

ЛЕКЦИЯ 19

СЛЕДСТВИЯ ЛЕММЫ ШУРА

ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ХАРАКТЕРОВ

РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

СЛЕДСТВИЯ ЛЕММЫ ШУРА

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ и $\psi : G \rightarrow \text{GL}(W)$ — два неприводимых комплексных представления конечной группы G порядка $|G|$ и $\sigma : V \rightarrow W$ — произвольное линейное отображение.

Тогда усредненное отображение

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \sigma \varphi(g)^{-1}$$

обладает следующими свойствами:

- а) если φ и ψ не эквивалентны, то $\tilde{\sigma} = 0$;
- б) если $V = W$, $\varphi = \psi$, то $\tilde{\sigma} = \lambda E$, $\lambda = \frac{\text{tr } \sigma}{\dim V}$.

Доказательство. Нужно лишь проверить, что отображение $\tilde{\sigma}$ удовлетворяет условиям леммы Шура:

$$\begin{aligned} \psi(g) \tilde{\sigma} &= \frac{1}{|G|} \psi(g) \sum_{h \in G} \psi(h) \sigma \varphi(h)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(g) \psi(h) \sigma \varphi(h)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(gh) \sigma \varphi(h)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(gh) \sigma \varphi(gh)^{-1} \varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h' \in G} \psi(h') \sigma \varphi(h')^{-1} \varphi(g) = \\ &= \tilde{\sigma} \varphi(g). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\psi(g) \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} \varphi(g) \text{ для всех } g \in G.$$

По лемме Шура вытекают сразу оба утверждения, причем уточнение по поводу константы следует из соотношений

$$\begin{aligned} (\dim V) \lambda = \text{tr } \lambda E = \text{tr } \tilde{\sigma} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \varphi(g) \sigma \varphi(g)^{-1} = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \sigma = \text{tr } \sigma. \end{aligned}$$

□

Нам понадобится матричная формулировка этого предложения.
Выберем в пространствах V, W какие-нибудь базисы:

$$V = \langle e_i \mid i \in I \rangle, \quad W = \langle f_j \mid j \in J \rangle.$$

Отождествим наши отображения φ и ψ с соответствующими матрицами в заданных базисах:

$$\varphi_g = (\varphi(g)_{i,i'}), \quad \psi_g = (\psi(g)_{j,j'}).$$

Пусть $\sigma = (\sigma_{ji})$.

по определению $\tilde{\sigma}$ имеем

$$\tilde{\sigma}_{ji} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G, i' \in I, j' \in J} \psi_{j,j'}(g) \sigma_{j',i'} \varphi_{i',i}(g^{-1}).$$

Заметим, что отображение $\sigma : V \rightarrow W$ в предложении совершенно произвольно. Например, мы можем взять

$$\sigma_{ji} = 0 \text{ при } (j, i) \neq (j_0, i_0), \quad \sigma_{j_0, i_0} = 1.$$

Тогда первому утверждению предложения будет отвечать соотношение

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{j, j_0}(g) \cdot \varphi_{i_0, i}(g^{-1}) = 0 \quad (*)$$

для всех i, i_0, j, j_0 (мы считаем, что представления φ и ψ не эквивалентны).

Теперь пусть $V = W, \varphi = \psi$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В матричной формулировке пункта (б) предыдущего предложения выполнено соотношение

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g))_{j, j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0, i} = \begin{cases} \frac{\delta_{j, i}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (**)$$

Доказательство. Так как в предыдущей задаче σ было произвольным эндоморфизмом пространства V , то снова выберем $\sigma = E_{j_0, i_0}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{j,i} &= |G|^{-1} \left(\sum_{g \in G} (\varphi(g)) E_{j_0, i_0} (\varphi(g^{-1})) \right)_{j,i} = \\
 &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left(\sum_k \varphi(g)_{k, j_0} E_{k, j_0} E_{j_0, i_0} \sum_l \varphi(g^{-1})_{i_0, l} E_{i_0, l} \right)_{j,i} = \\
 &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left(\sum_{k,l} \varphi(g)_{k, j_0} \varphi(g^{-1})_{i_0, l} E_{k, l} \right)_{j,i} = \\
 &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g))_{j, j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0, i}.
 \end{aligned}$$

