Элементарная эквивалентность

моноидов эндоморфизмов свободных полигонов

Е. И. Бунина, А.В. Михалев

Аннотация.

В данной статье мы изучаем взаимосвязь между элементарной эквивалентностью моноидов эндоморфизмов свободных полигонов над моноидами и эквивалентностью (в логике первого или второго порядка) данных моноидов.

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, теории второго порядка, моноид эндоморфизмов, свободные полигоны над моноидами

Коды УДК: 512.58, 510.67

Введение

В данной работе мы рассматриваем элементарные свойства (т.е. свойства, выразимые в языке первого порядка) моноидов эндоморфизмов свободных полигонов над моноидами.

Первые результаты о связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были получены А.И. Мальцевым в 1961 году в работе [1]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ (где $G = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}$, $n, m \geq 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Изучение этих вопросов было продолжено в 1992 году, когда с помощью конструкции ультрастепени и теоремы об изоморфизме [2] К.И. Бейдар и А.В. Михалев [3] сформулировали общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур, и обобщили теорему Мальцева на случай, когда K и L — тела и ассоциативные кольца.

В 1998–2005 Е.И. Бунина продолжила изучать некоторые проблемы этого типа (см. [4, 5, 6]). Она обобщила результаты А.И. Мальцева для унитарных линейных групп над телами и ассоциативными кольцами с инволюциями, а также для групп Шевалле над полями и локальными коммутативными кольцами.

В 2000 году В. Толстых в [7] установил связь между свойствами второго порядка тел и свойствами первого порядка групп автоморфизмов бесконенчомерных линейных пространств над ними.

В 2003 году (см. [8]) авторы изучали связь между свойствами второго порядка ассоциативных колец и элементарными свойствами категорий модулей, колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов и проективных пространств бесконечного ранга над этими кольцами.

В 2004 году авторами (см. [9]) была установлена связь между элементарной эквивалентностью колец эндоморфизмов абелевых p-групп и эквивалентностью в логике второго порядка этих групп.

В данной статье мы доказываем, что для свободных полигонов A и A' рангов $\varkappa$ и $\varkappa'$ над моноидами S и S' соответственно моноиды эндоморфизмов $\mathrm{End}\, A$ и $\mathrm{End}\, A'$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle S, \varkappa\rangle$ и $\langle S', \varkappa'\rangle$ эквивалентны в некотором специальном ограничении (с помощью кардинальных чисел $\varkappa$ и $\varkappa'$ соответственно) логики второго порядка.

В первый параграф мы поместили необходимые определения и утверждения, касающиеся моноидов, полигонов и категории $Act - S$ (см. книгу [10]).

Второй параграф содержит определение структуры $\langle S, \varkappa\rangle$, состоящей из множества мощности $\varkappa$ без каких-либо отношений и моноида S с обычной операцией умножения, описание логики второго порядка такой структуры, определение ограничения $Th_2^{\varkappa}(\langle S, \varkappa\rangle)$ теории второго порядка такой структуры кардинальным числом $\varkappa$, а также доказательство следующих двух теорем:

Теорема 1. *Если* $S \equiv S'$, *то*

$$\mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_n} S_S\Big) \equiv \mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_n} S'_{S'}\Big).$$

Теорема 2. *Если $\varkappa, \varkappa'$ — бесконечные кардинальные числа,*

$$Th_2^{\varkappa}(\langle S, \varkappa \rangle) = Th_2^{\varkappa'}(\langle S', \varkappa' \rangle),$$

то

$$\mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{\varkappa}} S_S\Big) \equiv \mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{\varkappa'}} S'_{S'}\Big).$$

В третьем параграфе мы переходим (с помощью формул) от моноида эндоморфизмов $\mathrm{End}\, A$ к актегории $Act^A - S$, являющейся подкатегорией в категории $Act - S$ полигонов над моноидом S и состоящей из всех подполигонов полигона A, являющихся его образами при гомоморфизмах, и всех гомоморфизмов между ними. Перейдя к этой категории, мы характеризуем с помощью формул неокторые важные классы полигонов и гомоморфизмов, и доказываем следующие две теоремы (обратные к теоремам 1 и 2):

Теорема 3. *Если*

$$\mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{n}} S_S\Big) \equiv \mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{m}} S'_{S'}\Big),$$

то $n = m$ и $S \equiv S'$.

Теорема 4. *Если $\varkappa, \varkappa'$ — бесконечные кардинальные числа,*

$$\mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{\varkappa}} S_S\Big) \equiv \mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{\varkappa'}} S'_{S'}\Big),$$

то

$$Th_2^{\varkappa}(\langle S, \varkappa \rangle) = Th_2^{\varkappa'}(\langle S', \varkappa' \rangle).$$

Из теорем 1–4 естественно вытекают

Следствие 1.

$$\mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{n}} S_S\Big) \equiv \mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{m}} S'_{S'}\Big),$$

тогда и только тогда, когда $n = m$ и $S \equiv S'$.

Следствие 2. *Если $\varkappa, \varkappa'$ — бесконечные кардинальные числа, то*

$$\mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{\varkappa}} S_S\Big) \equiv \mathrm{End}\Big(\dot{\bigcup_{\varkappa'}} S'_{S'}\Big),$$

тогда и только тогда, когда

$$Th_2^{\varkappa}(\langle S, \varkappa\rangle) = Th_2^{\varkappa'}(\langle S', \varkappa'\rangle).$$

1 Основные определения

Помимо языков первого порядка и их моделей, определение которых можно найти в книге [2], мы будем вынуждены рассматривать языки второго порядка, в которых можно навешивать кванторы на предикатные символы, то есть использовать предикатные символа как переменные. Определение формул такого языка, понятие выводимости в них, модели языков второго порядка, истинность формул второго порядка в соответствующих моделях описаны авторами в работе [9].

