Математические заметки

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 512.643+512.552.2

Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами

Е. И. Бунина

В работе описываются автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц размера два над коммутативным частично упорядоченным кольцом, в котором обратимы двойка и тройка.

Ключевые слова: *частично упорядоченные кольца, полугруппа неотрицательных матриц, описание автоморфизмов*

Библиография: 3 названия.

Пусть R — упорядоченное кольцо, $G_n(R)$ — подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными элементами. В работе [1] А.В. Михалев и М.А. Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geqslant 2$. В работе [2] Е.И. Бунина и А.В. Михалев описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, если R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geqslant 3$. В работе [3] Е.И. Бунина и П.П. Семенов описали автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является коммутативным частично упорядоченным кольцом, содержащим $\mathbb{Q}$, $n \geqslant 3$.

В этой работе мы описываем автоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ для частично упорядоченных коммутативных колец с $1/2$ и $1/3$. Полное описание (не до конца совпадающее с описанием при $n \geqslant 3$) получается для кольца, в котором каждый элемент является суммой конечного числа обратимых.

1. Необходимые определения и понятия, формулировка основной теоремы

Пусть R — ассоциативное (коммутативное) кольцо с 1.

Определение 1. Кольцо R называется *частично упорядоченным*, если на нем задано отношение частичного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующим условиям:

Работа поддержана грантом Президента РФ МК-2530.2008.1 и грантом РФФИ 08-01-00693

1) $\forall x, y, z \in R (x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z)$;

2) $\forall x, y \in R (0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant xy)$.

Мы будем рассматривать такие частично упорядоченные кольца, в которых $1/2$ и $1/3 \geqslant 0$.

Такие элементы r кольца R, для которых $0 \leqslant r$, называются *неотрицательными*. Множество всех неотрицательных элементов кольца R обозначается через R_+.

Определение 2. Пусть R — частично упорядоченное кольцо. Через $G_n(R)$ обозначается подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Множество всех обратимых элементов кольца R обозначается через R^*. Если $1/2 \in R$, то множество R^* бесконечно, так как оно содержит все $1/2^n$ для $n \in \mathbb{N}$. Множество $R_+ \cap R^*$ обозначается через R_+^*. Если $1/2 \in R$, то оно также бесконечно.

Определение 3. Пусть $I = I_2$, $\Gamma_2(R)$ — группа, состоящая из всех обратимых в $G_2(R)$ матриц, $\Sigma_2 = \{e, (12)\}$ — симметрическая группа порядка 2, S_σ — матрица перестановки $\sigma \in \Sigma_2$, в нашем случае таких матрицы всего две: I и $S = S_{(12)}$; $S_2 = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\} = \{I, S\}$, $\mathrm{diag}\,[d_1, d_2]$ — диагональная матрица с элементами d_1, d_2 на диагонали, $d_1, d_2 \in R_+^*$. Через $D_2(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_2(R)$.

Определение 4. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — подмножества в $G_2(R)$, то положим

$$C_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \{a \in \mathcal{A} \mid \forall b \in \mathcal{B}\ (ab = ba)\}.$$

Пусть E_{ij} — матричная единица.

Определение 5. Через $B_{ij}(x)$, $i \neq j$, обозначим матрицу $I + xE_{ij}$. Пусть $\mathbf{P}$ обозначает подполугруппу в $G_2(R)$, порожденную матрицами S, $B_{ij}(x)$ $(x \in R_+, i \neq j)$ и $\mathrm{diag}\,[\alpha_1, \alpha_2] \in D_2(R)$.

Определение 6. Две матрицы $A, B \in G_2(R)$ называются *$\mathcal{P}$-эквивалентными* (см. [1]), если существуют матрицы $A_j \in G_2(R)$, $j = 0, \ldots, k$, $A = A_0, B = A_k$, и матрицы $P_i, \widetilde{P}_i, Q_i, \widetilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \ldots, k-1$ такие, что $P_i A_i \widetilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \widetilde{Q}_i$.

Определение 7. Через $\mathrm{GE}_2^+(R)$ обозначим подполугруппу в $G_2(R)$, порожденную всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

Определение 8. Если G — некоторая полугруппа, то гомоморфизм $\lambda(\cdot) : G \to G$ называется *центральным гомоморфизмом* G, если $\lambda(G) \subset Z(G)$. Отображение $\Omega(\cdot) : G \to G$ такое, что $\forall X \in G$

$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X,$$

где $\lambda(\cdot)$ — центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией*.

