

ЛЕКЦИЯ 17

ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В ассоциативной алгебре A с единицей размерности n над полем K каждый элемент является корнем многочлена $\mu_a \in K[x]$ степени $\leq n$.

Элемент $a \in A$ обратим тогда и только тогда, когда $\mu_a(0) \neq 0$.

Если в A нет делителей нуля, то A — алгебра с делением. Если к тому же поле K алгебраически замкнуто, то $n = 1$ и $A = K$.

ТЕОРЕМА 1 (ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА). Над полем \mathbb{R} существует только три конечномерные ассоциативные алгебры с делением: \mathbb{R} , \mathbb{C} и \mathbb{H} .

Доказательство. Сначала исследуем аддитивную структуру алгебры с делением A .

Как мы видели, у каждого элемента из A есть некоторый минимальный аннулирующий многочлен $\mu_a(t)$, из рассуждений прошлого предложения видно, что он обязательно неприводим.

Так как многочлены мы рассматриваем над полем \mathbb{R} , то неприводимые многочлены имеют вид

$$\mu_a(t) = t - \alpha,$$

либо

$$\mu_a(t) = t^2 - 2\alpha t + \beta,$$

где

$$\alpha^2 < \beta.$$

В первом случае $a \in \mathbb{R}$. Если это не так, то положим $b = a - \alpha$, получим тогда

$$\mu_b(t) = t^2 + (\beta - \alpha^2).$$

Значит, каждый элемент алгебры A имеет вид $\alpha + y$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $y = 0$ или $y^2 = \gamma < 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Для дальнейшего доказательства нам понадобится лемма.

ЛЕММА 1. *Подмножество*

$$A' = \{u \in A \mid u^2 \in \mathbb{R}, u^2 \leq 0\}$$

является векторным подпространством в A .

Теперь мы можем перейти к доказательству самой теоремы.

Для $u \in A'$ запишем

$$u^2 = -q(u),$$

где $q(u) \in \mathbb{R}_+$.

Кроме того, $q(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. Очевидно, что

$$q(\alpha u) = \alpha^2 q(u)$$

и

$$f(u, v) := q(u + v) - q(u) - q(v) = -(uv + vu)$$

— симметричная билинейная форма на A , отвечающая положительно определенной квадратичной форме q .

Если $A = \mathbb{R}$, то рассуждения заканчиваются.

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $A' \neq 0$ и мы можем выбрать вектор $\mathbf{i} \in A$, для которого $q(\mathbf{i}) = 1$, т.е. $\mathbf{i}^2 = -1$.

С точностью до изоморфизма получаем равенство

$$\mathbb{R}[\mathbf{i}] = \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}\mathbf{i}.$$

Если $A = \mathbb{C}$, то наши рассуждения заканчиваются.

Теперь предположим, что A — шире, чем комплексные числа (как мы видели, мы можем считать, что $\mathbb{C} \subset A$).

В этом случае A' — шире, чем $\mathbb{R}\mathbf{i}$, поэтому можно выбрать элемент $\mathbf{j} \perp \mathbb{R}\mathbf{i}$, $q(\mathbf{j}) = 1$.

В этом случае $\mathbf{j}^2 = -1$ и $\mathbf{ij} + \mathbf{ji} = -f(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0$, т.е. $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$. Полагая $\mathbf{k} = \mathbf{ij}$, получим $\mathbf{k}^2 = -1$, $\mathbf{ik} + \mathbf{ki} = 0 = \mathbf{jk} + \mathbf{kj}$.

Следовательно, $\mathbf{k} \in A'$ и $\mathbf{k} \perp \mathbf{i}, \mathbf{j}$. Значит, $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ линейно независимы и

$$\mathbb{R} + \mathbb{R}\mathbf{i} + \mathbb{R}\mathbf{j} + \mathbb{R}\mathbf{k} = \mathbb{H}$$

— алгебра кватернионов.

