

ЛЕКЦИЯ 3

КОММУТАНТ.

НОРМАЛЬНОЕ ЗАМЫКАНИЕ ГРУПП

ГОМОМОРФИЗМЫ ГРУПП

ФАКТОР-ГРУППЫ

ТЕОРЕМЫ О ГОМОМОРФИЗМАХ

КОММУТАНТ

Пусть G — группа, $a, b \in G$. Коммутатором элементов $a, b \in G$ называется элемент

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1} \in G.$$

ЛЕММА 1 (СВОЙСТВА КОММУТАТОРОВ). Пусть G — группа, $a, b \in G$. Тогда:

- 1) $[a, b]ba = ab$;
- 2) $[a, b] = e$ тогда и только тогда, когда $ab = ba$;
- 3) $[a, b]^{-1} = [b, a]$;
- 4) $g^{-1}[a, b]g = [g^{-1}ag, g^{-1}bg]$ для $g \in G$.

Доказательство.

- 1) $[a, b]ba = aba^{-1}b^{-1}ba = ab$.
- 2) $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} = e$ тогда и только тогда, когда $ab = ba$.
- 3) $[a, b]^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = [b, a]$.
- 4)

$$\begin{aligned} g^{-1}[a, b]g &= g^{-1}aba^{-1}b^{-1}g = \\ &= (g^{-1}ag)(g^{-1}bg)(g^{-1}a^{-1}g)(g^{-1}b^{-1}g) = \\ &= (g^{-1}ag)(g^{-1}bg)(g^{-1}ag)^{-1}(g^{-1}bg)^{-1} = [g^{-1}ag, g^{-1}bg]. \quad \square \end{aligned}$$

Коммутант группы G определим как подгруппу

$$G' = [G, G] = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$$

группы G , порожденную множеством S всех коммутаторов $[a, b]$, $a, b \in G$.

ТЕОРЕМА 1. 1) $G' = [G, G] = \{[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_k, y_k] \mid x_i, y_i \in G\}$ (т. е. коммутант состоит из всех конечных произведений коммутаторов).

2) $G' \triangleleft G$ (коммутант группы является нормальной подгруппой группы).

Доказательство.

1) Так как $[a, b]^{-1} = [b, a]$, то $G' = \langle S \rangle$, где S — множество всех коммутаторов, состоит из произведений конечного числа коммутаторов.

2) Так как для $g \in G$ имеем

$$g^{-1}(xy)g = (g^{-1}xg)(g^{-1}yg), \quad g^{-1}[a, b]g = [g^{-1}ag, g^{-1}bg],$$

то

$$\begin{aligned} g^{-1}([x_1, y_1] \dots [x_k, y_k])g &= (g^{-1}[x_1, y_1]g) \dots (g^{-1}[x_k, y_k]g) = \\ &= [g^{-1}x_1g, g^{-1}y_1g] \dots [g^{-1}x_kg, g^{-1}y_kg]. \end{aligned}$$

Итак, $g^{-1}G'g \subseteq G'$ для всех $g \in G$, это означает, что $G' \triangleleft G$. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. 1) Группа G коммутативна тогда и только тогда, когда $G' = [G, G] = \{e\}$.

2) Привести пример группы G , в которой совокупность коммутаторов не является подгруппой (т. е. произведение двух коммутаторов не является коммутатором).

3) Покажите, что любой элемент группы \mathbf{A}_5 является коммутатором, в частности, $[\mathbf{A}_5, \mathbf{A}_5] = \mathbf{A}_5$.

4) Пусть G — группа, $\mathbf{Z}(G)$ — ее центр, $(G : \mathbf{Z}(G)) = n$. Тогда группа G имеет не более n^2 различных коммутаторов, $[G, G]$ — конечная группа, $|[G, G]| \leq n^{2n^3}$.

Пусть A и B — подгруппы группы G и

$$[A, B] = \langle \{[a, b] \mid a \in A, b \in B\} \rangle —$$

подгруппа группы G , порожденная всеми коммутаторами

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}, \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

(называемая *взаимным коммутантом* подгрупп A и B).