Для каждой матрицы $M \in \Gamma_2(R)$ пусть Φ_M обозначает автоморфизм полугруппы $G_2(R)$ такой, что $\forall X \in G_2(R)\ \Phi_M(X) = MXM^{-1}$.

Для каждого $y(\cdot) \in \mathrm{Aut}\,(R_+)$ через Φ^y обозначим автоморфизм полугруппы $G_2(R)$ такой, что $\forall X = (x_{ij}) \in G_2(R)\ \Phi^y(X) = \Phi^y((x_{ij})) = (y(x_{ij}))$.

Определение 9. Пусть $\xi \in R_+$, $\xi^2 = 1$. Через Ψ^ξ обозначим следующее биективное отображение полугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R)$ на себя (позже мы докажем, что оно является автоморфизмом):

$$\begin{cases} \Psi^\xi(S) & = S; \\ \Psi^\xi(B_{12}(a)) & = B_{12}(a\xi); \\ \Psi^\xi(\operatorname{diag}[\alpha,\beta]) & = \operatorname{diag}[\alpha,\beta]. \end{cases}$$

На остальные элементы данное отображение распространяется благодаря образам перечисленных элементов.

Основным результатом этой работы является следующая

Теорема. *Пусть Φ — автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, $1/2, 1/3 \in R$, R — коммутативное частично упорядоченное кольцо, для которого R_+ порождается неотрицательными обратимыми элементами кольца R. Тогда на полугруппе $\mathrm{GE}_2^+(R)$*

$$\Phi = \Phi_M \circ \Phi^c \circ \Omega \circ \Psi^\xi,$$

где $M \in \Gamma_2(R)$, $c(\cdot) \in \mathrm{Aut}\,(R_+)$, а $\Omega(\cdot)$ — центральная гомотетия полугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R)$.

2. Построение автоморфизма Φ'

В этом параграфе мы предполагаем, что фиксирован некоторый автоморфизм $\Phi \in \mathrm{Aut}\,(G_2(R))$, $1/2, 1/3 \in R$, и с помощью него строим новый автоморфизм $\Phi' \in \mathrm{Aut}\,(G_2(R))$ такой, что $\Phi' = \Phi_{M'} \circ \Phi$ для некоторой матрицы $M' \in \Gamma_2(R)$ и $\Phi'(S) = S$.

Лемма 1. ([3]). $\forall x, y \in R_+$ $(x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0)$.

Лемма 2. (ср. с леммой 2 работы [3]). *Если Φ — автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, $1/2, 1/3 \in R$, то*
1) $\Phi(\Gamma_2(R)) = \Gamma_2(R)$,
2) $\Phi(D_2(R)) = D_2(R)$.

Доказательство. 1) Так как $\Gamma_2(R)$ является подгруппой всех обратимых матриц полугруппы $G_2(R)$, то $\Phi(\Gamma_2(R)) = \Gamma_2(R)$.

2) Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ всех матриц $A \in \Gamma_2(R)$, коммутирующих со всеми матрицами, сопряженными к A.

Рассмотрим

$$B = \operatorname{diag}[\alpha_1, \alpha_2] \in D_2(R),$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma_2(R), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma_2(R).$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{2} a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0 \text{ для } i \neq j.$$

Значит, $a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0$ для $i \neq j$ (по лемме 1). Тогда $A^{-1}BA \in D_2(R)$ — диагональная матрица, поэтому $D_2(R) \subset \mathcal{F}$.

Пусть существует матрица $C \in \mathcal{F} \setminus D_2(R)$,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Сопряжем C с помощью матрицы $\mathrm{diag}\,[d, 1]$. Сопряженная матрица (C') имеет вид

$$C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}d^{-1} \\ c_{21}d & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Использовав соотношение $CC' = C'C$, получаем $c_{11}^2 + c_{12}c_{21}d = c_{11}^2 + c_{21}c_{12}d^{-1}$. Если взять $d = 2$, то получим

$$3 \cdot (c_{12}c_{21}) = 0.$$

Так как $1/3 \in R$, то

$$c_{12}c_{21} = 0.$$

Пусть

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$0 = \gamma_{11}c_{12} + \gamma_{12}c_{22},$$

