathrm{diag}\,[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in D_n(R)$.

Определение 3.9. Две матрицы $A, B \in G_n(R)$ называются $\mathcal{P}$-эквивалентными, если существуют матрицы $A_j \in G_n(R)$, $j = 0, \ldots, k$, $A = A_0, B = A_k$, и матрицы $P_i, \widetilde{P}_i, Q_i, \widetilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \ldots, k-1$ такие, что $P_i A_i \widetilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \widetilde{Q}_i$.

Определение 3.10. Через $\mathrm{GE}_n^+(R)$ обозначим подполугруппу в $G_n(R)$, порожденную всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

Второй параграф посвящен описанию автоморфизмов полугруппы неотрицательных обратимых матриц над линейно упорядоченными кольцами с обратимой двойкой. Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 3.1. *Пусть Φ — автоморфизм полугруппы $G_n(R)$, $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$, кольцо R линейно упорядочено. Тогда на полугруппе $\mathrm{GE}_n^+(R)$ $\Phi = \Phi_M \Phi^c \Omega$, где Φ_M — внутренний автоморфизм с помощью матрицы $M \in \Gamma_n(R)$, Φ^c — кольцевой автоморфизм при помощи автоморфизма $c(\cdot) \in \mathrm{Aut}\,(R_+)$, $\Omega(\cdot)$ — центральная гомотетия полугруппы $\mathrm{GE}_n^+(R)$.*

В третьем параграфе рассматривается элементарная эквивалентность полугрупп $G_n(R)$, автоморфизмы которых были найдены в §,2. Параграф посвящен доказательству следующей теоремы:

Теорема 3.2. *Полугруппы $G_n(R)$, $G_m(S)$ ($n, m \geqslant 3$, $1/2 \in R$, $1/2 \in S$, кольца R и S линейно упорядочены) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$ и полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны.*

В **четвертой главе** диссертации рассматриваются элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов свободных модулей бесконечного ранга над кольцами и групп автоморфизмов свободных модулей бесконечного ранга над кольцами, а также колец эндоморфизмов абелевых p-групп. Выясняется, что элементарная эквивалентность таких структур равносильна эквивалентности базисных структур, по которым они строятся, в логике второго порядка (или какой-то ее части). Таким образом, требуются строгие определения логики второго порядка (языках и теориях второго порядка, их моделях, формулах, выполнимости), которые приводятся в первом параграфе.

Второй параграф посвящен элементарным свойствам и элементарной эквивалентности категорий модулей над кольцом.

В первом пункте второго параграфа приводятся некоторые дополнительные сведения о категории mod-R.

Во втором пункте показано, что в категории mod-R понятие прообразующего объекта определимо без параметров, т. е. существует формула в языке первого порядка теории категорий с одной свободной объектной переменной, истинная в категории mod-R для прообразующих модулей этой категории, и только для них.

В пункте 2.3 показано, что для данного прообразующего модуля P на полугруппе $Mor(P, P)$ можно ввести операции сложения и умножения так, чтобы эта полугруппа превратилась в кольцо, изоморфное кольцу $\mathrm{End}_R(P)$.

В пункте 2.4 рассматривается случай конечных колец и доказывается теорема о том, что *категории mod-R и mod-S, где R — конечное кольцо, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие кольца Морита-эквивалентны.*

В пункте 2.5 мы формулируем, как распространить результаты С. Шелаха об интерпретации теории множеств в категории на случай категории mod-R.

В пункте 2.6 результаты п. 2.5 используются для того, чтобы в категории mod-R для некоторых фиксированных модулей X и Y выделить элементарными средствами множество линейно независимых проекторов из X на Y.

В пункте 2.7 описывается структура $\langle Cn, ring\rangle$, состоящая из класса $\mathbf{Cn}$ всех кардинальных чисел, который состоит из множеств мощности $\varkappa$ для каждого $\varkappa \in \mathbf{Cn}$, и кольца $ring$ с отношениями суммы и произведения, а также логика второго порядка такой структуры (мы обозначаем ее через $L_2(\langle Cn, ring\rangle)$), позволяющая в формулах использовать произвольные предикатные символы вида

$$P_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}(c_1,\ldots,c_k; v_1,\ldots,v_n),$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ — фиксированные кардинальные числа, $c_1,\ldots c_k$ — переменные для элементов из $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ соответственно, $v_1,\ldots,v_n$ — переменные для элементов кольца. Кроме того, доказана следующая теорема