Если $A \triangleleft G$, то для $a \in A, b \in B$

$$[a, b] = a(ba^{-1}b^{-1}) \in A \cdot A = A,$$

и поэтому

$$[A, B] \subseteq A.$$

Аналогично, если $B \triangleleft G$, то

$$[a, b] = (a^{-1}b^{-1}a)b \in B \cdot B = B,$$

и поэтому

$$[A, B] \subseteq B.$$

Если же $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, то

$$[A, B] \triangleleft G, \quad [A, B] \subseteq A \cap B.$$

НОРМАЛЬНОЕ ЗАМЫКАНИЕ ГРУПП

ЛЕММА 2. Если $\{H_i, i \in I\}$ — совокупность нормальных подгрупп группы G , $H_i \triangleleft G$, то $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ — нормальная подгруппа группы G .

Доказательство. Действительно, мы знаем, что H — подгруппа. Если $h \in H$ и $g \in G$, то $h \in H_i$ для всех $i \in I$, и так как $H_i \triangleleft G$, то $g^{-1}hg \in H_i$ для всех $i \in I$. Поэтому $g^{-1}hg \in \bigcap_{i \in I} H_i = H$. Итак, $H \triangleleft G$. \square

Пусть S — непустое подмножество группы G . Рассмотрим совокупность всех нормальных подгрупп $H_i \triangleleft G$, $i \in I$, таких, что $S \subseteq H_i$ (эта совокупность непуста, поскольку она содержит саму группу G). Тогда

$$S \subseteq N(S) = \bigcap_{i \in I} H_i \triangleleft G.$$

Покажем в следующей теореме, что: $N(S)$ — наименьшая нормальная подгруппа, содержащая S ; если

$$S^G = \{g^{-1}sg \mid s \in S, g \in G\},$$

то оказывается, что подгруппа $\langle S^G \rangle$, порожденная подмножеством S^G , является наименьшей нормальной подгруппой, содержащей S , и потому она совпадает с $N(S)$.

ТЕОРЕМА 2 (О НОРМАЛЬНОМ ЗАМЫКАНИИ ПОДМНОЖЕСТВА ГРУППЫ).
 Пусть S — непустое подмножество группы G , $\emptyset \neq S \subseteq G$. Тогда:

1) пересечение

$$N(S) = \bigcap_{S \subseteq N_i \triangleleft G} N_i$$

всех нормальных подгрупп $N_i \triangleleft G$ таких, что $S \subseteq N_i$, является наименьшей нормальной подгруппой группы G , содержащей подмножество S (таким образом, нормальное замыкание N непустого подмножества S группы G существует);

2) $N(S) = \langle S^G \rangle = \left\{ \prod_{k=1}^t g_k^{-1} s_k^{\pm 1} g_k \mid t \in \mathbb{N}, s_k \in S, g_k \in G \right\}$ (элементы нормального замыкания подмножества S в группе G — это в точности конечные произведения элементов вида $g^{-1} s^{\pm 1} g$, $s \in S$, $g \in G$).

Доказательство. 1) Так как пересечение нормальных подгрупп — нормальная подгруппа, то $N = \bigcap N_i \triangleleft G$. Ясно, что $S \subseteq N = \bigcap N_i$, поскольку $S \subseteq N_i$ для всех $\{N_i \triangleleft G \mid S \subseteq N_i, i \in I\}$ (это множество содержит $N_i = G$, и поэтому не является пустым). Таким образом, нормальная подгруппа N , $S \subseteq N$, сама принадлежит этому множеству, т. е. $N = N_i$ для некоторого $i \in I$, и следовательно, $N = \bigcap_{S \subseteq N_i \triangleleft G} N_i$.

2) В силу 1) из $S \subseteq N \triangleleft G$ следует, что

$$\langle S^G \rangle = \left\{ \prod_{k=1}^t g_k^{-1} s_k^{\pm 1} g_k \mid t \in \mathbb{N}, s_k \in S, g_k \in G \right\} \subseteq N.$$

Но ясно, что $\langle S^G \rangle$ — нормальная подгруппа в G , содержащая S . Таким образом, $N \subseteq \langle S^G \rangle$. Итак, $\langle S^G \rangle = N$, и мы имеем общий вид произвольного элемента нормального замыкания $N(S)$. \square

Наиболее часто рассматривается нормальное замыкание $N(H) = \langle H^G \rangle$ подгруппы H группы G , т. е. тот случай, когда $S = H$ — подгруппа в G .