Определение 1.1. Полугруппа S с единицей называется *моноидом.*

Определение 1.2. Пусть S — моноид, а $A \neq \emptyset$ — множество. Если имеется отображение $\mu : A \times S \to A$, $(a, s) \mapsto as := \mu(a, s)$, такое, что
(a) $a \cdot 1 = a$;
(b) $a(st) = (as)t$ для $a \in A, s, t \in S$,
то A называется *правым S-полигоном* или *правым полигоном над S* и обозначается через A_S.

Аналогично определяется *левый S-полигон* A, который обозначается через ${}_SA$.

Определение 1.3. Назовем A_S *циклическим S-полигоном*, если $A_S = uS$.

Если мы рассмотрим моноид S как правый полигон S_S над самим собой, то получим $S_S = 1S$.

Определение 1.4. *Категория* $\mathbf{C}$ задается

(1) классом $Obj\,\mathbf{C}$, элементы которого называются *объектами* категории $\mathbf{C}$;

(2) для каждой пары (A, B) объектов из $\mathbf{C}$ множеством $Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$ *морфизмов* из A в B с условием

$$Mor_{\mathbf{C}}(A, B) \cap Mor_{\mathbf{C}}(A', B') = \emptyset, \text{ если } A \neq A' \text{ или } B \neq B';$$

(3) определением композиции морфизмов, т.е. для любой тройки (A, B, C) объектов из $\mathbf{C}$, отображением

$$Mor_{\mathbf{C}}(A, B) \times Mor_{\mathbf{C}}(B, C) \to Mor_{\mathbf{C}}(A, C)$$
$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

таким, что

(а) композиция ассоциативна, т.е. для объектов A, B, C, D в $\mathbf{C}$ и $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathbf{C}}(B, C)$, $h \in Mor_{\mathbf{C}}(C, D)$ имеет место

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f);$$

(б) существуют тождественные отображения, т.е. $\forall A \in Ob\,\mathbf{C}$ существует $1_A \in Mor_{\mathbf{C}}(A, A)$, тождественный морфизм на A, такой, что для любых $f \in Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$, $B \in Ob\,\mathbf{C}$, имеет место

$$f \circ 1_A = 1_B \circ f = f.$$

Класс всех морфизмов категории $\mathbf{C}$ обозначается через $Mor\,\mathbf{C}$.

Мы называем A *областью определения*, а B — *областью значений* для каждого элемента из $Mor_{\mathbf{C}}(A, B)$, и пишем

$$f : A \to B \text{ или } A \stackrel{f}{\to} \text{ для } f \in Mor(A, B).$$

Определение 1.5. Категория $Act - S$ ($S - Act$) правых (левых) полигонов над моноидом S состоит из всех правых (левых) S-полигонов в качестве класса $Ob\,\mathbf{C}$ и всех S-гомоморфизмов в качестве класса морфизмов $Mor\,\mathbf{C}$. S-гомоморфизмом $f : A_S \to B_S$ называется отображение из A_S в B_S такое, что $f(as) = f(a)s$ для любых $a \in A_S$ и $s \in S$.

Определение 1.6. Рассмотрим морфизм $A \xrightarrow{f} B$ в категории $\mathbf{C}$. Тогда

(1) f называется *мономорфизмом*, если $fk = fh \Rightarrow k = h$ для всех $k, h \in Mor(C, A)$. Тогда A называется *подобъектом* в B; *эпиморфизмом*, если $kf = hf \Rightarrow k = h$ для всех $k, h \in Mor(B, D)$. Тогда B называется *факторобъектом* в A.

(2) f называется *коретракцией*, если f обратим слева, т.е. существует $g \in Mor(B, A)$ такой, что $gf = id_A$, A называется *коретрактом* для B; f называется *ретракцией*, если f обратим справа, т.е. существует $g \in Mor(B, A)$ такой, что $fg = id_B$, B называется *ретрактом* для A.

(3) f называется *изоморфизмом*, если он является одновременно ретракцией и коретракцией. В этом случае объекты A и B называются *изоморфными*, $A \cong B$.

Определение 1.7. Пусть $\mathbf{C}$ — категория, I — множество, а $(X_i)_{i \in I}$ — семейство объектов в $\mathbf{C}$. Пара $((u_i)_{i\in I}, C)$ называется *копроизведением* семейства $(X_i)_{i\in I}$ в $\mathbf{C}$, если

(1) $C \in Ob\,\mathbf{C}$ и $u_i \in Mor(X_i, C)$ для любого $i \in I$;

(2) Пара $((u_i)_{i\in I}, C)$ *универсальна* в следующем смысле: для любого объекта $K \in Ob\,\mathbf{C}$ и любого семейства $(k_i \in Mor_{\mathbf{C}}(X_i, K))_{i\in I}$ существует и единственен морфизм $k \in Mor_{\mathbf{C}}(C, K)$ такой, что $ku_i = k_i$ для всех $i \in I$.

Мы пишем $\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ для C, u_i называется *i-й инъекцией*.