откуда

$$\gamma_{11}c_{12} = 0.$$

Кроме того,

$$1 = \gamma_{11}c_{11} + \gamma_{12}c_{21}.$$

Домножим это равенство на c_{12}, получим $c_{12} = 0$. Аналогично, $c_{21} = 0$. Таким образом, $\mathcal{F} = D_2(R)$, и, значит, $\Phi(D_2(R)) = D_2(R)$. $\square$

Лемма 3. *Если Φ является автоморфизмом полугруппы $G_2(R)$, то существует матрица $M \in \Gamma_2(R)$ такая, что $\Phi_M\Phi(S) = S$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \Phi(S),$$

для нее $A^2 = I$. Следовательно $ab + db = 0$, откуда (по лемме 1) $ab = 0$. С другой стороны, $a^2 + bc = 1$. Домножим это равенство на a^2, получим $(a^2)^2 = a^2$. Значит, a^2 является идемпотентом, а следовательно, $e_1 = a^2$ и $e_2 = bc$ — это ортогональные идемпотенты, в сумме дающие 1 (может быть, какой-то из этих идемпотентов нулевой). Мы знаем, что $S \cdot \mathrm{diag}\,[\alpha, \beta] \neq \mathrm{diag}\,[\alpha, \beta] \cdot S$ ни для каких обратимых $\alpha \neq \beta$ (так как сопряжение матрицей S диагональной матрицы меняет местами элементы диагонали). Значит, так как по лемме 2 диагональные матрицы переходят в диагональные, то же самое верно для матрицы A. Возьмем $\alpha = 1 = a^2 + bc$ и $\beta = a^2/2 + bc$. Тогда α и β обратимы и $A \cdot \mathrm{diag}\,[\alpha, \beta] = \mathrm{diag}\,[\alpha, \beta] \cdot A$. Значит, $\alpha = \beta$, то есть $a^2 = 0$.

Следовательно, $bc = 1$. Так как $abc = 0$, то $a = 0$. Аналогично, $d = 0$. Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

После сопряжения матрицы A с помощью диагональной матрицы $M^{-1} = \operatorname{diag}[b, 1]$, мы получим матрицу S. Таким образом, мы нашли матрицу $M \in \Gamma_2(R)$ такую, что $\Phi_M\Phi(S) = S$. $\square$

По нашему автоморфизму Φ мы построили новый автоморфизм $\Phi' = \Phi_M\Phi$ такой, что $\Phi'(S) = S$. Мы предположим, что такой автоморфизм Φ' фиксирован.

Лемма 4. *В наших предположениях для любых $x_1, x_2 \in R_+^*$ таких, что $x_1 \neq x_2$,*

$$\Phi'(A_1) = \Phi'(\operatorname{diag}[x_1, 1]) = \operatorname{diag}[\xi_1, \eta_1],$$
$$\Phi'(A_2) = \Phi'(\operatorname{diag}[x_2, 1]) = \operatorname{diag}[\xi_2, \eta_2],$$

где $\xi_1\eta_1^{-1} \neq \xi_2\eta_2^{-1}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторых различных $x_1, x_2 \in R_+^*$ имеет место $\xi_1\eta_1^{-1} = \xi_2\eta_2^{-1}$, т.е.

$$\Phi'(A_1) = \Phi'(\operatorname{diag}[x_1, 1]) = \operatorname{diag}[\xi, \eta] = A_1',$$
$$\Phi'(A_2) = \Phi'(\operatorname{diag}[x_2, 1]) = \alpha \cdot \operatorname{diag}[\xi, \eta] = A_2',$$

Значит, $\Phi'^{-1}(\alpha I) = \Phi'^{-1}(A_1' A_2'^{-1}) = \operatorname{diag}[x_1 x_2^{-1}, 1] = \operatorname{diag}[\beta, 1]$, где $1 \neq \beta \in R_+^*$, что невозможно. Таким образом, $\xi_1\eta_1^{-1} \neq \xi_2\eta_2^{-1}$. $\square$

3. Основная теорема

В этом параграфе мы докажем основную теорему.

