ЛЕКЦИЯ 18

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

ТЕОРЕМА МАШКЕ

ЛЕММА ШУРА

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Определение 1. Квадратная комплексная матрица A называется *унитарной*, если $AA^* = E$, где $A^* = \overline{A^T}$. Представление $\varphi : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ называется *унитарным*, если для любого элемента $g \in G$ матрица $\varphi(g)$ унитарна.

Предложение 1. *Пусть на пространстве $V = \mathbb{C}^n$ представления $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ конечной группы G задана некоторая эрмитова (полуторалинейная положительно определенная) форма (u, v). Рассмотрим форму $(u|v)$, получающуюся из (u, v) "усреднением" по G:*

$$(u|v) := |G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g)u, \varphi(g)v).$$

Тогда форма $(u|v)$ также является эрмитовой.

Доказательство. Очевидно, что данная форма полуторалинейна. Докажем ее положительную определенность. Действительно,

$$(u|u) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g)u, \varphi(g)u) > 0.$$

□

Предложение 2. *Всякое линейное комплексное представление конечной группы эквивалентно унитарному представлению.*

Доказательство. Рассмотрим на пространстве V представления φ форму из предыдущего предложения. Нам нужно только доказать, что каждая матрица $\varphi(g)$, $g \in G$, унитарна. Унитарная матрица — это такая, которая сохраняет длины векторов в комплексном пространстве, поэтому нам нужно доказать, что матрица $\varphi(g)$ сохраняет длину любого вектора, т. е. сохраняет его скалярный квадрат. Иначе говоря,

$$(\varphi(g_0)u|\varphi(g_0)u) = (u|u).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(\varphi(g_0)u|\varphi(g_0)u) = |G|^{-1}\sum_{g\in G}(\varphi(g)\varphi(g_0)u, \varphi(g)\varphi(g_0)u) = \\ = |G|^{-1}\sum_{g\in G}(\varphi(gg_0)u, \varphi(gg_0)u) = \\ = |G|^{-1}\sum_{h\in G}(\varphi(h)u, \varphi(h)u) = (u|u).\end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА МАШКЕ

Теорема 1 (теорема Машке, легкий вариант). *Каждое линейное комплексное представление конечной группы G вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть у пространства V представления φ есть инвариантное подпространство U. Благодаря предыдущему предложению мы можем считать представление унитарным. Тогда рассмотрим подпространство $U^{\perp}$.

Из курса линейной алгебры мы знаем, что

$$V = U \oplus U^{\perp}.$$

Значит, нам остается только доказать, что $U^{\perp}$ также инвариантно.

Пусть $v \in U^{\perp}$, тогда $(u|v) = 0$ для всех $u \in U$. Рассмотрим $u \in U$ и

$$(u|\varphi(g)v) = (\varphi(g^{-1})u|v) = 0.$$

Значит, $\varphi(g)v$ ортогонально любому $u \in U$, т.е. $\varphi(g)v \in U^{\perp}$.

Таким образом, $U^{\perp}$ инвариантно.

Далее мы можем естественным образом воспользоваться индукцией по размерности пространства представления. □

Теорема 2 (теорема Машке, общий случай). *Каждое линейное представление конечной группы G над полем K характеристики, не делящей $|G|$ (в частности, нулевой), вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть U — инвариантное относительно φ подпространство во всем пространстве представления V.

Рассмотрим прямую сумму

$$V = U \oplus U',$$

где U' — произвольным образом выбранное дополнение к U. Вообще говоря, U' не является φ-инвариантным.

Возьмем оператор проектирования $\rho : V \to U'$, определенный соотношением

$$\rho v = u$$

для всякого вектора $v = u + u'$. Имеем

$$v - \rho v \in U, \quad \rho(U) = 0, \quad \rho^2 = \rho.$$

Возьмем теперь "усредненный" линейный операто

$$\rho_G = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})$$

(деление на $|G|$ по условию возможно).

Покажем, что

$$\varphi(g)\rho_G = \rho_G\varphi(g)$$

для всех $g \in G$.

Действительно,

$$\varphi(g)\rho_G\varphi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi(g)\varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})\varphi(g^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi(gh)\rho\varphi((gh)^{-1}) =$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\varphi(t)\rho\varphi(t^{-1}) = \rho_G,$$

что и приводит к искомому равенству.

Теперь положим

$$W = \rho_G(V) = \{\rho_G v \mid v \in V\}.$$

Благодаря соотношению

$$\varphi(g)\rho_G = \rho_G\varphi(g)$$

имеем

$$\varphi(g)w = \varphi(g)\rho_G v = \rho_G\varphi(g)v = \rho_G v' = w' \in W$$

для всякого $w \in W$, так что векторное подпространство $W \subset V$ также является φ-инвариантным подпространством.