Если все $X_i \cong X$ для всех $i \in I$, то мы используем обозначение $\coprod\limits_I X$ вместо $\coprod\limits_{i\in I} X_i$ и называем данный объект *костепенью* объекта X.

В категории $Act - S$ для $I \neq \emptyset$ мы имеем

$$\coprod_{i\in I} X_i = \dot{\bigcup_{i\in I}} X_i,$$

где $\dot{\bigcup\limits_{i\in I}} X_i$ — это непересекающееся объединение $X_i \in Act - S$, $i \in I$, с инъекциями $u_i : X_i \to \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} X_i$, определяемыми как

$$u_i = id_{\dot{\bigcup} X_i}|_{X_i}, \quad i \in I.$$

Предложение 1.1. ([10], стр. 108) *Копроизведение семейства объектов, если оно существует, определено с точностью до изоморфизма.*

Определение 1.8. В категории $\mathbf{C}$ объект $P \in Ob\,\mathbf{C}$ называется *проективным*, если для любого морфизма $f \in Mor_{\mathbf{C}}(P,Y)$ и любого эпиморфизма $\pi \in Mor_{\mathbf{C}}(X,Y)$ существует морфизм $\overline{f} \in Mor_{\mathbf{C}}(X,Y)$ такой, что

$$\pi\overline{f} = f.$$

Определение 1.9. Объект $G \in Ob\,\mathbf{C}$ называется *образующим* (*порождающим*) в категории $\mathbf{C}$, если для любых $X, Y \in Ob\,\mathbf{C}$ и любых $f, g \in Mor_{\mathbf{C}}(X,Y)$ если $f \neq g$, то существует морфизм $\alpha \in Mor_{\mathbf{C}}(G,X)$ такой, что $f\alpha \neq g\alpha$.

Определение 1.10. S-полигон A_S называется *разложимым*, если существует два подполигона $B_S, C_S \subseteq A_S$ такие, что $A_S = B_S \cup C_S$ и $B_S \cap C_S = \emptyset$. В этом случае $A_S = B_S \cup C_S$ называется *разложением* полигона A_S.

В противном случае полигон A_S называется *неразложимым.*

Предложение 1.2. ([10], стр. 66) *Любой циклический полигон $A_S = aS$, $a \in A_S$, неразложим.*

Предложение 1.3. ([10], стр. 66) *Любой S-полигон A_S имеет единственное разложение на неразложимые подполигоны.*

Определение 1.11. Множество U порождающих элементов правого S-полигона A_S называется *базисом* полигона A_S, если любой элемент $a \in A_S$ может быть единственным образом представлен в виде $a = us$, $u \in U$, $s \in S$.

Если полигон A_S имеет базис U, то он называется *свободным полигоном*, или, более точно, $|U|$-*свободным полигоном.*

Предложение 1.4. ([10], стр. 67) *S-полигон A_S свободен тогда и только тогда, когда он изоморфен непересекающемуся объединению полигонов, каждый из которых изморфен S_S, т.е. $A_S \cong \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} A_i$, $A_i \cong S_S$ для всех $i \in I$.*

Предложение 1.5. ([10], стр. 68) *Для любого S-полигона A_S существует свободный правый S-полигон F_S такой, что A_S является эпиморфным образом F_S.*

2 Если моноиды эквивалентны, то и моноиды эндоморфизмов свободных полигонов над ними эквивалентны.

2.1 Свободные полигоны конечного ранга.

Теорема 2.1. *Если моноиды S и S' элементарно эквивалентны, то для конечно порожденных свободных полигонов $A \cong \bigcup\limits_n S_S$ и $A' \cong \bigcup\limits_n S'_{S'}$ моноиды эндоморфизмов* $\operatorname{End} A$ *и* $\operatorname{End} A'$ *элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим полигон $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, где для всех $i = 1, \ldots, n$ $A_i \cong S_S$.

Любой его эндоморфизм $f \in \operatorname{End} A$ полностью определяется образами порождающих элементов $e_1, \ldots, e_n$, где e_i порождает A_i (например, e_i является единицей в $A_i \cong S_S$).

Очевидно, что $f(e_i) = e_{\sigma_i}\xi_i$, $\xi_i \in S$, $\sigma_i \in \{1, \ldots, n\}$, так как любой элемент из A представляется в таком виде. Значит, любой эндоморфизм $f \in \operatorname{End} A$ полностью определяется двумя строками длины n: строкой из натуральных чисел от 1 до n и строкой из n элементов моноида.

Композиция двух эндоморфизмов дает нам композицию строк первого вида и произведение строк второго вида.

Именно, пусть $S \equiv S'$ и мы имеем некоторое предложение φ первого порядка группового языка, которое мы рассматриваем на моноиде $\operatorname{End}(A) \cong \operatorname{End}(\dot{\bigcup\limits_n} S_S)$.

Построим алгоритм, переводящий его в предложение $\widetilde{\varphi}$ первого порядка группового языка таким образом, что

$$\operatorname{End}(A) \vDash \varphi \Longleftrightarrow S \vDash \widetilde{\varphi}.$$

Пусть $\widetilde{\varphi_1 \wedge \varphi_2} = \widetilde{\varphi}_1 \wedge \widetilde{\varphi}_2$ и $\widetilde{\neg\varphi} = \neg\widetilde{\varphi}$. Таким образом, нам остается перевести подформулы $\forall f\, \varphi(f)$, $f = g$ и $f = g \circ h$.