Лемма 5. *В наших предположениях для $\Phi' \in \operatorname{Aut}(G_2(R))$ такого, что $\Phi'(S) = S$, $\lambda \in R_+$,*

$$\Phi'(B_{12}(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & b_\lambda \\ c_\lambda & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } b_\lambda c_\lambda = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$\Phi'(B_{12}(\lambda)) = \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \in G_2(R).$$

Пусть для каждого $x \in R_+^*$

$$\Phi'(\operatorname{diag}[x, 1]) = \operatorname{diag}[\xi(x), \eta(x)], \quad \xi(x), \eta(x) \in R_+^*.$$

Тогда для любого $x \in (R_+)^*$

$$\Phi'(B_{12}(x\lambda)) = \Phi'(\operatorname{diag}[x, 1] B_{12}(\lambda) \operatorname{diag}[x^{-1}, 1]) =$$
$$= \operatorname{diag}[\xi(x), \eta(x)] \begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda \\ c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix} \operatorname{diag}[\xi(x)^{-1}, \eta(x)^{-1}] =$$
$$= \begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(x) b_\lambda \\ \nu(x)^{-1} c_\lambda & d_\lambda \end{pmatrix}$$

для $\nu(x)=\xi(x)\eta(x)^{-1}$.

По лемме 4 для $x_1\ne x_2$ имеем $\nu(x_1)\ne\nu(x_2)$.

Для каждого $x\in R_+$ $\Phi'(B_{12}(\lambda))$ и $\Phi'(B_{12}(x\lambda))$ коммутируют. Напишем это условие в матричной форме для $x\in(R_+)^*$:

$$\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda\\ c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(x)b_\lambda\\ \nu(x)^{-1}c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(x)b_\lambda\\ \nu(x)^{-1}c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda\\ c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} a_\lambda^2+\frac{b_\lambda c_\lambda}{\nu(x)} & \nu(x)a_\lambda b_\lambda+b_\lambda d_\lambda\\ a_\lambda c_\lambda+\frac{c_\lambda d_\lambda}{\nu(x)} & \nu(x)c_\lambda b_\lambda+d_\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_\lambda^2+\nu(x)b_\lambda c_\lambda & a_\lambda b_\lambda+\nu(x)b_\lambda d_\lambda\\ \frac{a_\lambda c_\lambda}{\nu(x)}+c_\lambda d_\lambda & \frac{b_\lambda c_\lambda}{\nu(x)}+d_\lambda^2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\nu(x)^{-1}b_\lambda c_\lambda=\nu(x)b_\lambda c_\lambda$ для различных $x\in R_+^*$. Так как в том числе $\nu(x)=2$ для некоторого x, то $\frac{3}{2}b_\lambda c_\lambda=0$, откуда $b_\lambda c_\lambda=0$.

Используем условие $(B_{12}(\lambda))^2=\operatorname{diag}[2,1]\cdot B_{12}(\lambda)\cdot\operatorname{diag}[1/2,1]$:

$$\begin{pmatrix} a_\lambda^2 & b_\lambda(a_\lambda+d_\lambda)\\ c_\lambda(a_\lambda+d_\lambda) & d_\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_\lambda & \nu(2)b_\lambda\\ \nu(2)^{-1}c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix},$$

из которого следует $a_\lambda^2=a_\lambda$, $d_\lambda^2=d_\lambda$.

Таким образом,

$$\Phi'(B_{12}(\lambda))=\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda\\ c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix},\ \text{где } a_\lambda^2=a_\lambda, d_\lambda^2=d_\lambda, b_\lambda c_\lambda=0.$$

Вспомним, что эта матрица обратима во всем матричном кольце $M_2(R)$, т.е. существуют (не обязательно неотрицательные) элементы $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ такие, что

$$\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda\\ c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\lambda & b_\lambda\\ c_\lambda & d_\lambda\end{pmatrix}=I.$$

Следовательно, $a_\lambda\alpha+c_\lambda\beta=a_\lambda\alpha+b_\lambda\gamma=1$. Значит, $(a_\lambda\alpha)b_\lambda=b_\lambda$, $(a_\lambda\alpha)c_\lambda=c_\lambda$. Домножая эти равенства на a_λ, мы получаем $a_\lambda b_\lambda=b_\lambda$, $a_\lambda c_\lambda=c_\lambda$. Домножая теперь равенство $a_\lambda\alpha+c_\lambda\beta=1$ на a_λ, мы получим $a_\lambda=1$. Аналогично, $d_\lambda=1$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *Для любых $\lambda,\mu\in R_+$*

$$b_\lambda c_\mu=b_\mu c_\lambda=0.$$

Доказательство. Действительно, произведение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & b_\lambda\\ c_\lambda & 1\end{pmatrix}\ \text{и}\ \begin{pmatrix} 1 & b_\mu\\ c_\mu & 1\end{pmatrix}$$