Если A шире, чем алгебра кватернионов, то существует $\mathbf{l} \in A'$ такое, что $q(\mathbf{l}) = 1$ и $\mathbf{l} \perp \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Другими словами,

$$\mathbf{l}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{l}, \quad \mathbf{l}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{l}, \quad \mathbf{l}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{l}.$$

Однако в силу ассоциативности умножения в A первые два соотношения дают

$$\mathbf{l}\mathbf{k} = \mathbf{l}(\mathbf{i}\mathbf{j}) = (\mathbf{l}\mathbf{i})\mathbf{j} = -(\mathbf{i}\mathbf{l})\mathbf{j} = -\mathbf{i}(\mathbf{l}\mathbf{j}) = \mathbf{i}(\mathbf{j}\mathbf{l}) = (\mathbf{i}\mathbf{j})\mathbf{l} = \mathbf{k}\mathbf{l}.$$

Получается противоречие. Значит,

$$A = \mathbb{H}.$$

□

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП: ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G — группа, \mathbb{F} — поле. Тогда любой гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) = \mathrm{GL}(V)$ называется *n -мерным представлением группы G над полем \mathbb{F}* . Если поле \mathbb{F} — это поле комплексных чисел, то представление называется *комплексным*. Если ядро гомоморфизма φ тривиально, то представление называется *точным*.

ПРИМЕР 1. Для группы $G = \mathbf{S}_n$ и любого поля \mathbb{F} можно рассмотреть точное n -мерное представление этой группы, при котором подстановка σ переходит в матрицу

$$(\delta_{i\sigma(i)}).$$

ПРИМЕР 2. Группа $SL_n(\mathbb{F})$ имеет n -мерное точное представление над полем \mathbb{F} , при котором каждая матрица переходит тождественно в себя.

ПРИМЕР 3. Произвольная конечная циклическая группа \mathbf{Z}_n имеет ровно n разных комплексных одномерных представлений: образующий переходит в корень n -й степени из единицы.

ПРИМЕР 4. Построим двухмерное точное представление группы кватернионов \mathbb{Q}_8 :

$$\begin{aligned}\pm 1 &\mapsto \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}; \\ \pm \mathbf{i} &\mapsto \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \\ \pm \mathbf{j} &\mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \pm \mathbf{k} &\mapsto \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\varphi : G \rightarrow GL(V)$ — некоторое конечномерное представление группы G . Подпространство U пространства V называется *инвариантным для представления φ* , если для любого $g \in G$ подпространство U является инвариантным для оператора $\varphi(g)$.

ПРИМЕР 5. Если рассматривать представление их первого примера (представление группы \mathbf{S}_n мономиальными матрицами), то инвариантным подпространством является прямая, натянутая на вектор $e_1 + e_2 + \dots + e_n$. Действительно, так образ любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_n$ переставляет базисные векторы соответственно данной подстановке, то

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma)(e_1 + \dots + e_n) &= e_{\sigma(1)} + \dots + e_{\sigma(n)} = \\ &= e_1 + e_2 + \dots + e_n. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 6. Рассмотрим теперь представление группы \mathbb{Q}_8 из четвертого примера.

Предположим, что у этого представления есть нетривиальное (не равное 0 и всему пространству V) представление. Так как все представление двумерно, то данное инвариантное пространство должно быть одномерным, то есть его векторы — собственные для всех образов $\varphi(g)$, $g \in \mathbb{Q}_8$.

У оператора $\varphi(i) = \text{diag}[i, -i]$ собственные прямые — это только $\langle e_1 \rangle$ и $\langle e_2 \rangle$. Однако обе эти прямые не являются инвариантными для оператора

$$\varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, у данного представления есть только тривиальные инвариантные подпространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если у представления $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ есть нетривиальное инвариантное подпространство, то оно называется *приводимым*. В противном случае представление φ называется *неприводимым*. Представление называется *вполне приводимым*, если пространство V раскладывается в прямую сумму инвариантных относительно φ подпространств, на которых φ является неприводимым (т. е. представление φ является прямой суммой неприводимых представлений).

ПРИМЕР 7. Любое одномерное представление группы неприводимо. Как мы видели выше, приведенное двухмерное представление группы \mathbb{Q}_8 неприводимо.