Так как у нас нет натуральных чисел, то нам нужно их каким-то образом "закодировать". Например, мы можем считать, что наш моноид состоит из по крайней мере двух элементов и кодировать число k последовательностью из k единиц в ее начале и $n-k$ неединицы в конце.

Перейдем к переводам:

1) подформулу $\forall f \varphi(f)$ мы переведем в подформулу

$$\forall \xi_1^f \ldots \forall \xi_n^f \forall x_{11}^f \ldots \forall x_{nn}^f$$
$$\bigwedge_{j=1}^{n} \left(x_{j1}^f = 1 \wedge \bigwedge_{i=2}^{n-1} (x_{ji}^f \neq 1 \Rightarrow x_{j,i+1} \neq 1) \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \widetilde{\varphi}(\xi_1^f, \ldots, \xi_n^f, x_{11}^f, \ldots, x_{nn}^f);$$

2) подформулу $f = g$ мы переведем в подформулу

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \xi_i^f = \xi_i^g \right) \wedge \left(\bigwedge_{i,j=1}^{n} ((x_{ij}^f = 1 \wedge x_{ij}^g = 1) \vee (x_{ij}^f \neq 1 \wedge x_{ij}^g \neq 1)) \right);$$

3) посмотрим, в какую формулу нужно перевести подформулу $f = g \circ h$. Если $f = g \circ h$, то для любого $i = \{1, \ldots, n\}$

$$e_{\sigma_i^f} \xi_i^f = f(e_i) = g(h(e_i)) = g(e_{\sigma^h(i)} \xi_i^h) = g(e_{\sigma_i^h}) \xi_i^h = e_{\sigma^g_{\sigma_i^h}} \xi^g_{\sigma_i^h} \xi_i^h.$$

Таким образом, получаем формулу

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \Big(\bigwedge_{j=1}^{n} \Big(x_{i1}^h = 1 \wedge \cdots \wedge x_{ij}^h = 1 \wedge x_{i,j+1}^h \neq 1 \Rightarrow \xi_i^f = \xi_j^f \circ \xi_i^h \wedge$$
$$\wedge \Big(\bigwedge_{k=1}^{n} x_{j1}^g = 1 \wedge \cdots \wedge x_{jk}^g = 1 \wedge x_{j,k+1}^g \neq 1 \Rightarrow x_{i1}^f = 1 \wedge \cdots \wedge x_{ik}^f = 1 \wedge x_{i,k+1}^f \neq 1 \Big) \Big) \Big).$$

Теперь мы видим, что

$$\mathrm{End}\, A \models \varphi \Leftrightarrow S \models \widetilde{\varphi} \Leftrightarrow S' \models \widetilde{\varphi} \Leftrightarrow \mathrm{End}\, A' \models \varphi.$$

$\square$

2.2 Структура $\langle Mon, \varkappa \rangle$.

Рассмотрим структуру $\langle Mon, \varkappa \rangle$, состоящую из некоторого множества мощности $\varkappa$ (без каких-либо отношений) и моноида Mon с обычной операцией умножения $\circ$.

Логика второго порядка этой структуры $L_2(\langle Mon, \varkappa\rangle)$ позволяет использовать в формулах произвольные предикатные символы вида $P_{l,m}$, где l — "местность" предиката P по переменным из $\varkappa$, а m — его "местность" по переменным из моноида Mon.

Таким образом, в формулах данного языка мы можем использовать следующие подформулы:

1. $\forall s \in Mon$ ($\exists s \in Mon$);

2. $\forall i \in \varkappa$ ($\exists i \in \varkappa$);

3. $s_1 = s_2$, $s_1 = s_2 \circ s_3$, где каждая из переменных s_1, s_2, s_3 либо является свободной переменной формулы φ , либо определена в формуле φ ранее (с помощью подформул $\forall s_i \in Mon$ или $\exists s_i \in Mon$);

4. $i_1 = i_2$, где каждая из переменных i_1, i_2 либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ ранее (с помощью подформулы $\forall i \in \varkappa$ или $\exists i \in \varkappa$);

5. $\forall P_{l,m}$, $\exists P_{l,m}$;

6. $P_{l,m}(i_1, \dots, i_l; s_1, \dots, s_m)$, где каждая из переменных $i_1, \dots, i_l$, $s_1, \dots, s_m$, а также "предикативная" переменная $P_{l,m}$ либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ ранее.

Теорией второго порядка модели $\langle Mon, \varkappa\rangle$ ($Th_2(\langle Mon, \varkappa\rangle)$) называется множество всех предложений второго порядка, истинных в данной модели.

Ограничением теории второго порядка модели $\langle Mon, \varkappa\rangle$ *кардинальным числом* μ называется множество всех предложений второго порядка, истинных в данной модели на последовательности, в которой мощность каждого из множеств не превышает μ (точное определение см. в [9]).

2.3 Теорема для полигонов бесконечного ранга.

Теорема 2.2. *Если для моноидов S и S' и бесконечных кардинальных чисел $\varkappa$ и $\varkappa'$*

$$Th_2^{\varkappa}(\langle S, \varkappa\rangle) = Th_2^{\varkappa'}(\langle S', \varkappa'\rangle),$$

то

$$\operatorname{End} A = \operatorname{End}\left(\bigcup_{\varkappa} S_S\right) \equiv \operatorname{End}\left(\bigcup_{\varkappa'} S'_{S'}\right) = \operatorname{End} A'.$$

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме любой эндоморфизм

$f \in \operatorname{End} A$ полигона

$$A = \bigcup_{i \in \varkappa} A_i, \quad A_i \cong S_S,$$

полностью задается набором образов $f(e_i)$, $i \in \varkappa$, где e_i — единица в A_i. Для каждого $i \in \varkappa$ имеем $f(e_i) = e_{\sigma_i}\xi_i$, $\sigma_i \in \varkappa$.