является образом матрицы $B_{12}(\lambda+\mu)$, поэтому тоже должно иметь единицы на диагонали. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 7. *Существуют такие ортогональные идемпотенты $\theta,1-\theta\in R_+$, что*

$$\Phi'(B_{12}(\theta))=B_{12}(b_1),$$
$$\Phi'(B_{12}(1-\theta))=B_{21}(c_1).$$

Доказательство. Рассмотрим все матрицы группы $G_2(R)$, коммутирующие с $B_{12}(1)$ и сопряженные своему квадрату. Очевидно, что это как раз матрицы $B_{12}(x)$, $x \in R_+$, и только они. Значит, все матрицы, коммутирующие с $\Phi'(B_{12}(1))$ и сопряженные своему квадрату, должны иметь прообраз при автоморфизме Φ' вида $B_{12}(y)$. Заметим, что матрица $B_{12}(b_1)$ коммутирует с $\Phi'(B_{12}(1))$ и сопряжена своему квадрату. Значит, $B_{12}(b_1) = \Phi'(B_{12}(\theta))$. Аналогично, $B_{21}(c_1) = \Phi'(B_{12}(\theta'))$. Так как $B_{12}(b_1)B_{21}(c_1) = \Phi'(B_{12}(1))$, то $\theta + \theta' = 1$. Матрица $B_{12}(c_1) = SB_{21}(c_1)S$ коммутирует с матрицей $B_{12}(b_1)$, откуда следует, что $B_{21}(\theta')$ коммутирует с $B_{12}(\theta)$. Значит, $\theta \cdot \theta' = 0$. Следовательно, θ и $1 - \theta$ являются идемпотентами, что и требовалось. $\square$

Лемма 8. *Существует такая обратимая матрица $M' \in \Gamma_2(R)$, что для автоморфизма $\Phi'' = \Phi_{M'} \circ \Phi'$ выполнены следующие условия*:

1) $\Phi''(S) = S$;
2) *существует такое $\lambda \in R_+$, что $\Phi''(B_{12}(\lambda)) = B_{12}(1)$.*

Доказательство. Заметим, что рассматриваемый нами в предыдущих леммах автоморфизм Φ' удовлетворял только одному условию: $\Phi'(S) = S$. Очевидно, что и обратный автоморфизм ${\Phi'}^{-1}$ удовлетворяет тому же условию, а значит, для него выполняется утверждение леммы 7. Это означает, что существуют элементы $b, c \in R_+$, для которых

$$\Phi'(B_{12}(b)) = B_{12}(\theta),$$
$$\Phi'(B_{12}(c)) = B_{21}(1-\theta),$$

где $\theta, 1-\theta$ — неотрицательные идемпотенты кольца R.

Рассмотрим матрицу

$$M' = \begin{pmatrix} \theta & 1-\theta \\ 1-\theta & \theta \end{pmatrix}.$$

Она обратима (обратна самой себе) и композиция $\Phi'' = \Phi_{M'} \circ \Phi'$ обладает указанным в условии леммы свойством. Лемма доказана. $\square$

Теперь мы можем считать фиксированным автоморфизм Φ'' со свойствами из леммы 8.

Лемма 9. *Для автоморфизма Φ'' и элемента λ из предыдущей леммы выполнены следующие условия*:

1) *λ не является делителем нуля в R_+*;
2) $\Phi''(\operatorname{diag}[2, 1/2]) = \operatorname{diag}[2, 1/2]$.

Доказательство. Благодаря возможности для каждого автоморфизма рассматривать обратный, мы можем считать, что $B_{12}(1)$ переходит в $B_{12}(\lambda)$. Заметим, что централизатор матрицы $B_{12}(1)$ состоит из матриц вида $aB_{12}(b)$, $a \in R_+^*$, $b \in R_+$. Централизатор любой матрицы, коммутирующей с $B_{12}(1)$, обязательно содержит в себе централизатор матрицы $B_{12}(1)$. Понятно, что это свойство должно сохраняться и для образа матрицы $B_{12}(1)$, т. е. для матрицы $B_{12}(\lambda)$. С матрицей $B_{12}(\lambda)$ коммутирует матрица $B_{12}(1)$, значит, их централизаторы должны совпадать. Таким образом, не существует матрицы, не имеющей вид $aB_{12}(b)$ и коммутирующей с $B_{12}(\lambda)$. Однако если существует такое ненулевое $\mu \in R_+$, что $\mu\lambda = 0$, то $B_{21}(\mu)$ и $B_{12}(\lambda)$ коммутируют. Значит, λ не может быть делителем нуля в R_+.