ГОМОМОРФИЗМЫ ГРУПП

Пусть G и G' — группы. Напомним, что отображение $f: G \rightarrow G'$, для которого $f(ab) = f(a)f(b)$ для всех элементов $a, b \in G$, называется *гомоморфизмом*. Биективные гомоморфизмы называются *изоморфизмами*.

ПРИМЕР 1. Пусть $G = \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ с операцией умножения, $G' = (\mathbb{R}, +)$ с операцией сложения. Так как для отображения $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ имеем $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ для всех $a, b \in \mathbb{R}^+$, то \ln — гомоморфизм групп. Так как это — биекция, то \ln — изоморфизм.

ПРИМЕР 2. Если $G = \mathbf{S}_n$ — группа подстановок и $G' = \{1, -1\}$ — группа с операцией умножения, то отображение $\varepsilon: \mathbf{S}_n \rightarrow \{1, -1\}$, для которого $\varepsilon(\sigma) = 1$, если $\sigma \in \mathbf{A}_n$, т. е. если σ — четная подстановка, и $\varepsilon(\sigma) = -1$ для $\sigma \in \mathbf{S}_n \setminus \mathbf{A}_n$, т. е. для нечетной подстановки σ , является гомоморфизмом групп, поскольку $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ для всех $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_n$.

ПРИМЕР 3. Пусть $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $G' = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ с операцией умножения. Так как $|AB| = |A||B|$ для $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, то отображение $A \mapsto |A|$ из $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ в \mathbb{R}^* , ставящее в соответствие матрице A ее определитель $|A|$, является гомоморфизмом групп.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Найти все гомоморфизмы $f: G \rightarrow G'$, где $G = \langle a \rangle$, $O(a) = m$, $G' = \langle b \rangle$, $O(b) = n$ (в частности, для $m = 12$, $n = 15$).

Для гомоморфизмов $f: G \rightarrow G'$ определим:

$$\text{Im } f = \{g' \in G' \mid g' = f(g) \text{ для } g \in G\}$$

(образ гомоморфизма f);

$$\ker f = \{g \in G \mid f(g) = e'\},$$

где e' — нейтральный элемент группы G' (*ядро* гомоморфизма f).

УПРАЖНЕНИЕ 3. В рассмотренных выше примерах гомоморфизмов групп найти образ и ядро гомоморфизма.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что не существует сюръективного гомоморфизма $(\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$.

ТЕОРЕМА 3 (СВОЙСТВА ГОМОМОРФИЗМА ГРУПП). Пусть G и G' — группы, e и e' соответственно — их нейтральные элементы, $f: G \rightarrow G'$ — гомоморфизм групп. Тогда:

- 1) $f(e) = e'$;
- 2) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ для всех $x \in G$;
- 3) $H' = \text{Im } f$ — подгруппа группы G' ;
- 4) если $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа, то $\text{Im } f = \langle f(a) \rangle$ — также циклическая группа;
- 5) если $O(a) < \infty$ для $a \in G$, то $O(f(a))$ является делителем числа $O(a)$ (если f — инъективный гомоморфизм, то $O(f(a)) = O(a)$);
- 6) $f(g^{-1}hg) = (f(g))^{-1}f(h)f(g)$;
- 7) $f([g, h]) = [f(g), f(h)]$, и следовательно, $f([G, G]) = [f(G), f(G)]$;
- 8) $\ker f$ — нормальная подгруппа группы G ;
- 9) для $x, y \in G$ $f(x) = f(y)$ тогда и только тогда, когда $xy^{-1} \in \ker f$;
- 10) f — инъективное отображение тогда и только тогда, когда $\ker f = \{e\}$.

Доказательство. 1) Так как $u = f(e) = f(e^2) = f(e)f(e) = u^2$, то $u = e'$, т. е. $f(e) = e'$.

