

## ЛЕКЦИЯ 19

СЛЕДСТВИЯ ЛЕММЫ ШУРА

ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ХАРАКТЕРОВ

РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

## СЛЕДСТВИЯ ЛЕММЫ ШУРА

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть  $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$  и  $\psi : G \rightarrow \text{GL}(W)$  — два неприводимых комплексных представления конечной группы  $G$  порядка  $|G|$  и  $\sigma : V \rightarrow W$  — произвольное линейное отображение.

Тогда усредненное отображение

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \sigma \varphi(g)^{-1}$$

обладает следующими свойствами:

- а) если  $\varphi$  и  $\psi$  не эквивалентны, то  $\tilde{\sigma} = 0$ ;
- б) если  $V = W$ ,  $\varphi = \psi$ , то  $\tilde{\sigma} = \lambda E$ ,  $\lambda = \frac{\text{tr } \sigma}{\dim V}$ .

*Доказательство.* Нужно лишь проверить, что отображение  $\tilde{\sigma}$  удовлетворяет условиям леммы Шура:

$$\begin{aligned} \psi(g) \tilde{\sigma} &= \frac{1}{|G|} \psi(g) \sum_{h \in G} \psi(h) \sigma \varphi(h)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(g) \psi(h) \sigma \varphi(h)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(gh) \sigma \varphi(h)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(gh) \sigma \varphi(gh)^{-1} \varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h' \in G} \psi(h') \sigma \varphi(h')^{-1} \varphi(g) = \\ &= \tilde{\sigma} \varphi(g). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi(g) \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} \varphi(g) \text{ для всех } g \in G.$$

По лемме Шура вытекают сразу оба утверждения, причем уточнение по поводу константы следует из соотношений

$$\begin{aligned} (\dim V) \lambda = \text{tr } \lambda E = \text{tr } \tilde{\sigma} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \varphi(g) \sigma \varphi(g)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \sigma = \text{tr } \sigma. \end{aligned}$$

□

Нам понадобится матричная формулировка этого предложения.  
Выберем в пространствах  $V, W$  какие-нибудь базисы:

$$V = \langle e_i \mid i \in I \rangle, \quad W = \langle f_j \mid j \in J \rangle.$$

Отождествим наши отображения  $\varphi$  и  $\psi$  с соответствующими матрицами в заданных базисах:

$$\varphi_g = (\varphi(g)_{i,i'}), \quad \psi_g = (\psi(g)_{j,j'}).$$

Пусть  $\sigma = (\sigma_{ji})$ .

по определению  $\tilde{\sigma}$  имеем

$$\tilde{\sigma}_{ji} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G, i' \in I, j' \in J} \psi_{j,j'}(g) \sigma_{j',i'} \varphi_{i',i}(g^{-1}).$$

Заметим, что отображение  $\sigma : V \rightarrow W$  в предложении совершенно произвольно. Например, мы можем взять

$$\sigma_{ji} = 0 \text{ при } (j, i) \neq (j_0, i_0), \quad \sigma_{j_0, i_0} = 1.$$

Тогда первому утверждению предложения будет отвечать соотношение

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{j, j_0}(g) \cdot \varphi_{i_0, i}(g^{-1}) = 0 \quad (*)$$

для всех  $i, i_0, j, j_0$  (мы считаем, что представления  $\varphi$  и  $\psi$  не эквивалентны).

Теперь пусть  $V = W, \varphi = \psi$ .

