ЛЕКЦИЯ 10

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОММУТАНТА

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

РАЗРЕШИМОСТЬ ГРУППЫ ВЕРХНИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОММУТАНТА

Напомним определение коммутанта $G' = [G, G]$ группы G:

$$G' = [G, G] = \langle [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy \mid x, y \in G \rangle,$$

т. е. коммутант — это подгруппа группы G, порожденная всеми коммутаторами.

Поскольку $[x, y]^{-1} = [y, x]$, коммутант G' совпадает с совокупностью всех конечных произведений коммутаторов.

Лемма 1. *Коммутант G' — нормальная подгруппа группы G.*

Фактор-группа $G/G' = G^{\mathrm{ab}}$ — абелева группа, обладающая следующими универсальным свойством (здесь $\pi = \pi_{G'} : G \to G/G'$ — канонический гомоморфизм, при котором $\pi(g) = gG'$): для всякого гомоморфизма f из группы G в абелеву группу A существует и единственный гомоморфизм $f' : G/G' \to A$, для которого $f = f'\pi$.

Доказательство. Так как для $x, y \in G$ имеем $f([x, y]) = [f(x), f(y)] = e_A$ (f — гомоморфизм групп, A — коммутативная группа), то $f(G') = e_A$, т. е. $G' = \ker \pi \subseteq \ker f$. Полагая $f'(gG') = f(g)$, видим, что:

1) это отображение определено корректно

$$\begin{aligned}(gG' = hG' \implies g^{-1}h \in G' \subseteq \ker f \Rightarrow \\ \Rightarrow f(g)^{-1}f(h) = f(g^{-1})f(h) = f(g^{-1}h) = e_A \implies f(g) = f(h));\end{aligned}$$

2) $f'(gG'hG') = f'(ghG') = f(gh) = f(g)f(h) = f'(gG')f'(hG')$ т. е. f' — гомоморфизм групп;

3) ясно, что $f = f'\pi$, поскольку $f'\pi(g) = f'(gG') = f(g)$ для всех $g \in G$. Это соображение — одна из форм теоремы о гомоморфизме (теорема о факторизации). □

Следствие 1. *Коммутант группы G — это наименьшая нормальная подгруппа в G, фактор по которой абелев.*

ПРИМЕРЫ КОММУТАНТОВ

Пример 1. Коммутант группы $\mathbf{S}_n$ — это группа $\mathbf{A}_n$ для любого $n \geq 2$.

Доказательство. Действительно, коммутатор любых двух подстановок является четной подстановкой, поэтому $\mathbf{S}_n' \subseteq \mathbf{A}_n$. С другой стороны, мы показывали выше, что любой цикл длины три является коммутатором:

$$(ijk) = (jk)(ik)(jk)(ij) = [(jk), (ij)],$$

а циклы длины три порождают $\mathbf{A}_n$. □

Пример 2. Коммутант группы $\mathbf{A}_n$ равен:
— $\{e\}$ при $n \leq 3$;
— $\mathbf{V}_4$ при $n = 4$;
— $\mathbf{A}_n$ при $n \geq 5$.

Пример 3. Коммутант группы кватернионов $\mathbb{Q}_8$ — это ее центр $\{\pm 1]$.

Доказательство. Действительно, центр группы $\mathbb{Q}_8$ является нормальной подгруппой, фактор по которой абелев (так как состоит из четырех элементов).

С другой стороны, коммутант не может быть меньше центра, так как группа $\mathbb{Q}_8$ не является абелевой. □

Пример 4. Коммутант группы движений "четноугольника" $\mathbf{D}_{2k} = \langle a, b \mid a^{2k} = b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$ — это подгруппа $\langle a^2 \rangle$.

Доказательство. Так как
$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = a^2,$$
то $\langle a^2\rangle \subseteq \mathbf{D}'_{2k}$. Значит, искомый коммутант не меньше, чем $\langle a^2\rangle$.

С другой стороны, данная подгруппа нормальна (простая проверка), фактор-группа содержит четыре элемента, т.е. абелева. Значит, это коммутант. $\square$

Упражнение 1. Найдите коммутант правильного "нечетноугольника" $\mathbf{D}_{2n+1}$.