Теперь рассмотрим матрицу $\Phi''(\operatorname{diag}[2,1])$. Это некоторая диагональная матрица $\operatorname{diag}[\alpha,\beta]$. Благодаря свойству

$$\operatorname{diag}[2,1]B_{12}(1)\operatorname{diag}[2,1]^{-1}=B_{12}(1)^2$$

имеем

$$\operatorname{diag}[\alpha,\beta]B_{12}(\lambda)\operatorname{diag}[\alpha,\beta]^{-1}=B_{12}(\lambda)^2,$$

откуда

$$\frac{\alpha\lambda}{\beta}=2\lambda.$$

Так как λ по доказанному не является делителем нуля, то $\alpha=2\beta$. Таким образом, $\Phi''(\operatorname{diag}[2,1])=\operatorname{diag}[2\beta,\beta]$.

Значит,

$$\begin{aligned}\Phi''(\operatorname{diag}[2,1/2])&=\Phi''(\operatorname{diag}[2,1]\cdot(S\operatorname{diag}[2,1]S)^{-1})=\\&=\operatorname{diag}[2\beta,\beta](S\operatorname{diag}[2\beta,\beta]S)^{-1}=\operatorname{diag}[2\beta,\beta]\operatorname{diag}[\beta^{-1},\beta^{-1}/2]=\\&=\operatorname{diag}[2,1/2],\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 10. *Элемент λ, построенный в леммах 8, 9, удовлетворяет условию $\lambda^2=1$.*

Доказательство. В полугруппе $G_2(R)$ выполняется равенство

$$B_{12}(1)B_{21}(1)=\operatorname{diag}[2,1/2]B_{21}(2)B_{12}(1/2).$$

Значит (благодаря доказанному в предыдущей лемме условию $\Phi''(\operatorname{diag}[2,1/2])=\operatorname{diag}[2,1/2]$), имеем

$$B_{12}(\lambda)B_{21}(\lambda)=\operatorname{diag}[2,1/2]B_{21}(2\lambda)B_{12}(\lambda/2),$$

что дает условие $1+\lambda^2=2$, т.е. $\lambda^2=1$. □

Начиная с этого момента, мы будем считать, что полукольцо R_+ порождается своими обратимыми неотрицательными элементами (они могут быть обратимы даже не в полукольце R_+, а только во всем кольце R).

Лемма 11. *Для рассматриваемого автоморфизма Φ'' существуют автоморфизм $\gamma: R_+\to R_+$ полукольца R_+ и гомоморфизм $\beta: R_+^*\to R_+^*$ полугруппы R_+^* всех неотрицательных обратимых элементов кольца R такие, что*

1) $\Phi''(S)=S$;
2) $\Phi''(B_{12}(x))=B_{12}(\lambda\gamma(x))$;
3) $\Phi''(\operatorname{diag}[a,b])=\operatorname{diag}[\gamma(a)\beta(ab),\gamma(b)\beta(ab)]$.

Доказательство. Рассмотрим образ произвольной матрицы $\operatorname{diag}[a,1]$, $a\in R_+^*$. Это некоторая матрица $\operatorname{diag}[\alpha,\beta]$. Обозначим соответствующие отображения $a\mapsto\alpha$ и $a\mapsto\beta$ через $\alpha,\beta: R_+^*\to R_+^*$. Понятно, что оба этих отображения мультипликативны.

По построению

$$\Phi''(\operatorname{diag}[a,b]) = \Phi''(\operatorname{diag}[a,1]\operatorname{diag}[1,b]) = \Phi''(\operatorname{diag}[a,1]S\operatorname{diag}[b,1]S) = \\ = \operatorname{diag}[\alpha(a),\beta(a)]\operatorname{diag}[\beta[b],\alpha(b)] = \operatorname{diag}[\alpha(a)\beta(b),\alpha(b)\beta(a)].$$

Кроме того, нам известно, что для любого $x \in R_+$ $\Phi''(B_{12}(x)) = B_{12}(y)$ для некоторого $y \in R_+$. Обозначим отображение $x \mapsto y/\lambda$ через $\gamma : R_+ \to R_+$. Мы знаем, что

1) отображение γ биективно (так как Φ'' биективно);

2) $\gamma(1) = 1$;

3) γ аддитивно, так как из $B_{12}(x_1 + x_2) = B_{12}(x_1)B_{12}(x_2)$ следует $B_{12}(\lambda\gamma(x_1 + x_2)) = B_{12}(\lambda\gamma(x_1))B_{12}(\lambda\gamma(x_2)) = B_{12}(\lambda(\gamma(x_1) + \gamma(x_2))$.