Таким образом, образ $f(e_i)$ для каждого $i \in \varkappa$ есть пара $\xi_i \in S$, $x_i \in \varkappa$, а сам эндоморфизм f полностью задается множеством троек (i, x_i, ξ_i), $i, x_i \in \varkappa$, $\xi_i \in S$, где для каждого $i \in \varkappa$ тройка, соответствующая i, существует и единственна.

Соответственно, взяв предложение φ группового языка первого порядка, переведем его в предложение $\widetilde{\varphi}$ второго порядка языка структуры $\langle Mon, \varkappa \rangle$ таким образом, что

$$\operatorname{End} A \vDash \varphi \Longleftrightarrow \langle S, \varkappa \rangle \vDash \widetilde{\varphi}.$$

1. Подформулу $\forall f \varphi(f)$ преведем в подформулу

$$\forall P^f_{2,1}\big((\forall i \in \varkappa \exists j \in \varkappa \exists s \in S(P^f_{2,1}(i,j;s))) \wedge \\ \wedge \forall i, j, j' \in \varkappa \forall s, s' \in S(P^f_{2,1}(i,j;s) \wedge P^f_{2,1}(i,j';s') \Rightarrow j = j' \wedge s = s')) \Rightarrow \\ \Rightarrow \widetilde{\varphi}(P^f_{2,1})\big).$$

2. Подформулу $f = g$ мы переведем в подформулу

$$\forall i, j \in \varkappa \forall s \in S(P^f_{2,1}(i,j;s) \Leftrightarrow P^g_{2,1}(i,j;s)).$$

3. Подформулу $f = g \circ h$ мы переведем в подформулу

$$\forall i, j \in \varkappa \forall s \in S(P^f_{2,1}(i,j;s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists k \in \varkappa \exists s_1, s_2 \in S(P^h_{2,1}(i,k;s_1) \wedge P^g_{2,1}(k,j;s_2) \wedge s = s_1 \circ s_2)).$$

Аналогично предыдущей теореме заключаем, что $\operatorname{End} A \equiv \operatorname{End} A'$. $\square$

3 Если моноиды эндоморфизмов свободных полигонов эквивалентны, то и сами моноиды эквивалентны.

3.1 Переход от моноида $\operatorname{End} A$ к категории $Act^A - S$.

Пусть мы имеем моноид $\operatorname{End} A = \operatorname{End}\left(\dot{\bigcup\limits_{i\in\varkappa}} A_i\right)$, $A_i \cong S_S$ для всех $i \in \varkappa$.

Мы хотим рассматривать вместо моноида $\operatorname{End} A$ малую категорию $Act^A - S$, объектами которой являются те полигоны категории $Act - S$, которые являются одновременно подполигонами и образами при гомоморфизме полигона A, а морфизмами — гомоморфизмы между ними.

Для того, чтобы можно было произвести такую замену объектов, нам нужно охарактеризовать объекты, морфизмы и операции этой категории элементарными средствами (т.е. формулами первого порядка) только с помощью моноида $\operatorname{End} A$.

Чтобы определить объекты категории $Act^A - S$, разобьем все эндоморфизмы полигона A на классы эквивалентности с помощью отношения эквивалентности $\sim_{Im}$:

$$f \sim_{Im} g \Leftrightarrow \exists h_1, h_2 (f = gh_1 \wedge g = fh_2).$$

Лемма 3.1. *Для любых эндоморфизмов $f, g \in \operatorname{End} A$ имеем $f \sim_{Im} g \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.*

Доказательство. Если $f = gh_1$ для некоторого $h_1 \in \operatorname{End} A$, то $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} g$, поэтому мы видим, что если $f \sim_{Im} g$, то $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} g \wedge \operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$, откуда следует, что $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.

Теперь пусть $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$, т.е. $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Im} g \wedge \operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$. Пусть $\{e_i | i \in \varkappa\}$ — множество порождающих элементов в $\{A_i | i \in \varkappa\}$. Тогда эндоморфизм f полностью определяется образами $f(e_i)$, при этом прообразы $g^{-1}(f(e_i))$ непусты для всех $i \in \varkappa$. Выберем для каждого $i \in \varkappa$ по одному элементу $\lambda_i \in g^{-1}(f(e_i))$ и положим $h_1(e_i) = \lambda_i$. Тогда эндоморфизм будет полностью определен и для каждого $i \in \varkappa$ мы получим $gh_1(e_i) = g(\lambda_i) = f(e_i)$, откуда $f = gh_1$. Второе равенство получаем аналогично. $\square$

Теперь через Ob_f мы можем обозначать класс эквивалентности эндоморфизма f при отношении эквивалентности $\sim_{Im}$ и отождествлять Ob_f с полигоном $\operatorname{Im} f$.