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Название этого класса групп восходит к эпохе Абеля, Галуа и др. Задача о решении алгебраических уравнений в радикалах привела к понятию разрешимой группы.

Рассмотрим следующий ряд подгрупп группы G, называемый *производным рядом коммутантов*:
$$G \supseteq G' \supseteq G'' = [G', G'] \supseteq \ldots \supseteq G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \supseteq \ldots$$
(каждая следующая подгруппа $G^{(i)}$ является коммутантом
$$[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$$
предыдущей подгруппы $G^{(i-1)}$).

Замечание 1.

1) Если $f\colon G \to H$ — гомоморфизм групп, то $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$, и поэтому $f(G') \subseteq H'$. Следовательно, $f(G'') \subseteq H''$, и далее $f(G^{(i)}) \subseteq H^{(i)}$.

2) Если $g \in G$, $f\colon G \to G$, $f(x) = g^{-1}xg$ для $x \in G$, — внутренний автоморфизм, то, применяя 1), видим, что $g^{-1}G^{(i)}g \subseteq G^{i}$, т. е. $G^{(i)} \lhd G$ (все подгруппы $G^{(i)}$ производного ряда нормальны в G).

Определение 1. Группа G называется *разрешимой* (класса не выше чем i), если $G^{(i)} = \{e\}$ для некоторого i.

Замечание 2.

1) Если G — абелева группа, то $G' = \{e\}$, поэтому группа G разрешимая.

2) Простая группа G, $G \neq \{e\}$, разрешима в том и только в том случае, когда $|G|$ — простое число (G — циклическая группа простого порядка).

3) Группы $\mathbf{S}_n$ и $\mathbf{A}_n$ разрешимы при $n \leq 4$ и не являются разрешимыми при $n \geq 5$.

4) Группа диэдра $\mathbf{D}_{2n}$ разрешима.

5) Группа кватернионов $\mathbb{Q}_8$ разрешима.

СВОЙСТВА РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Лемма 2. *Если G — разрешимая группа (класса не выше чем i) и H — подгруппа группы G, то H — разрешимая группа (класса не выше чем i).*

Доказательство. Так как $G^{(k)} \supseteq H^{(k)}$, то $\{e\} = G^{(i)} \supseteq H^{(i)}$, т. е. $H^{(i)} = \{e\}$. □

Лемма 3. *Если $f\colon G \to H$ — сюръективный гомоморфизм и G — разрешимая группа (класса не выше чем i), то $H = f(G)$ также разрешимая группа (класса не выше чем i).*

Доказательство. Так как $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ и f — сюръективный гомоморфизм, то $f(G') = H'$, а поэтому $H^{(i)} = f(G^{(i)}) = \{e_H\}$. $\square$

Следствие 2. *Если G — разрешимая группа (класса не выше чем i) и $N \lhd G$, то фактор-группа G/N — разрешимая группа (класса не выше чем i).*

Доказательство. Рассмотрим канонический сюръективный гомоморфизм $\pi_N \colon G \to G/N$. $\square$

Теорема 1. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда в группе G существует субнормальная цепь подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_{i-1} \supset G_i \supset \ldots \supset G_r = \{e\}$$

(это означает, что $G_{i+1} \lhd G_i$ для всех i) с абелевыми фактор-группами G_{i-1}/G_i для всех i.

Доказательство.

1) Допустим, что группа G разрешимая. Рассмотрим цепь нормальных подгрупп коммутантов (производный ряд коммутантов)

$$G \supset G' \supset G'' \supset \ldots \supset G^{(i)} = \{e\}.$$

Тогда $G^{(i-1)}/G^{(i)} = G^{(i-1)}/[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ — абелева группа для всех i.

2) Допустим, что существует указанная субнормальная цепь подгрупп с абелевыми факторами. Так как G_0/G_1 — коммутативная группа, то $G' \subseteq G_1$. Далее, $G'' = [G', G'] \subseteq [G_1, G_1] \subseteq G_2$, поскольку G_1/G_2 — абелева группа. Таким образом, $G^{(i)} \subseteq G_i$ для всех i, и поэтому $G^{(r)} \subseteq G_r = \{e\}$, т. е. G — разрешимая группа (класса не выше чем r). $\square$

Следствие 3. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то G — разрешимая группа тогда и только тогда, когда N и G/N — разрешимые группы.*

Доказательство.