2) Так как $f(x^{-1})f(x) = f(x^{-1}x) = f(e) = e'$ и $f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = e'$, то $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

3) Если $h'_1 = f(g_1)$ и $h'_2 = f(g_2)$ — элементы из $\text{Im } f$, где $g_1, g_2 \in G$, то

$$h'_1 h'_2 = f(g_1) f(g_2) = f(g_1 g_2) \in \text{Im } f.$$

Если $h' = f(g) \in \text{Im } f$, $g \in G$, то

$$(h')^{-1} = (f(g))^{-1} = f(g^{-1}) \in \text{Im } f.$$

Итак, $\text{Im } f$ — подгруппа группы G' .

4) Если $G = \langle a \rangle$ и $h' \in \text{Im } f$, $h' = f(g)$, $g \in G$, то $g = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, и поэтому

$$h' = f(g) = f(a^n) = (f(a))^n.$$

Итак, $\text{Im } f = \langle f(a) \rangle$ — циклическая группа с образующим $f(a)$.

5) Пусть $n = O(a)$. Тогда $a^n = e$, и поэтому

$$(f(a))^n = f(a^n) = f(e) = e'.$$

Следовательно, число $O(f(a))$ является делителем числа $n = O(a)$.

Если же f — инъективный гомоморфизм и $m = O(f(a))$, то

$$e' = (f(a))^m = f(a^m),$$

поэтому $a^m = e$, и следовательно, $n = O(a)$ является делителем числа m . Таким образом, $O(a) = n = m = O(f(a))$.

6) и 7) следуют из 2).

8) Если $h_1, h_2 \in H = \ker f$, то $f(h_1) = e'$, $f(h_2) = e'$. Поэтому $f(h_1 h_2) = f(h_1) f(h_2) = e' \cdot e' = e'$, т. е. $h_1 h_2 \in \ker f$.

Если $h \in \ker f$, то $f(h) = e'$, и поэтому $f(h^{-1}) = (f(h))^{-1} = (e')^{-1} = e'$, т. е. $h^{-1} \in \ker f$. Таким образом, $\ker f$ — подгруппа группы G .

Если $h \in H = \ker f$, то $f(h) = e'$. Для любого элемента $g \in G$ имеем

$$f(g^{-1} h g) = f(g^{-1}) f(h) f(g) = f(g)^{-1} e' f(g) = e'.$$

Таким образом, $g^{-1}(\ker f)g \subseteq \ker f$ для всех элементов $g \in G$, т. е. $\ker f$ — нормальная подгруппа группы G .

9) $f(x) = f(y) \iff e' = f(x) f(y)^{-1} = f(x) f(y^{-1}) = f(x y^{-1}) \iff x y^{-1} \in \ker f$.

10) а) Если $\ker f = \{e\}$, то из $f(x) = f(y)$ следует, что $x y^{-1} = e$, т. е. что $x = y$, другими словами, f — инъективное отображение.

б) Если f — инъективное отображение, то, так как $f(e) = e'$, из $f(x) = e'$ следует, что $x = e$, т. е. $\ker f = \{e\}$. \square

ТЕОРЕМА 4 (ТЕОРЕМА КЭЛИ). Пусть G — группа, H — ее подгруппа, L — множество всех левых смежных классов группы G по подгруппе H , $\varphi: G \rightarrow S(L)$, $S(L)$ — группа подстановок на множестве L , $\varphi(g)(xH) = gxH$ для $x, g \in G$. Тогда:

1) φ — гомоморфизм групп;

2) $\ker \varphi = \bigcap_{x \in G} x H x^{-1}$.

Доказательство. 1) Если $x, g_1, g_2 \in G$, то

$$\varphi(g_1g_2)(xH) = (g_1g_2)xH = g_1(g_2xH) = \varphi(g_1)(\varphi(g_2)(xH)),$$

поэтому $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$.

2) Ясно, что:

$$g \in \ker \varphi \iff \{xH = gxH \ \forall xH\} \iff \{g \in xHx^{-1} \ \forall x \in G\}. \quad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 1. При $H = \{e\}$, $L = G$, $S(G)$ — группа подстановок на множестве G :

1) $\varphi: G \rightarrow S(G)$, $\varphi(g)(x) = gx$ для $x, g \in G$, является левым регулярным представлением группы G , оно осуществляет вложение группы G в группу $S(G)$, поскольку $\ker \varphi = \bigcap_{x \in G} xex^{-1} = \{e\}$;

2) конечная группа G вкладывается в группу подстановок S_m , где $m = |G|$.