Заметим, что два эндоморфизма $\varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{End} A$ совпадают на подполигоне $\operatorname{Im} f \subset A$ тогда и только тогда, когда

$$\forall f'(f' \sim_{Im} f \Rightarrow \varphi_1 \circ f' = \varphi_2 \circ f').$$

Таким образом, через $Mor(Ob_f, Ob_g)$ мы можем обозначить множество таких эндоморфизмов $\varphi \in \operatorname{End} A$, что $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \operatorname{Im} g$ (т.е. $\exists h(\varphi = gh)$), причем считаем, что два таких эндоморфизма φ и φ' совпадают на Ob_f (обозначаем через $\varphi =_f \varphi'$) тогда и только тогда, когда $\forall f'(f' \sim_{Im} f \Rightarrow \varphi \circ f' = \varphi' \circ f')$.

Таким образом, мы определили класс (в нашем случае множество) объектов, для каждой пары объектов множество морфизмов из одного в другой, композиция морфизмов определяется как умножение элементов моноида $\operatorname{End} A$, поэтому остается только для каждого объекта Ob_f определить тождественный морфизм $1_f \in Mor(Ob_f, Ob_f)$.

Именно,

$$\varphi = 1_f \Leftrightarrow \varphi \in Mor(Ob_f, Ob_f) \wedge \varphi \sim_{Im} f \wedge$$
$$\wedge \forall g(g \sim_{Im} f \Rightarrow \varphi g = g \wedge g\varphi =_f g),$$

что означает, что эндоморфизм φ тождественен на подполигоне $\operatorname{Im} f$.

Таким образом, с помощью моноида $\operatorname{End} A$ мы построили искомую малую категорию $Act^A - S$, причем очевидно, что $\operatorname{End} A \equiv \operatorname{End} A' \Leftrightarrow Act^A - S \equiv Act^{A'} - S'$. Теперь забудем про моноид $\operatorname{End} A$ и будем писать формулы и предложения на языке первого порядка теории категорий, имея в виду категорию $Act^A - S$.

3.2 Элементарная характеризация различных объектов в категории $Act^A - S$.

Следующие три леммы не нужны нам для доказательства основных теорем, но они показывают, что в полученной нами категории можно формульно охарактеризовать некоторые важные классы объектов.

Лемма 3.2. *Для морфизма $\varphi \in Mor(Ob_f, Ob_g)$ формула*

$$Epi(\varphi) := \varphi \circ f \sim_{Im} g$$

выполняется тогда и только тогда, когда φ — эпиморфизм $\operatorname{Im} f$ на $\operatorname{Im} g$.

Доказательство. Это очевидно следует из определения эпиморфизма (определение 1.6 (1)). $\square$

Лемма 3.3. *Формула*

$$Proj(f) := \forall g_1, g_2 \forall \varphi \in Mor(Ob_f, Obg_2) \forall \pi \in Mor(Ob_{g_1}, Ob_{g_2})(Epi(\pi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \overline{\varphi} \in Mor(Ob_f, Ob_{g_1})(\pi \circ \overline{\varphi} = \varphi))$$

выделяет в категории $Act^A - S$ проективные объекты.

Доказательство. Это очевидно следует из определения проективных объектов (определение 1.8). $\square$

Лемма 3.4. *Формула*

$$Gener(f) := \forall g_1, g_2 \forall \varphi_1, \varphi_2 \in Mor(Ob_{g_1}, Ob_{g_2}) \\ (\varphi_1 \neq_{g_1} \varphi_2 \Rightarrow \exists \alpha \in Mor(Ob_f, Ob_{g_1})(\varphi_1 \alpha \neq_f \varphi_2 \alpha))$$

выделяет в категории $Act^A - S$ образующие.

Доказательство. Это очевидно следует из определения образующего (определение 1.9). $\square$

Очевидно, что формула

$$Mon(f) := \forall \varphi_1, \varphi_2 (f\varphi_1 = f\varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2)$$

выделяет в категории $Act^A - S$ мономорфизмы.

Лемма 3.5. *Формула*

$$Decomp(f) := \exists f_1, f_2 \exists \varphi \in Mor(Ob_{f_1}, Ob_f) \\ \exists \psi \in Mor(Ob_{f_2}, Ob_f)(\forall g \forall \mu_1 \in Mor(Ob_{f_1}, Ob_g) \forall \mu_2 \in Mor(Ob_{f_2}, Ob_g) \\ (\exists \mu \in Mor(Ob_f, Ob_g)(\mu\varphi = \mu_1 \wedge \mu\psi = \mu_2)) \wedge (\forall \mu, \mu' \in Mor(Ob_f, Ob_g) \\ (\mu\varphi = \mu_1 \wedge \mu'\varphi = \mu_1 \wedge \mu\psi = \mu_2 \wedge \mu'\psi = \mu_2 \Rightarrow \mu = \mu')))$$

истинна в категории $Act^A - S$ для полигонов Ob_f, которые можно представить в виде $Ob_f \cong Ob_{f_1} \dot{\bigcup} Ob_{f_2}$, и только для них;

формула

$$Undecomp(f) := \neg Decomp(f)$$

истинна в категории $Act^A - S$ для неразложимых полигонов Ob_f, и только для них.

Доказательство. Первая формула является формальной записью того, что полигон Ob_f есть копроизведение полигонов Ob_{f_1} и Ob_{f_2} (см. определение 1.7), но в категории $Act^A - S$ имеем $Ob_{f_1} \coprod Ob_{f_2} = Ob_{f_1} \dot{\bigcup} Ob_{f_2}$, поэтому $Ob_f \cong Ob_{f_1} \dot{\bigcup} Ob_{f_2}$, т.е. полигон Ob_f разложим (см. определение 1.10). Из этого же определения получаем второе утверждение леммы. $\square$

Заметим, что класс тождественного отображения Ob_1 соответствует самому полигону A.