Теорема 4.5. *Пусть даны кольца R и S и существует предложение ψ языка $L_2(\langle Cn, ring\rangle)$, истинное в кольце R и ложное во всех кольцах, ему подобных и не эквивалентных ему в языке $L_2(\langle Cn, ring\rangle)$. Пусть, кроме того, категории mod-R и mod-S элементарно эквивалентны. Тогда существует кольцо S', подобное кольцу S и такое, что структуры $\langle Cn, R\rangle$ и $\langle Cn, S'\rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

Пункт 2.8 посвящен доказательству "обратной" теоремы:

Теорема 4.6. *Для произвольных колец с единицей R и S если структуры $\langle Cn, R\rangle$ и $\langle Cn, S\rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2, то категории mod-R и mod-S элементарно эквивалентны.*

В результате в п. 2.9 из двух предыдущих теорем выводится теорема, являющаяся аналогом теоремы Мориты для элементарной эквивалентности, и несколько полезных следствий из нее:

Теорема 4.7. *Пусть даны кольца R и S и существует предложение ψ языка $L_2(\langle Cn, ring\rangle)$, истинное в кольце R и ложное во всех кольцах, ему подобных и не эквивалентных ему в языке $L_2(\langle Cn, ring\rangle)$. Тогда категории mod-$R$ и mod-S элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда существует кольцо S', подобное кольцу S и такое, что структуры $\langle Cn, R\rangle$ и $\langle Cn, S'\rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

Следствие 1. *Для произвольных тел F_1 и F_2 категории mod-F_1 и mod-F_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle Cn, F_1\rangle$ и $\langle Cn, F_2\rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2.*

Следствие 2. *Для произвольных коммутативных колец R_1 и R_2 категории mod-R_1 и mod-R_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle Cn, R_1\rangle$ и $\langle Cn, R_2\rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2.*

Следствие 3. *Для произвольных локальных колец R_1 и R_2 категории mod-R_1 и mod-R_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle Cn, R_1\rangle$ и $\langle Cn, R_2\rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2.*

Следствие 4. *Для произвольных областей главных идеалов R_1 и R_2 категории mod-R_1 и mod-R_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle Cn, R_1\rangle$ и $\langle Cn, R_2\rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

Следствие 5. *Для произвольных артиновых колец R_1 и R_2 категории mod-R_1 и mod-R_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие, что структуры $\langle Cn, S_1\rangle$ и $\langle Cn, S_2\rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

Третий параграф посвящен рассмотрению тех же вопросов для колец эндоморфизмов модулей бесконечных рангов.

На протяжении всего параграфа предполагается, что кольцо R и бесконечное кардинальное число $\varkappa$ таковы, что в кольце R существует максимальный идеал, порожденный не более чем $\varkappa$ элементами (например, это всегда так, когда $\varkappa \geqslant |R|$ или кольцо R полупросто или является кольцом главных идеалов).

В первом пункте этого параграфа для каждого свободного модуля V бесконечного ранга над кольцом вводится некоторая специальная категория $C_{M(V)}$

такая, что элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов двух свободных модулей бесконечных рангов над кольцами равносильна элементарной эквивалентности соответствующих категорий.

Второй пункт третьего параграфа посвящен изучению элементарной эквивалентности категорий вида $C_{M(V)}$, в результате чего в третьем пункте доказаны следующая основная теорема и следствие из нее:

Теорема 4.13. *Пусть V_1 и V_2 — свободные модули бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно, и существует предложение $\psi \in T_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1 \rangle)$, ложное во всех кольцах, подобных кольцу R_1 и имеющих другую теорию $Th_2^{\varkappa_1}$. Тогда кольца $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны в том и только в том случае, когда существует кольцо S, подобное кольцу R_2 и такое, что теории $Th_2^{\varkappa_1}\langle \varkappa_1, R_1 \rangle$ и $Th_2^{\varkappa_2}\langle \varkappa_2, S \rangle$ совпадают.*

Следствие 1. *Для пространств V_1 и V_2 бесконечных размерностей $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над произвольными телами (областями главных идеалов) F_1 и F_2 кольца $\mathrm{End}_{F_1} V_1$ и $\mathrm{End}_{F_2} V_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда теории $Th_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, F_1 \rangle)$ и $Th_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, F_2 \rangle)$ совпадают.*