ФАКТОР-ГРУППЫ, КАНОНИЧЕСКИЙ ГОМОМОРФИЗМ

Пусть G — группа, H — ее нормальная подгруппа, $G/H = \{xH = Hx \mid x \in G\}$ — множество смежных классов по подгруппе H . Определим на множестве G/H операцию умножения, полагая $xH \cdot yH = xyH$.

Проверим *корректность* этого определения (т. е. что умножение смежных классов не зависит от выбора их представителей).

Действительно, пусть $xH = x'H$, $yH = y'H$. Тогда $x' = xh_1$, $y' = yh_2$, где $h_1, h_2 \in H$. Следовательно, $x'y' = xh_1yh_2 = xyh'_1h_2$, где $h_1y = yh'_1$ (поскольку $H y = yH$) для $h'_1 \in H$. Так как $h'_1h_2 \in H$, то $x'y' = xyh'_1h_2 \in xyH$, и поэтому $x'y'H = xyH$.

Для любых $x, y, z \in G$ имеем

$$(xHyH)zH = (xy)zH = x(yz)H = xH(yHzH),$$

т. е. операция умножения смежных классов ассоциативна.

Ясно, что для $H = eH$ имеем

$$eHxH = exH = xH = xeH = xHeH$$

для всех $xH \in G/H$, т. е. $H = eH$ — нейтральный элемент.

Для всякого $xH \in G/H$ из

$$\begin{aligned}(xH)(x^{-1}H) &= xx^{-1}H = eH = H, \\ (x^{-1}H)(xH) &= x^{-1}xH = eH = H\end{aligned}$$

получаем, что $(xH)^{-1} = x^{-1}H$, т. е. у каждого смежного класса xH имеется обратный элемент $(xH)^{-1} = x^{-1}H$.

Таким образом, мы доказали первое утверждение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Если $H \triangleleft G$, то:

1) множество смежных классов $G/H = \{xH = Hx \mid x \in G\}$ группы G по ее нормальной подгруппе $H \triangleleft G$ с операцией $xH \cdot yH = xyH$ является группой (называемой фактор-группой группы G по нормальной подгруппе H);

2) отображение $\pi = \pi_H: G \rightarrow G/H$, для которого $\pi(x) = xH$, $x \in G$, является сюръективным гомоморфизмом (называемым каноническим гомоморфизмом);

3) $\ker \pi_H = H$;

4) если $|G| < \infty$, то $|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = (G : H)$.

Доказательство. Осталось проверить 2), 3) и 4). Действительно, для $a, b \in G$ имеем

$$\pi(ab) = abH = aH \cdot bH = \pi(a)\pi(b),$$

т. е. $\pi = \pi_H$ — гомоморфизм.

Если $g \in G$, то $gH = \pi(g)$, т. е. π — сюръекция.

Если $a \in G$, то $a \in \ker \pi_H$ тогда и только тогда, когда $\pi(a) = aH = H$.

Но это равносильно тому, что $a \in H$. Итак, $\ker \pi_H = H$.

4) следует из теоремы Лагранжа. □

СЛЕДСТВИЕ 2. *Нормальные подгруппы H группы G и только они являются ядрами гомоморфизмов $f: G \rightarrow G'$ из группы G во все группы G' .*

ПРИМЕРЫ ФАКТОР-ГРУПП

1) Пусть $H = \{e\} \triangleleft G$. Тогда $x\{e\} = x$ для всех $x \in G$, т. е. все смежные классы по единичной подгруппе — это в точности одноэлементные подмножества, т. е. элементы группы G , при этом

$$x\{e\} \cdot y\{e\} = xy\{e\} = xy.$$

Таким образом, биекция $x\{e\} \mapsto x$, $G/\{e\} \rightarrow G$ является изоморфизмом групп.

2) Пусть $H = G \triangleleft G$. Тогда имеем один смежный класс $\bar{e} = eG = G$. Итак, $G/G = \{\bar{e}\}$, $|G/G| = 1$.