Примером приводимого представления может служить двухмерное представление группы целых чисел \mathbb{Z} , при котором

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вполне приводимое представление группы \mathbb{Z}_4 :

$$k \mapsto \begin{pmatrix} i^k & 0 \\ 0 & -i^k \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Два линейных представления

$$\varphi : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(K) \text{ и } \psi : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(K)$$

называются *эквивалентными* (изоморфными, подобными), если существует невырожденное линейное отображение $C \in \mathrm{GL}_n(K)$ такое, что

$$\varphi \circ A = A \circ \psi.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Отношение эквивалентности представлений действительно является отношением эквивалентности.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если группа G абелева, а поле \mathbb{F} алгебраически замкнуто, то неприводимыми над \mathbb{F} представлениями группы G являются только одномерные представления.

Доказательство. Так как группа G абелева, то все операторы $\varphi(g)$, $g \in G$ коммутируют.

Однако множество коммутирующих операторов всегда имеет общий собственный вектор, то есть у данного представления (если оно не одномерно) есть собственная инвариантная прямая.

Таким образом, лишь одномерные представления могут быть неприводимыми.

На всякий случай напомним, как доказывается, что у множества коммутирующих операторов есть общий собственный вектор.

Если два оператора A и B коммутируют, поле \mathbb{F} алгебраически замкнуто, рассмотрим некоторое собственное подпространство V_λ^A оператора A с собственным значением λ .

Рассмотрим некоторый вектор $v \in V_\lambda^A$.

Тогда

$$BA(v) = B(\lambda \cdot v) = \lambda B(v) = A(B(v)).$$

Таким образом,

$$B(v) \in V_\lambda^A,$$

то есть подпространство V_λ^A — инвариантно и для оператора B .

Значит, у оператора B на этом подпространстве есть собственный вектор u , который автоматически окажется собственным и для A .

Для произвольного множества векторов доказательство аналогично. \square

ПРИМЕР 8. Над полем \mathbb{R} действительных чисел утверждение предыдущего предложения не будет выполняться: у абелевой группы \mathbb{Z}_n ($n > 2$) можно рассмотреть двухмерное представление, при котором

$$k \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi/n & \sin 2\pi/n \\ -\sin 2\pi/n & \cos 2\pi/n \end{pmatrix}.$$

Это представление, очевидно, будет неприводимо.

Опишем теперь все неэквивалентные неприводимые представления конечно порожденной абелевой группы A над полем комплексных чисел.

Как мы уже знаем, все они одномерны.

При этом группа A раскладывается в прямую сумму конечных и бесконечных циклических групп.

Пусть, для определенности,

$$A = \bigoplus_k \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_m}.$$

Обозначим образующие бесконечных циклических групп через a_1, \dots, a_k , а образующие групп $\mathbb{Z}_{n_1}, \dots, \mathbb{Z}_{n_m}$ — через b_1, \dots, b_m .

Понятно, что нам требуется построить все различные гомоморфизмы из группы A в группу \mathbb{C}^* .

Для этого нужно задать гомоморфизм на образующих.

Образующие a_1, \dots, a_k переводятся в произвольные элементы группы \mathbb{C}^* , а элементы b_1, \dots, b_m должны при гомоморфизме переходить в корни их единицы степеней n_1, \dots, n_m , соответственно (n_i вариантов для каждого b_i).

Далее отображение однозначно продолжается до гомоморфизма.

Заметим в скобках, что если группа A была конечна, то у нее будет ровно $|A|$ различных комплексных неприводимых представлений.

ЛЕММА 2. *Для любого одномерного представления φ группы G (над произвольным полем) коммутант группы G содержится в ядре φ .*

Доказательство. Так как группа \mathbb{C}^* абелева, то одномерное представление группы G — это гомоморфизм из некоторой группы в абелеву группу. Как мы знаем, в этом случае ядро гомоморфизма содержит коммутант. \square

Таким образом, чтобы построить все одномерные представления группы G , нужно рассмотреть группу A — фактор группы G по ее коммутанту и построить все одномерные представления этой абелевой группы, что мы уже умеем делать.