Лемма 3.6. *Формула*

$$Find(f) := \exists g(Ob_1 = Ob_f \bigcup Ob_g) \wedge Undecomp(f)$$

истинна для полигонов $Ob_f = A_i$ (для некоторого $i \in \varkappa$), и только для них.

Доказательство. Мы знаем (см. предложение 1.3, что разложение полигона в объединение непересекающихся компонент единственно, откуда следует, что

$$\dot{\bigcup_{i \in \varkappa}} A_i = Ob_f \dot{\bigcup} Ob_g \Rightarrow Ob_f = \dot{\bigcup_{i \in I}} A_i, \text{ где } I \subset \varkappa.$$

Так как полигон Ob_f неразложим, то $|I| = 1$. $\square$

3.3 Моноиды эндоморфизмов конечно порожденных свободных полигонов.

Теперь мы можем довольно легко доказать основную теорему для конечно порожденных свободных полигонов.

Теорема 3.1. *Если $A \cong \dot{\bigcup_{n}} S_S$, $A' \cong \bigcup_{m} S'_{S'}$, и моноиды эндоморфизмов $\operatorname{End} A$ и $\operatorname{End} A'$ элементарно эквивалентны, то $m = n$ и моноиды S и S' элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Сначала докажем, что $n = m$. Для этого напишем предложение

$$Size'_n := \exists f_1, \ldots, \exists f_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} Find(f_i) \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i,j=1, i\neq j}^{n} \neg (f_i \sim_{Im} f_j) \Big).$$

Очевидно, что это предложение может выполняться только для свободного полигона A, имеющего ранг, не меньший n. Таким образом, предложение

$$Size_n := Size'_n \wedge \neg Size'_{n+1}$$

выполняется для свободных полигонов A ранга n, и только для них.

Теперь мы можем считать, что $n = m$.

Мы уже знаем, что для того, чтобы показать, что $S \equiv S'$, нам достаточно указать алгоритм, переводящий каждое предложение φ группового языка в предложение $\widetilde{\varphi}$ категорного языка таким образом, чтобы

$$S \vDash \varphi \Leftrightarrow Act^A - S \vDash \widetilde{\varphi}.$$

Мы переведем наше предложение φ в предложение

$$\widetilde{\varphi} = \exists f (Find(f) \wedge \widetilde{\varphi}'(f)),$$

где формула $\widetilde{\varphi}'$ получается из предложения φ следующими заменами подформул, входящих в φ:

1) подформула $\forall x(\ldots)$ заменяется на подформулу $\forall \mu_x \in Mor(Ob_f, Ob_f)(\ldots)$;

2) подформула $x = y$ заменяется на подформулу $\mu_x =_f \mu_y$;

3) подформула $x = yz$ заменяется на подформулу $\mu_x =_f \mu_y \mu_z$.

Таким образом, мы рассматриваем предложение φ на моноиде эндоморфизмов некоторого подполигона $A_i \cong S_S$. Так как этот моноид эндоморфизмов изоморфен S_S, то искомый алгоритм построен. $\square$

3.4 Моноиды эндоморфизмов бесконечно порожденных свободных полигонов.

Теорема 3.2. *Если $A \cong \dot{\bigcup\limits_{\varkappa}} S_S$, $A' \cong \bigcup\limits_{\varkappa'} S'_{S'}$, где $\varkappa, \varkappa'$ — некоторые бесконечные кардинальные числа, и моноиды эндоморфизмов* $\operatorname{End} A$ *и* $\operatorname{End} A'$ *элементарно эквивалентны, то*

$$Th_2^{\varkappa}(\langle S, \varkappa \rangle) = Th_2^{\varkappa'}(\langle S', \varkappa' \rangle).$$

Доказательство. Как и раньше, построим алгоритм перевода формул φ языка второго порядка, ограниченного кардинальным числом $\varkappa$, структуры $\langle S, \varkappa \rangle$ в формулы $\widetilde{\varphi}$ языка первого порядка теории категорий так, что

$$\varphi \in Th_2^{\varkappa}(\langle S, \varkappa \rangle) \Leftrightarrow \widetilde{\varphi} \in Th(Act^A - S).$$

Сначала фиксируем некоторый $f \in \operatorname{End} A$ такой, что $\operatorname{Im} f = A_{i_0}$, и будем использовать его во всех переводах.

Именно, переведем предложение φ в предложение

$$\widetilde{\varphi} = \exists f(Find(f) \wedge \widetilde{\varphi}'(f)),$$

где $\widetilde{\varphi}'(f)$ получается из φ следующим образом:

1) подформула $\forall i \in \varkappa(\dots)$ переводится в подформулу

$$\forall f_i(Find(f_i) \Rightarrow \dots),$$

т. е. элементам $i \in \varkappa$ мы ставим в соответствие подполигоны A_i, $i \in \varkappa$.

2) подформула $\forall s \in S$ переводится в подформулу

$$\forall \mu^s \in Mor(Ob_f, Ob_f)(\dots),$$

т.е. элементам моноида S мы ставим в соответствие элементы из $\operatorname{End} A_{i_0} \cong S$.