Следствие 2. *Предположим, что $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — бесконечные кардинальные числа, R_1 и R_2 — коммутативные (локальные) кольца, и каждый максимальный идеал кольца R_1 порожден не более, чем $\varkappa_1$ элементами кольца. Тогда для свободных модулей V_1 и V_2 рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно, кольца $\mathrm{End}_{R_1} V_1$ и $\mathrm{End}_{R_2} V_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда теории $Th_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1 \rangle)$ и $Th_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, R_2 \rangle)$ совпадают.*

Следствие 3. *Предположим, что $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — бесконечные кардинальные числа, R_1 и R_2 — артиновы кольца, и каждый максимальный идеал кольца R_1 порожден не более, чем $\varkappa_1$ элементами кольца. Тогда для свободных модулей V_1 и V_2 рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно, кольца $\mathrm{End}_{R_1} V_1$ и $\mathrm{End}_{R_2} V_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие, что теории $Th_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, S_1 \rangle)$ и $Th_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S_2 \rangle)$ совпадают.*

Следствие 4. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над полупростыми кольцами R_1 и R_2 соответственно, кольца $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие, что теории $Th_2^{\varkappa_1}\langle \varkappa_1, S_1 \rangle)$ и $Th_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S_2 \rangle)$ совпадают.*

В четвертом параграфе рассматриваются проективные пространства модулей бесконечных рангов.

В первом пункте этого параграфа описывается язык проективной геометрии над кольцом (т. е. решетки подмодулей модуля на кольцом) и основные понятия, выразимые в этом языке.

Во втором пункте показано, как в проективной геометрии модуля бесконечного ранга интерпретировать кольцо, изоморфное кольцу $\mathrm{End}_R P$ для некоторого прообразующего модуля P.

В третьем пункте четвертого параграфа показано, как в проективной геометрии модуля V интерпретировать кольцо $\mathrm{End}_R V$.

В результате в этом пункте доказана следующая теорема:

Теорема 4.14. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов над произвольными кольцами R_1 и R_2 соответственно из элементарной эквивалентности решеток подмодулей $P(V_1)$ и $P(V_2)$ следует элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$.*

В четвертом пункте доказывается “обратная” теорема:

Теорема 4.15. *Предположим, что V_1 и V_2 — свободные модули бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно, и каждый подмодуль модуля V_1 (V_2) имеет не более $\varkappa_1$ ($\varkappa_2$) порождающих элементов (например, это так, если $\varkappa_1 \geqslant |R_1|$ и $\varkappa_2 \geqslant R_2$ или если R_1, R_2 — полупростые кольца или кольца главных идеалов). Тогда из*

$$\mathrm{End}_{R_1}(V_1) \equiv \mathrm{End}_{R_2}(V_2)$$

следует

$$P(V_1) \equiv P(V_2).$$

В пятом параграфе рассматриваются группы автоморфизмов модулей бесконечных рангов над кольцами.

В пункте 5.1 доказывается, что *если кольца R и S с $1/2$ не содержат центральных идемпотентов, отличных от 0 и 1, V и V' — свободные модули бесконечных рангов над кольцами R и S соответственно, то группы $\mathrm{Aut}_R(V)$ и $\mathrm{Aut}_S(V')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}_R(V) \cong \mathrm{End}_S(V')$.*

В пункте 5.2 результаты п. 5.1 распространяются на элементарную эквивалентность. Это делается с помощью перехода к ультрастепеням. Доказана следующая теорема:

Теорема 4.17. *Предположим, что кольца R, S содержат $1/2$ и не содержат центральных идемпотентов, отличных от 1 и 0. Тогда группы $\mathrm{Aut}_R(V)$ и $\mathrm{Aut}_S(V')$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда кольца $\mathrm{End}_R(V)$ и $\mathrm{End}_S(V')$ элементарно эквивалентны.*

В пункте 5.3 мы считаем, что кардинальное число $\varkappa_1$ таково, что существует максимальный идеал кольца R_1, порожденный не более чем $\varkappa_1$ элементами.