□

ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Характером* произвольного комплексного конечномерного линейного представления $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$ группы G называется функция

$$\chi_\varphi : G \rightarrow \mathbb{C},$$

определенная соотношением

$$\chi_\varphi(g) = \text{tr } \varphi(g), \quad g \in G.$$

ЛЕММА 1. *Характеры эквивалентных представлений совпадают.*

Доказательство. Это утверждение совершенно очевидно, так как следы сопряженных матриц совпадают:

$$\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}((AB)(A^{-1})) = \operatorname{tr}(A^{-1}AB) = \operatorname{tr} B.$$

□

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть χ_φ — характер комплексного линейного представления $\varphi : G \rightarrow \operatorname{GL}(V)$. Тогда

- а) $\chi_\varphi(e) = \dim V$;
- б) $\chi_\varphi(hgh^{-1}) = \chi_\varphi(g)$ для всех $g, h \in G$;
- в) $\chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$ для любого элемента $g \in G$ конечного порядка;
- г) прямой сумме $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$ представлений отвечает характер $\chi_\varphi = \chi_{\varphi_1} + \chi_{\varphi_2}$.

Доказательство. а) Единичный элемент группы G всегда отображается в единичную матрицу, след которой равен размерности пространства.

б) Также следует из того, что у сопряженных матриц след совпадает.

в) Если элемент $g \in G$ имеет конечный порядок, то $\varphi(g)$ обязательно диагонализировать, так как его жорданова нормальная форма не может содержать жордановых клеток размера, большего одного:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & * & * \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & * \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix},$$

то есть ни одна степень этой клетки не будет единичной матрицей, так как на месте $(1, 2)$ у нее всегда будет стоять ненулевой элемент $n\lambda^{n-1}$.

Если матрица $\varphi(g)$ диагонализируема, то можно считать, что она диагональна. При это на диагонали стоят корни n -ой степени из 1, т.е. числа вида

$$\cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Обратные элементы имеют вид

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = \overline{\cos \alpha + i \sin \alpha}.$$

Таким образом, если

$$\varphi(g) = ADA^{-1}, \quad D = \text{diag}[z_1, \dots, z_m],$$

то

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} = AD^{-1}A^{-1} = A\bar{D}A^{-1}.$$

Тогда ясно, что $\chi_\varphi(g^{-1}) = \overline{\chi_\varphi(g)}$.

г) Очевидно. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство \mathbb{C}^G — это множество всех функций из группы G в поле \mathbb{C} , снабженное структурой векторного пространства. Функция из \mathbb{C}^G называется *центральной*, если она постоянна на сопряженных классах группы G .

ЛЕММА 2. Если группа G конечна, то скалярное произведение

$$(\sigma, \tau)_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g) \overline{\tau(g)}, \quad \sigma, \tau \in \mathbb{C}^G,$$

превращает \mathbb{C}^G в эрмитово пространство.

Доказательство. Ясно, что $(\cdot, \cdot)_G$ является полутралинейной формой на пространстве \mathbb{C}^G . Нам нужно только проверить положительную определенность.