3) подформула $i = j$ переводится в подформулу

$$f_i \sim_{Im} f_j,$$

что означает, что эндоморфизмы задают один и тот же подполигон A_k, если их образы совпадают с ним.

4) подформула $s = r$ при уже определенных $s, r \in S$ переводится в подформулу

$$\mu_s =_f \mu_r,$$

то есть элементы из $\operatorname{End} A_{i_0}$ совпадают, если они равны на $\operatorname{Im} f = A_{i_0}$.

7) подформула $s = r \circ t$ при уже определенных $s, r, t \in S$ переводится в подформулу

$$\mu_s =_f \mu_r \circ \mu_t.$$

8) Для дальнейших переводов нам требуется одно дополнительное замечание.

Заметим, что в формулах языка $L_2(\langle S, \varkappa\rangle)$ можно обойтись только лишь двухместными предикатными символами следующих двух видов:

а) $P_{2,0}$, являющихся функциями $\varkappa \to \varkappa$;

б) $P_{1,1}$, являющихся функциями $\varkappa \to S$.

Нам понадобится фиксировать эндоморфизм $\lambda \sim_{Im} f$, отображающий изоморфно каждый подполигон A_i, $i \in \varkappa$, в наш фиксированный подполигон A_{i_0}.

Напишем формулу, харктеризующую такие отображения:

$$Sel_f(\lambda) := (\lambda \sim_{Im} f) \wedge \forall g(Find(g) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists h \in Mor(Og_f, Ob_g)(\lambda \circ h =_f 1_{Ob_f})).$$

Теперь перейдем к самим переводам:

а) подформула $\forall P_{2,0}(\dots)$ переводится в подформулу $\forall \lambda_{P_{2,0}}(\dots)$. Мы хотим "закодировать" функцию $P_{2,0} : \varkappa \to \varkappa$ следующим образом. Очевидно, что для любого эндоморфизма $\gamma \in \operatorname{End} A$ для любого $i \in \varkappa$ имеет место включение $\gamma(A_i) \subset A_{\sigma_i}$ для некоторого $\sigma_i \in \varkappa$. Значит, такой эндоморфизм γ задает функцию $\varkappa \to \varkappa$, для которой $i \mapsto \sigma_i$.

Следовательно, подформулу $P_{2,0}(i, j)$ следует перевести в подформулу

$$\operatorname{Im} \gamma_{P_{2,0}}|_{\operatorname{Im} f_i} \subseteq \operatorname{Im} f_j.$$

б) Теперь мы хотим произвести перевод подформулы $\forall P_{1,1}(\dots)$, т.е. "закодировать" функцию $\varkappa \to S$.

Переведем подформулу $\forall P_{1,1}(\dots)$ в подформулу

$$\forall \lambda_{P_{11}} \forall \eta_{P_{11}}(Sel_f(\lambda_{P_{11}}) \wedge \eta_{P_{1,1}} \sim_{Im} f \Rightarrow \dots).$$

Мы хотим сопоставить каждой функции $P : \varkappa \to S$ два эндоморфизма, один из которых (λ_P) отображает каждый подполигон A_i на наш фиксированный подполигон A_{i_0} изоморфно, а другой (η_P) отображает каждый A_i в A_{i_0} некоторым произвольным образом. Такой паре отображений мы можем однозначно сопоставить множество $\{\beta_i | i \in \varkappa\}$ эндоморфизмов полигона A_{i_0} таких, что для любого $i \in \varkappa$ имеет место равенство

$$\eta_P|_{A_i} = \beta_i \circ \lambda_P|_{A_i}.$$

Таким образом, мы построим искомую функцию $P : \varkappa \to \operatorname{End} A_{i_0} \cong S$, для которой $P(i) = \beta_i$.

Соответственно, формулу $P_{1,1}(i, s)$ мы должны перевести в формулу

$$\eta_{P_{1,1}} =_{f_i} \mu_s \circ \lambda_{P_{1,1}}.$$

Таким образом, мы построили искомый алгоритм, из чего и следует утверждение теоремы. □

Список литературы

[1] А. И. Мальцев, "Об элементарных свойствах линейных групп," в: *Проблемы математики и механики*, Новосибирск (1961), 110–132.

[2] Г. Кейслер, Ч.Ч. Чэн, *Теория моделей*, Изд-во "Мир", М., 1977.

[3] C. I. Beidar and A. V. Mikhalev, "On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups," *Contemp. Math.*, **131**, 29–35 (1992).

[4] Е. И. Бунина, "Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами," *Успехи Мат. Наук*, **53**, No. 2, 137–138 (1998).

[5] Е. И. Бунина, "Элементарная эквивалентность групп Шевалле," *Успехи Мат. наук*, **56**, No. 1, 157–158 (2001).

[6] Е.И. Бунина, "Группы Шевалле над полями и их элементарные свойства", *Успехи мат. наук*, **59**, No. 5, 952–953 (2004).

[7] V. Tolstykh, "Elementary equivalence of infinite– dimensional classical groups," *Ann. Pure Appl. Logic*, **105**, 103–156 (2000).

[8] Е.И. Бунина, А.В. Михалев, "Элементарная эквивалентность категорий модулей над кольцами, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей," *Фунд. Прикл. Мат.*, **10**, No. 2, 51–134 (2004).

[9] Е.И. Бунина, А.В. Михалев, "Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп," *Фунд. Прикл. Мат.*, **10**, No. 2, 135–224 (2004).

[10] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories*, Walter de Gruyter. Berlin–New York, (2000).