Доказана следующая теорема и следствия из нее:

Теорема 4.19. *Предположим, что кольца R_1 и R_2 содержат $1/2$ и не содержат центральных идемпотентов, отличных от 1 и 0. Пусть, кроме того, V_1 и V_2 — свободные модули бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно, и пусть существует предложение $\psi \in Th_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1 \rangle)$, ложное во всех кольцах, подобных кольцу R_1 и имеющих другую теорию $Th_2^{\varkappa_1}$. Тогда группы $\mathrm{Aut}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{Aut}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда существует кольцо S, подобное кольцу R_2 и такое, что $Th_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1 \rangle) = Th_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S \rangle)$.*

Следствие 1. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над телами (коммутативными или локальными кольцами, не содержащими центральных идемпотентов, отличных от 1 или 0, областями целостности) F_1 и F_2, содержащими $1/2$, соответственно, группы $\mathrm{Aut}_{F_1}(V_1)$ и $\mathrm{Aut}_{F_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$Th_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, F_1 \rangle) = Th_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, F_2 \rangle).$$

Следствие 2. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над артиновыми кольцами R_1 и R_2, не содержащими центральных идемпотентов, отличных от 0 или 1, содержащими $1/2$, соответственно, группы $\mathrm{Aut}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{Aut}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие, что*

$$Th_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, S_1 \rangle) = Th_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S_2 \rangle)$$

В шестом параграфе четвертой главы устанавливается связь между свойствами второго порядка абелевой p-группы и свойствами первого порядка ее кольца эндоморфизмов.

В первом пункте приведены все нужные н для дальнейших построений сведения об абелевых группах, а также сформулировано, как распространить результаты С. Шелаха[45] об интерпретации теории множеств в категории на случай кольца эндоморфизмов специальной абелевой p-группы, являющейся прямой суммой циклических групп одного порядка.

В пункте 6.2 еще раз описан групповой язык второго порядка $\mathcal{L}_2$, а также его ограничение $\mathcal{L}_2^{\varkappa}$ некоторым кардинальным числом $\varkappa$, после чего в п. 4.2 вводим *выразимый ранг* r_{exp} абелевой группы A, представленной в виде прямой суммы $D \oplus G$ своих делимой и редуцированных частей как максимум мощностей группы D и базисной подгруппы B группы A. В п. 6.2 мы сформулирована основная теорема этого параграфа:

Если A_1 и A_2 — абелевы p-группы, $\varkappa_1 = r_{exp}(A_1)$, $\varkappa_2 = r_{exp}(A_2)$, то из элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов $\mathrm{End}\,(A_1)$ *и* $\mathrm{End}\,(A_2)$ *следует* $Th_2^{\varkappa_1}(A_1) = Th_2^{\varkappa_2}(A_2)$.

Заметим, что $r_{exp}(A) = |A|$ во всех случаях, кроме случая, когда $|D| < |G|$, базисная подгруппа группы A счетна, а группа G несчетна. В этом случае $r_{exp}(A) = \omega$.

В том же пункте мы доказываем две "обратных импликации" основной теоремы:

1. *Для любых абелевых групп A_1 и A_2 если группы A_1 и A_2 эквивалентны в логике второго порядка L_2, то кольца* $\mathrm{End}\,(A_1)$ *и* $\mathrm{End}\,(A_2)$ *элементарно эквивалентны.*

2. *Если абелевы группы A_1 и A_2 редуцированны и их базисные подгруппы счетны, то из* $Th_2^{\omega}(A_1) = Th_2^{\omega}(A_2)$ *следует* $\mathrm{End}\,(A_1) \equiv \mathrm{End}\,(A_2)$.

Таким образом, для всех абелевых групп, за исключением случая $A = D \oplus G$, $D \neq 0$, $|D| < |G|$, $|G| > \omega$, базисная подгруппа в A счетна, элементарная эквивалентность колец $\mathrm{End}\,(A_1)$ и $\mathrm{End}\,(A_2)$ равносильна соотношению

$$Th_2^{\varkappa_1}(A_1) = Th_2^{\varkappa_2}(A_2).$$

В конце п. 6.2 доказательство основной теоремы разделено на три случая:

1) группы A_1 и A_2 ограниченны;

2) $A_1 = D_1 \oplus G_1$, $A_2 = D_2 \oplus G_2$, группы D_1 и D_2 делимы, группы G_1 и G_2 ограниченны;

3) группы A_1 и A_2 обладают неограниченными базисными подгруппами.