**СЛЕДСТВИЕ 1.** *В матричной формулировке пункта (б) предыдущего предложения выполнено соотношение*

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g))_{j, j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0, i} = \begin{cases} \frac{\delta_{j, i}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (**)$$

*Доказательство.* Так как в предыдущей задаче  $\sigma$  было произвольным эндоморфизмом пространства  $V$ , то снова выберем  $\sigma = E_{j_0, i_0}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{j,i} &= |G|^{-1} \left( \sum_{g \in G} (\varphi(g)) E_{j_0, i_0} (\varphi(g^{-1})) \right)_{j,i} = \\
 &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left( \sum_k \varphi(g)_{k, j_0} E_{k, j_0} E_{j_0, i_0} \sum_l \varphi(g^{-1})_{i_0, l} E_{i_0, l} \right)_{j,i} = \\
 &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left( \sum_{k,l} \varphi(g)_{k, j_0} \varphi(g^{-1})_{i_0, l} E_{k, l} \right)_{j,i} = \\
 &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g))_{j, j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0, i}.
 \end{aligned}$$

□

## ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Характером* произвольного комплексного конечномерного линейного представления  $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$  группы  $G$  называется функция

$$\chi_\varphi : G \rightarrow \mathbb{C},$$

определенная соотношением

$$\chi_\varphi(g) = \text{tr } \varphi(g), \quad g \in G.$$

ЛЕММА 1. *Характеры эквивалентных представлений совпадают.*

*Доказательство.* Это утверждение совершенно очевидно, так как следы сопряженных матриц совпадают:

$$\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}((AB)(A^{-1})) = \operatorname{tr}(A^{-1}AB) = \operatorname{tr} B.$$

□

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Пусть  $\chi_\varphi$  — характер комплексного линейного представления  $\varphi : G \rightarrow \operatorname{GL}(V)$ . Тогда

- а)  $\chi_\varphi(e) = \dim V$ ;
- б)  $\chi_\varphi(hgh^{-1}) = \chi_\varphi(g)$  для всех  $g, h \in G$ ;
- в)  $\chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$  для любого элемента  $g \in G$  конечного порядка;
- г) прямой сумме  $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$  представлений отвечает характер  $\chi_\varphi = \chi_{\varphi_1} + \chi_{\varphi_2}$ .

*Доказательство.* а) Единичный элемент группы  $G$  всегда отображается в единичную матрицу, след которой равен размерности пространства.

б) Также следует из того, что у сопряженных матриц след совпадает.

в) Если элемент  $g \in G$  имеет конечный порядок, то  $\varphi(g)$  обязательно диагонализировать, так как его жорданова нормальная форма не может содержать жордановых клеток размера, большего одного:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & * & * \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & * \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

то есть ни одна степень этой клетки не будет единичной матрицей, так как на месте  $(1, 2)$  у нее всегда будет стоять ненулевой элемент  $n\lambda^{n-1}$ .

Если матрица  $\varphi(g)$  диагонализируема, то можно считать, что она диагональна. При это на диагонали стоят корни  $n$ -ой степени из 1, т.е. числа вида

$$\cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Обратные элементы имеют вид

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = \overline{\cos \alpha + i \sin \alpha}.$$

Таким образом, если

$$\varphi(g) = ADA^{-1}, \quad D = \text{diag}[z_1, \dots, z_m],$$

то

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} = AD^{-1}A^{-1} = A\bar{D}A^{-1}.$$

Тогда ясно, что  $\chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$ .

г) Очевидно. □

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Пространство  $\mathbb{C}^G$  — это множество всех функций из группы  $G$  в поле  $\mathbb{C}$ , снабженное структурой векторного пространства. Функция из  $\mathbb{C}^G$  называется *центральной*, если она постоянна на сопряженных классах группы  $G$ .

**ЛЕММА 2.** Если группа  $G$  конечна, то скалярное произведение

$$(\sigma, \tau)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g) \overline{\tau(g)}, \quad \sigma, \tau \in \mathbb{C}^G,$$

превращает  $\mathbb{C}^G$  в эрмитово пространство.

*Доказательство.* Ясно, что  $(\cdot, \cdot)_G$  является полутралинейной формой на пространстве  $\mathbb{C}^G$ . Нам нужно только проверить положительную определенность.