Пусть $x \in R_+^*$. Тогда имеем

$$\operatorname{diag}[x,x]B_{12}(x) = \operatorname{diag}[x,1]B_{12}(1)\operatorname{diag}[1,x],$$

откуда

$$\operatorname{diag}[\alpha(x)\beta(x),\alpha(x)\beta(x)]B_{12}(\lambda\gamma(x) = \operatorname{diag}[\alpha(x),\beta(x)]B_{12}(\lambda)\operatorname{diag}[\ \beta(x),\alpha(x)],$$

т. е.

$$\alpha(x)\beta(x)\lambda\gamma(x) = \alpha(x)^2\lambda.$$

Следовательно,

$$\gamma(x) = \alpha(x)\beta(x)^{-1}$$

и для каждого элемента $x \in R_+^*$ мы можем теперь писать

$$\Phi''(\operatorname{diag}[x,1]) = \operatorname{diag}[\gamma(x)\beta(x),\beta(x)].$$

Так как отображения α и β мультипликативны, то отображение γ мультипликативно на обратимых (в кольце R) элементах. Так как неотрицательные обратимые элементы кольца R по нашему условию порождают полукольцо R_+, а отображение γ по доказанному аддитивно, то γ мультипликативно на всех элементах полукольца R_+, а значит, является его автоморфизмом.

Таким образом, все пункты леммы доказаны. □

Лемма 12. *На полугруппе $\mathrm{GE}_2^+(R)$ автоморфизм Φ'' является композицией автоморфизма, индуцированного автоморфизмом полукольца R_+, центральной гомотетии и автоморфизма Ψ^ξ, описанного в определении 9.*

Доказательство. Рассмотрим автоморфизм $\Phi''' = \Phi^{\gamma^{-1}} \circ \Phi''$. Пусть $\gamma^{-1}(\lambda) = \xi$. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi'''(S) &= S; \\ \Phi'''(B_{12}(x)) &= \Phi^{\gamma^{-1}}(B_{12}(\lambda\gamma(x))) = B_{12}(\gamma^{-1}(\lambda)x) = B_{12}(\xi); \\ \Phi'''(\operatorname{diag}[a,b]) &= \Phi^{\gamma^{-1}}(\operatorname{diag}[\gamma(a)\beta(ab),\gamma(b)\beta(ab)]) = \\ &= \operatorname{diag}[a\gamma^{-1}\beta(ab), b\gamma^{-1}\beta(ab)]. \end{aligned}$$

Обозначим $\gamma^{-1}\beta$ через μ. Тогда $\Phi'''(\operatorname{diag}[a,b]) = \mu(ab)\operatorname{diag}[a,b]$.

Теперь понятно, что на полугруппе $\mathrm{GE}_n^+(R)$ автоморфизм Φ''' является композицией центральной гомотетии и автоморфизма Ψ^ξ. Мы не приводим подробное доказательство этого факта, потому что полностью аналогичные (и подробные) доказательства проводились в работах [1], [2], [3]. □

Лемма 13. *Для любого $\xi \in R_+^*$ такого, что $\xi^2 = 1$, отображение Ψ^ξ из определения 9 является автоморфизмом полугруппы $\mathrm{GE}_n^+(R)$.*

Доказательство. Заметим, что для доказательства того, что отображение Ψ^ξ является автоморфизмом, достаточно проверить, что если в полугруппе $\mathrm{GE}_n^+(R)$ выполняется некоторое соотношение (в котором участвуют только образующие S, $B_{12}(x)$, $\operatorname{diag}[a,b]$), то данное соотношение имеет место и для образов соответствующих образующих при отображении Ψ^ξ.

Покажем это.

Пусть имеется некоторое произведение образующих. Понятно, что можно считать, что в этом произведении на первом месте стоит матрица S в первой или второй степени, далее некоторая диагональная матрица, а далее произведение матриц $B_{12}(x)$ и $B_{21}(y)$ в чередующемся порядке. Пусть в это произведение входят матрицы $B_{i_1j_1}(x_1),\dots,B_{i_lj_l}(x_l)$, $(i_kj_k) = (1,2)$ или $(2,1)$. Докажем по индукции, что на местах $(1,1)$ и $(2,2)$ в произведении стоят многочлены от переменных $x_1,\dots,x_l$ только с четными степенями одночленов, а на местах $(1,2)$ и $(2,1)$ — только с нечетными.