Действительно,

$$(\sigma, \sigma)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g) \overline{\sigma(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\sigma(g)|^2 > 0,$$

если $\sigma \neq 0$. □

СВОЙСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ХАРАКТЕРОВ

ТЕОРЕМА 1. Пусть φ, ψ — неприводимые комплексные представления конечной группы G . Тогда

$$(\chi_\varphi, \chi_\psi)_G = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \sim \psi, \\ 0, & \text{если } \varphi \not\sim \psi. \end{cases}$$

Доказательство. 1. Пусть $\varphi \sim \psi$. Тогда, как мы показывали выше, $\chi_\varphi = \chi_\psi$. Таким образом,

$$\begin{aligned} (\chi_\varphi, \chi_\varphi)_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{tr}(\varphi(g))|^2 = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr}(\varphi(g)) \operatorname{tr}(\varphi(g^{-1})) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_{i=1}^n \varphi(g)_{i,i} \right) \left(\sum_{j=1}^n \varphi(g^{-1})_{j,j} \right) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{i,j=1}^n \varphi(g)_{i,i} \varphi(g^{-1})_{j,j} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{g \in G} \varphi(g)_{i,i} \varphi(g^{-1})_{j,j} \right). \end{aligned}$$

Однако по (**)

$$|G|^{-1} \sum_{g \in G} (\varphi(g))_{j, j_0} \cdot (\varphi(g^{-1}))_{i_0, i} = \begin{cases} \frac{\delta_{j, i}}{\dim V}, & \text{если } j_0 = i_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Значит, слагаемые, у которых $i \neq j$, будут равны нулю, поэтому вся сумма будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{g \in G} \varphi(g)_{i, i} \varphi(g^{-1})_{i, i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, первое утверждение доказано.

Теперь применим соотношение (*):

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{j, j_0}(g) \cdot \varphi_{i_0, i}(g^{-1}) = 0.$$

Положим в нем $i_0 = i, j_0 = j$ и просуммируем по i и j , после чего получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g, i, j} \psi_{j, j}(g) \varphi_{i, i}(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\sum_j \psi_{j, j}(g) \right) \left(\sum_i \varphi_{i, i}(g^{-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\psi(g) \chi_\varphi(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\psi(g) \overline{\chi_\varphi(g)} = (\chi_\psi, \chi_\varphi)_G. \end{aligned}$$

□

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

— разложение комплексного пространства V представления φ (группы G) в прямую сумму неприводимых представлений с пространствами V_1, \dots, V_k .

Если W — какое-то пространство неприводимого представления ψ , то число слагаемых в разложении V , изоморфных W , равно

$$(\chi_V, \chi_W)_G$$

и не зависит от способа разложения (кратность вхождения W в пространство V).

Два представления с одним и тем же характером изоморфны.

Доказательство. Как мы отмечали выше,

$$\chi_V = \chi_{V_1} + \cdots + \chi_{V_k},$$

поэтому

$$(\chi_V, \chi_W)_G = (\chi_{V_1}, \chi_W)_G + \cdots + (\chi_{V_k}, \chi_W)_G.$$

По только что доказанной теореме справа стоит сумма единиц и нулей, причем число единиц совпадает с числом подпространств V_i , изоморфных W .

Но скалярное произведение слева $(\chi_V, \chi_W)_G$ вообще не зависит от какого-либо разложения, так что мы уже доказали инвариантность кратности вхождения W в пространство V .

Два пространства V, V' представлений группы G с одним и тем же характером $\chi = \chi_V = \chi_{V'}$ содержат в своих разложениях любое слагаемое, изоморфное данному неприводимому представлению с пространством W , одинаковое число раз, а именно $(\chi, \chi_W)_G$.

Поэтому в разложениях

$$V = \bigoplus_{i=1}^k V_i, \quad V' = \bigoplus_{j=1}^l V'_j$$

на неприводимые прямые слагаемые мы можем считать $l = k$, $V'_i \cong V_i$, $1 \leq i \leq k$. Следовательно, изоморфны и сами пространства V, V' . \square

РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Регулярным* представлением конечной группы $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ называется n -мерное представление, в котором $\varphi(g_i)e_k = e_l$, если $g_i g_k = g_l$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Найдите регулярное представление групп \mathbb{Z}_3 , \mathbf{V}_4 .