Действительно,

$$(\sigma, \sigma)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g) \overline{\sigma(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\sigma(g)|^2 > 0,$$

если  $\sigma \neq 0$ . □

## СВОЙСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ХАРАКТЕРОВ

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $\varphi, \psi$  — неприводимые комплексные представления конечной группы  $G$ . Тогда

$$(\chi_\varphi, \chi_\psi)_G = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \sim \psi, \\ 0, & \text{если } \varphi \not\sim \psi. \end{cases}$$

*Доказательство.* 1. Пусть  $\varphi \sim \psi$ . Тогда, как мы показывали выше,  $\chi_\varphi = \chi_\psi$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} (\chi_\varphi, \chi_\varphi)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{tr}(\varphi(g))|^2 = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\varphi(g)) \operatorname{tr}(\varphi(g^{-1})) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{i=1}^n \varphi(g)_{i,i} \right) \left( \sum_{j=1}^n \varphi(g^{-1})_{j,j} \right) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j=1}^n \varphi(g)_{i,i} \varphi(g^{-1})_{j,j} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{g \in G} \varphi(g)_{i,i} \varphi(g^{-1})_{j,j} \right). \end{aligned}$$

Однако по (\*\*)

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g))_{j, j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0, i} = \begin{cases} \frac{\delta_{j, i}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Значит, слагаемые, у которых  $i \neq j$ , будут равны нулю, поэтому вся сумма будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{g \in G} \varphi(g)_{i, i} \varphi(g^{-1})_{i, i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, первое утверждение доказано.

Теперь применим соотношение (\*):

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{j, j_0}(g) \cdot \varphi_{i_0, i}(g^{-1}) = 0.$$

Положим в нем  $i_0 = i, j_0 = j$  и просуммируем по  $i$  и  $j$ , после чего получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g, i, j} \psi_{j, j}(g) \varphi_{i, i}(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_j \psi_{j, j}(g) \right) \left( \sum_i \varphi_{i, i}(g^{-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\psi(g) \chi_\varphi(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\psi(g) \overline{\chi_\varphi(g)} = (\chi_\psi, \chi_\varphi)_G. \end{aligned}$$

□



СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

— разложение комплексного пространства  $V$  представления  $\varphi$  (группы  $G$ ) в прямую сумму неприводимых представлений с пространствами  $V_1, \dots, V_k$ .

Если  $W$  — какое-то пространство неприводимого представления  $\psi$ , то число слагаемых в разложении  $V$ , изоморфных  $W$ , равно

$$(\chi_V, \chi_W)_G$$

и не зависит от способа разложения (кратность вхождения  $W$  в пространство  $V$ ).

Два представления с одним и тем же характером изоморфны.

*Доказательство.* Как мы отмечали выше,

$$\chi_V = \chi_{V_1} + \cdots + \chi_{V_k},$$

поэтому

$$(\chi_V, \chi_W)_G = (\chi_{V_1}, \chi_W)_G + \cdots + (\chi_{V_k}, \chi_W)_G.$$

По только что доказанной теореме справа стоит сумма единиц и нулей, причем число единиц совпадает с числом подпространств  $V_i$ , изоморфных  $W$ .

Но скалярное произведение слева  $(\chi_V, \chi_W)_G$  вообще не зависит от какого-либо разложения, так что мы уже доказали инвариантность кратности вхождения  $W$  в пространство  $V$ .

Два пространства  $V, V'$  представлений группы  $G$  с одним и тем же характером  $\chi = \chi_V = \chi_{V'}$  содержат в своих разложениях любое слагаемое, изоморфное данному неприводимому представлению с пространством  $W$ , одинаковое число раз, а именно  $(\chi, \chi_W)_G$ .

Поэтому в разложениях

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V_i, \quad V' = \bigoplus_{j=1}^l V'_j$$

на неприводимые прямые слагаемые мы можем считать  $l = k$ ,  $V'_i \cong V_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Следовательно, изоморфны и сами пространства  $V, V'$ .  $\square$

## РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Регулярным* представлением конечной группы  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  называется  $n$ -мерное представление, в котором  $\varphi(g_i)e_k = e_l$ , если  $g_i g_k = g_l$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1. Найдите регулярное представление групп  $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbf{V}_4$ .