Осталось показать, что $V = U \oplus W$ — прямая сумма подпространств.

Так как

$$\varphi(h^{-1})v - \rho\varphi(h^{-1})v \in U,$$

то

$$v - \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})v =$$
$$= \varphi(h)\left(\varphi(h^{-1})v - \rho\varphi(h^{-1})v\right) \in \varphi(h)U = U$$

(применяем инвариантность U).

Следовательно,

$$v - \rho_G v = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (v - \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})v) = u \in U,$$

и мы получаем

$$v = u + w, \quad \text{где } w = \rho_G v \in W,$$

т.е.

$$V = U + W.$$

Осталось доказать, что

$$U \cap W = 0.$$

Так как

$$\varphi(h^{-1})U \subset U \Rightarrow \rho\varphi(h^{-1})U = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})U = 0 \Rightarrow \rho_G(U) = 0,$$

откуда следует

$$v - \rho_G v = u \in U \Rightarrow \rho_G(v - \rho_G v) = 0,$$

поэтому $\rho_G v = \rho_G^2 v$ для всех $v \in V$. Это значит, что ρ_G — проектирование на W вдоль U:

$$\rho_G(U) = 0, \quad \rho_G^2 = \rho_G.$$

Пусть теперь

$$v \in U \cap W,$$

тогда $\rho_G v = 0$, поскольку $v \in U$, и $v = \rho_G v'$, поскольку $v \in \rho_G(V) = W$.

Используя предыдущие соотношения, получаем

$$0 = \rho_G v = \rho_G(\rho_G v') = \rho_G^2 v' = \rho_G v' = v,$$

откуда следует, что

$$U \cap W = 0.$$

$\square$

Однозначности разложения на неприводимые компоненты, конечно же, не будет.

Например, если $\varphi(g)$ — единичный оператор для всех $g \in G$, то любое прямое разложение пространства V в сумму одномерных подпространств будет разложением на неприводимые компоненты, а таких разложений бесконечно много.

Однако если мы сгруппируем все изоморфные неприводимые компоненты:

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s,$$

где

$$\begin{aligned} &U_1 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_1 = n_1 V_1, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &U_s = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s = n_s V_s, \end{aligned}$$

то такое разложение уже будет иметь однозначный вид (докажем это позже).

Замечание 1. Почти один и тот же пример демонстрирует, что теорема Машке перестает быть верной, если либо группа G бесконечна, либо характеристика поля делит порядок группы.

Именно, рассмотрим группу $G = \mathbb{Z}$ и ее двухмерное представление

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы уже упоминали выше, что оно приводимо, но не вполне приводимо.

Теперь рассмотрим поле характеристики p и группу $G = \mathbb{Z}_p$ с представлением

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Оно также является приводимым, но не вполне приводимым.

ЛЕММА ШУРА

Теорема 3 (лемма Шура). *Пусть*

$$\varphi : G \to \mathrm{GL}\,(V) \text{ и } \psi : G \to \mathrm{GL}\,(W)$$

— два неприводимых представления группы G,

$$\sigma : V \to W$$

— линейное отображение такое, что

$$\psi(g)\sigma = \sigma\varphi(g) \quad \forall g \in G.$$

Тогда

а) *если представления φ и ψ не эквивалентны, то $\sigma = 0$;*

б) *если $V = W$, $\varphi = \psi$, представления комплексны, то $\sigma = \lambda E$.*

Доказательство. а) Если представления φ и ψ не эквивалентны, то σ — не изоморфизм.

1. Пусть у σ есть ненулевое ядро $U \subset V$. Тогда для любого $u \in U$ $\sigma(u) = 0$. Рассмотрим $\varphi(g)u = u'$. Так как

$$\sigma u' = \sigma\varphi(g)u = \psi(g)\sigma u = 0,$$

то $\varphi(g)u \in U$. Значит, U — инвариантное подпространство.

Таким образом, ядро может быть ненулевым только при $\sigma = 0$.

2. Пусть образ σ не совпадает со всем W. Обозначим этот образ через $U \subset W$, пусть $u \in U$. Тогда

$$\psi(g)u = \psi(g)\sigma u' = \sigma(\varphi(g)u') \in U.$$

Таким образом, U — инвариантное подпространство.

б) То же самое, но надо вычесть λE, где λ — собственное значение для σ. $\square$