1) Если G — разрешимая группа, то, как мы уже доказали, N и G/N — разрешимые группы.

2) Допустим, что N и $G/N = \bar{G}$ — разрешимые группы. Тогда существуют субнормальные цепи с абелевыми фактор-группами:

$$N = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supseteq N_r = \{e\}, \quad N_{i-1}/N_i \text{ — абелева группа},$$
$$G/N = \bar{G} = \bar{G}_0 \supset \bar{G}_1 \supset \ldots \supset \bar{G}_s = \{\bar{e}\}, \quad \bar{G}_{i-1}/\bar{G}_i \text{ — абелева группа}.$$

Из строения и свойств подгрупп фактор-группы следует, что $\bar{G}_i = G_i/N$, $N \subseteq G_i \subseteq G$, $G_{i-1} \rhd G_i$, $\bar{G}_{i-1}/\bar{G}_i = (G_{i-1}/N)/(G_i/N) \cong G_{i-1}/G_i$ — абелева группа. Таким образом,

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s = N = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_r = \{e\} \text{ —}$$

субнормальная цепь в группе G с абелевыми фактор-группами, т. е. G — разрешимая группа. $\square$

Упражнение 2. Любая конечная группа из менее чем 60 элементов разрешима.

Упражнение 3. Если $|G| = p^2 q$, $q \neq p$, то G — разрешимая группа.

Замечание 3. Теорема Бернсайда (1904 г.) утверждает, что если p и q — различные простые числа, то любая группа порядка $p^m q^n$ разрешима $(m, n \geq 0)$.

РАЗРЕШИМОСТЬ ГРУППЫ ВЕРХНИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Теорема 2. *Группа треугольных матриц* $G = \mathbf{T}_n(K)$ *над полем* K *(т. е. треугольных матриц вида*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$0 \neq a_{ii} \in K$*) является разрешимой группой.*

Доказательство.

1) Рассмотрим унитреугольную подгруппу $H = \mathbf{U}T_n(K)$ матриц вида

$$B = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении треугольных матриц их соответствующие диагональные элементы перемножаются, поэтому в матрице $A^{-1}BA$ на (i,i)-м месте стоит $a_{ii}^{-1}1a_{ii} = 1$, т. е. $A^{-1}BA \in H$, и поэтому H — нормальная подгруппа в G, $H \lhd G$. Это же соображение показывает, что $[G,G] \subseteq H$, поскольку для $A, D \in \mathbf{T}_n(K)$ в коммутаторе $[A,D]$ на месте (i,i) стоит элемент $a_{ii}^{-1}d_{ii}^{-1}a_{ii}d_{ii} = 1$, т. е. $[A,D] \in H$. Поэтому фактор-группа G/H абелева и, следовательно, разрешимая.

2) Докажем индукцией по n, что $H = H_n$ — разрешимая группа. Рассмотрим отображение

$$H_n = \mathbf{U}T_n(K) \xrightarrow{f} \mathbf{U}T_{n-1}(K) = H_{n-1},$$

при котором если

$$B = \begin{pmatrix} B' & * \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $f(B) = B'$. Так как для $x, y \in \hat{K}^{n-1}$, $B', C' \in \mathbf{U}T_{n-1}(K)$ имеем

$$\begin{pmatrix} B' & x \\ 0\dots0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C' & y \\ 0\dots0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'C' & B'y + x \\ 0\dots0 & 1 \end{pmatrix},$$

то f — сюръективный гомоморфизм групп, при этом

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} E_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \hat{K}^{n-1} \right\}.$$

Тогда $\ker f \lhd \mathbf{U}T_n(K)$ (как ядро гомоморфизма f) и

$$\mathbf{U}T_n(K)/\ker f \cong \mathbf{U}T_{n-1}(K)$$

(в силу теоремы о гомоморфизме). Но $\ker f$ — абелева группа, и следовательно, разрешимая группа. По индуктивному предположению $\mathbf{U}T_{n-1}(K)$ — разрешимая группа. Тогда и группа $H = H_n$ разрешимая.

3) Так как $H = \mathbf{U}T_n(K)$ — разрешимая группа и G/H — разрешимая группа, то $G = \mathbf{T}_n(K)$ — разрешимая группа. $\square$