База индукции при $l = 1$ очевидна. Пусть это верно для некоторого l. Домножим матрицу, являющуюся произведением l рассматриваемых матриц, на еще одну $B_{12}(x)$ или $B_{21}(x)$, например:

$$\begin{pmatrix} p_1(\dots) & p_2(\dots)\\ p_3(\dots) & p_4(\dots)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(\dots) & xp_1(\dots)+p_2(\dots)\\ p_3(\dots) & xp_3(\dots)+p_4(\dots)\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что если у многочленов $p_1(\dots)$ и $p_4(\dots)$ степени всех одночленов были четными, а у многочленов $p_2(\dots)$ и $p_3(\dots)$ — нечетными, то это условие не нарушится в новой матрице. Таким образом, мы доказали нужное свойство.

Теперь предположим, что в полугруппе $\mathrm{GE}_n^+(R)$ есть какое-то нетривиальное соотношение: слева стоит произведение порождающих элементов, где в начале расположена матрица S (если она есть), далее некоторая диагональная матрица, а потом произведение чередующихся элементов $B_{12}(x)$ и $B_{21}(y)$; справа стоит произведение такого же вида. Для начала заметим, что матрица S либо стоит и в левой, и в правой части соотношения, или ни в одной (так как определители у левой и части должны совпадать, в случае отсутствия S в произведении определитель неотрицательный, а в случае присутствия — не положительный). Значит, можно считать, что матрицы S нет ни слева, ни справа. Таким образом, мы имеем (и слева, и справа) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} p_1(x_1,\dots,x_l) & p_2(x_1,\dots,x_l)\\ p_3(x_1,\dots,x_l) & p_4(x_1,\dots,x_l)\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} q_1(y_1,\dots,y_m) & q_2(y_1,\dots,y_m)\\ q_3(y_1,\dots,y_m) & q_4(y_1,\dots,y_m)\end{pmatrix},$$

где у многочленов p_1,q_1,p_4,q_4 все входящие в них одночлены имеют четные степени, а у многочленов p_2,q_2,p_3,q_3 — нечетные.

Так как $\xi^2 = 1$, то при применении отображения Ψ^ξ многочлены p_1,q_1,p_4,q_4 перейдут сами в себя, а многочлены p_2,q_2,p_3,q_3 — соответственно в многочлены

$\xi p_2, \xi q_2, \xi p_3, \xi q_3$. Таким образом, если между матрицами было равенство, то оно не нарушится и в образе. Значит, Ψ^ξ — автоморфизм для любого неотрицательного ξ порядка 2. $\square$

Доказательство основной теоремы. Теперь основная теорема легко следует из леммы 12, если учесть, что переход от изначального автоморфизма Φ к автоморфизму Φ'' происходил с помощью сопряжения матрицей из $\Gamma_n(R)$. Предыдущая лемма была доказана для того, чтобы показать, что отображение Ψ^ξ всегда является автоморфизмом полугруппы $\mathrm{GE}_n^+(R)$. $\square$

Пример 1. Приведем пример кольца, удовлетворяющего всем условиям теоремы и такого, что в нем существуют неединичные неотрицательные элементы порядка два.

Рассмотрим прямую сумму полей $\mathbb{Q}$:

$$R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i, \quad R_i \cong \mathbb{Q},$$

со следующим отношением порядка: элемент кольца R вида $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ считается неотрицательным, если почти все (все, кроме конечного числа) элементы r_i неотрицательны. Тогда это коммутативное частично упорядоченное кольцо, содержащее неотрицательные элементы $1/2$ и $1/3$ (и даже все рациональные числа), и имеющее бесконечное число неотрицательных элементов порядка два (таким элементом будет любая последовательность рациональных чисел, в которой почти все элементы единицы, а остальные - минус единицы), а значит, бесконечное число различных автоморфизмов Ψ^ξ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. В. Михалев, М. А. Шаталова, “Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами”, *Математический сборник*, **81:4** (1970), 600–609.

[2] Е. И. Бунина, А. В. Михалев, “Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **11:2** (2005), 3–23.

[3] Е. И. Бунина, П. П. Семенов, “Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными коммутативными кольцами”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **14:2** (2008), 69–100.

Е. И. Бунина
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: helenbunina@yandex.ru

Поступило

Исправленный вариант