В следующих трех пунктах шестого параграфа эти три случая рассматриваются по отдельности. В последнем пункте шестого параграфе окончательно доказана основная теорема.

[45] S. Shelah. Interpreting set theory in the endomorphism semi-group of a free algebra or in the category. Annales Scientifiques L'universite Clermont, 1976, 13, 1–29.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. Разработаны новые методы описания автоморфизмов и изоморфизмов групп Шевалле с помощью линейных уравнений над локальными кольцами. Получено полное описание (доказательство стандартности) автоморфизмов групп Шевалле следующих типов:

— типов A_l, D_l, E_l, B_l, C_l, F_4, $l > 1$, над локальными кольцами с обратимой двойкой;

— типа G_2 над локальными кольцами с обратимыми двойкой и тройкой;

— типов A_l, D_l, E_l, $l > 2$, над локальными кольцами с необратимой двойкой (теорема 1.1).

2. Описаны элементарные свойства и элементарная эквивалентность групп Шевалле над полями и локальными кольцами с обратимой двойкой с использованием метода инволюций (доработанного автором для случая групп Шевалле), методов А.И. Мальцева и метода ультрастепеней К.И. Бейдара и А.В. Михалева. Элементарная эквивалентность групп Шевалле описанных типов сведена к элементарной эквивалентности базисных полей или колец (теоремы 2.1 и 2.2).

3. Описаны автоморфизмы и элементарная эквивалентность полугруппы неотрицательных обратимых матриц над линейно упорядоченными кольцами с обратимой двойкой, что является продолжением описания аналогичных полугрупп над линейно упорядоченными телами, полученного А.В. Михалевым и А.М. Шаталовой (теоремы 3.1 и 3.2).

4. Установлена связь между элементарной эквивалентностью

— категорий модулей над кольцами,

— колец эндоморфизмов свободных модулей над кольцами бесконечных рангов,

— групп автоморфизмов свободных модулей над кольцами бесконечных рангов,

— проективных геометрий свободных модулей над кольцами

и эквивалентности в логике второго порядка структур, связанных с кольцами (теоремы 4.7, 4.13, 4.15 и 4.19).

Автором разработаны методов работы с логикой второго порядка, построена интерпретации теории второго порядка кольца в теории первого порядка его производной структуры (категории модулей над ним, кольца эндоморфизмов, группы автоморфизмов, проективной геометрии модулей над ним).

В качестве следствий получено полное описание элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей бесконечного ранга над

— телами;

— областями главным идеалов;

— коммутативными кольцами;

— локальными кольцами;

— артиновыми кольцами;

— полупростыми кольцами (следствия из теорем 4.13 и 4.19).

5. Получен аналог теорема Бэра–Капланского об изоморфизме колец эндоморфизмов абелевых p-групп для элементарной эквивалентности. Логика второго порядка абелевой p-группы проинтерпретирована в кольце ее эндоморфизмов, разработаны методы кодирования элементов абелевой группы в кольце ее эндоморфизмов (теоремы 4.33, 4.34, 4.35).

Автор выражает благодарность своему научному консультанту, профессору Александру Васильевичу Михалеву, за постоянное внимание к работе и полезные советы, а также всему коллективу кафедры высшей алгебры МГУ имени М.В. Ломоносова за доброжелательное отношение и поддержку.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ (работы 1–18 входят в официальный Перечень ВАК)

[1] Бунина Е.И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 1998. — Т. 4. — С. 1–14.

[2] Бунина Е.И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // *Успехи математических наук.* — 1998. — Т. 53, вып. 2. — С. 137–138.

[3] Бунина Е.И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле // *Успехи Мат. наук.* — 2001. — Т. 56, вып. 1. — С. 157–158.

[4] Бунина Е.И., Михалев А.В. Элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 51-134 (диссертанту принадлежат результаты о связи элементарной эквивалентности производных структур с эквивалентностью в логике второго порядка исходных структур).

[5] Бунина Е.И. Группы Шевалле над полями и их элементарные свойства // *Успехи мат. наук.* — 2004. — Т. 59, вып. 5. — С. 952–953.

[6] Бунина Е.И., Михалев А.В. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 135-224 (диссертанту принадлежат результаты о необходимых и достаточных условиях элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов абелевых p-групп).

[7] Bunina E.I., Mikhalev A.V. Combinatorial and Logical Aspects of Linear Groups and Chevalley Groups // *Acta Applicandae Mathematicae.* — 2005. — V. 85, N. 1–3. — P. 57–74 (это обзорная статья, в которой собраны результаты авторов).

[8] Е.И. Бунина, А.В. Михалев. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3-23 (диссертанту принадлежит структурная теорема об автоморфизмах полугрупп обратимых матриц с неотрицательными коэффициентами над линейно упорядоченными кольцами).

[9] Бунина Е.И. Элементарные свойства групп Шевалле над локальными кольцами // *Успехи математических наук.* — 2006. — Т. 61, вып. 2. — С. 349–350.

[10] Е.И. Бунина, А.В. Михалев. Элементарная эквивалентность полугрупп обратимых матриц с неотрицательными элементами // *Фундаментальная и*

прикладная математика. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 39–53 (диссертанту принадлежит описание необходимых и достаточных условий элементарной эквивалентности полугрупп обратимых матриц с неотрицательными коэффициентами над линейно упорядоченными кольцами).

[11] E.I. Bunina, A.V. Mikhalev. Elementary Theories of Abelian p-groups and second-order theories of their automorphism rings // *The Bulletin of Symbolic Logic.* — 2006. — V. 12, N. 2. — P. 326 (диссертанту принадлежат результаты о необходимых и достаточных условиях элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов абелевых p-групп).

[12] Бунина Е.И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле над полями // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 29–77.

[13] Бунина Е.И., Михалев А.В. Элементарные свойства категории полигонов над моноидом // *Алгебра и логика.* — 2006. — Т. 45, вып. 6. — С. 687-709 (диссертанту принадлежат необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности категорий полигонов над моноидами).

[14] Бунина Е.И. Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов над локальными кольцами // *Успехи математических наук.* — 2007. — Т. 62, вып. 5. — С. 143–144.

[15] Бунина Е.И. Автоморфизмы присоединенных групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 3–27.

[16] Бунина Е.И. Автоморфизмы элементарных присоединенных групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами // *Алгебра и логика.* — 2009. — Т. 48, вып. 1. — С. 443–470.

[17] Бунина Е.И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами // *Математический сборник.* — 2010. — Т. 201, вып. 3. —С. 3–20.

[18] Bunina E.I. Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with 1/2 // *Journal of Algebra.* — 2010, V. 323. — P. 2270–2289.

[19] Bunina E.I., Mikhalev A.V. Elementary properties of linear and algebraic groups // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2002. — V. 110, N. 3. — P. 2595–2659 (обзорная работа, в которой §§ 3–5 — это результаты диссертанта).

[20] Bunina E.I., Mikhalev A.V. Elementary properties of linear groups and related questions // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2004. — V. 123, N. 2. — P. 3921–3985 (обзорная работа, в которой §§ 4–6 — это результаты диссертанта).

[21] Е.И. Бунина, А.В. Михалев. Элементарная эквивалентность моноидов

эндоморфизмов свободных полигонов // *Чебышевский сборник.* — 2005. — Т. 6, вып. 4. — С. 49–63 (диссертанту принадлежат необходимые и достаточные условия элементарной эквивалентности категорий полигонов над моноидами).

[22] Bunina E.I., Mikhalev A.V. Elementary equivalence of categories of modules and other algebraic structures // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2005. — V. 131, N. 5. — P. 6004-6013 (диссертанту принадлежат результаты о связи элементарной эквивалентности производных структур с эквивалентностью в логике второго порядка исходных структур).

[23] Balmasov E.S., Bunina E.I. Elementary equivalence of unitary linear groups over rings // *Journal of Mathematical Sciences.* — 2009. — V. 162, N. 5. — P. 594–604 (диссертанту принадлежат результаты об элементарной эквивалентности унитарных линейных групп).

[24] Бунина Е.И. Автоморфизмы и нормализаторы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с 1/2 // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 35–59.

[25] Бунина Е.И. Автоморфизмы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 47–80.

[26] Бунина Е.И. Автоморфизмы групп Шевалле типа B_l над локальными кольцами с 1/2 // *Фундаментальная и прикладная математика.* — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 3–46.