3) Группа \mathbb{Z}_n вычетов по модулю n как фактор-группа группы $(\mathbb{Z}, +)$ по подгруппе $n\mathbb{Z}$. Пусть $G = \mathbb{Z}$ — группа целых чисел с операцией сложения, n — натуральное число и $H = n\mathbb{Z} = \{nq \mid q \in \mathbb{Z}\}$ — подгруппа целых чисел, делящихся на n . Для $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим смежный класс

$$C_k = k + n\mathbb{Z} = \{k + nq \mid q \in \mathbb{Z}\}.$$

Ясно, что $C_k = C_l$ для $l \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $k - l = nq$. Так как $k = nq + r$, где $q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$, то $C_k = C_r$. Таким образом, множество всех различных смежных классов $\mathbb{Z}_n = G/H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{C_0, C_1, \dots, C_{n-1}\}$ находится в биективном соответствии с остатками $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ при делении на число n . Если $k, l \in \mathbb{Z}$ и $k + l = nq + r$, то

$$C_k + C_l = (k + n\mathbb{Z}) + (l + n\mathbb{Z}) = (k + l) + n\mathbb{Z} = r + n\mathbb{Z} = C_r.$$

Таким образом, операция сложения фактор-группы $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в точности соответствует операции сложения остатков при делении на n по

модулю числа n (т. е. сначала надо сложить остатки как целые числа, а затем от суммы взять остаток при ее делении на n). Таким образом, \mathbb{Z}_n — группа.

4) В фактор-группе \mathbb{Q}/\mathbb{Z} любой элемент имеет конечный порядок; для любого натурального числа n существует единственная подгруппа группы \mathbb{Q}/\mathbb{Z} порядка n .

5) Фактор-группа \mathbb{R}/\mathbb{Z} имеет естественную интерпретацию как группа $T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ единичной окружности (или поворотов плоскости вокруг начала координат против часовой стрелки на угол φ , что равносильно умножению на комплексное число $\cos \varphi + i \sin \varphi$), а именно биекция

$$f: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow T, \quad f(r + \mathbb{Z}) = \cos 2\pi r + i \sin 2\pi r,$$

осуществляет изоморфизм групп \mathbb{R}/\mathbb{Z} и T .

ТЕОРЕМЫ О ГОМОМОРФИЗМАХ

ТЕОРЕМА 6 (О ГОМОМОРФИЗМЕ ДЛЯ ГРУПП). Пусть $f: G \rightarrow G'$ — сюръективный гомоморфизм (т. е. гомоморфизм из группы G на группу G'). Тогда существует изоморфизм

$$\psi: G/\ker f \rightarrow G'$$

такой, что $f = \psi\pi$, где $\pi: G \rightarrow G/\ker f$ — канонический гомоморфизм из группы G на фактор-группу $G/\ker f$ по нормальной подгруппе $\ker f$ (ядро гомоморфизма f).

Доказательство. Для смежного класса $x \ker f$, $x \in G$, положим $\psi(x \ker f) = f(x)$.

Корректность отображения $\psi: G/\ker f \rightarrow G'$. Если для $y \in G$ имеем $x \ker f = y \ker f$, то $x^{-1}y \in \ker f$, поэтому $e' = f(x^{-1}y) = f(x)^{-1}f(y)$, следовательно, $f(x) = f(y)$.

Покажем, что ψ — биекция.

а) Если для $x, y \in G$ имеем $f(x) = \psi(x \ker f) = \psi(y \ker f) = f(y)$, то $f(x^{-1}y) = f(x)^{-1}f(y) = e'$, т. е. $x^{-1}y \in \ker f$. Поэтому $x \ker f = y \ker f$, т. е. ψ — инъекция.

б) Если $g' \in G'$, то $g' = f(x)$ для некоторого $x \in G$ (поскольку f — сюръекция). Тогда $g' = f(x) = \psi(x \ker f)$, т. е. ψ — сюръекция.

Проверим, что ψ — гомоморфизм групп. Действительно, для $x, y \in G$ имеем

$$\begin{aligned}\psi(x \ker f \cdot y \ker f) &= \psi(xy \ker f) = f(xy) = \\ &= f(x)f(y) = \psi(x \ker f)\psi(y \ker f).\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что $\psi: G/\ker f \rightarrow G'$ — изоморфизм.

Проверим, что $f = \psi\pi$. Действительно, для $x \in G$ имеем

$$(\psi\pi)(x) = \psi(\pi(x)) = \psi(x \ker f) = f(x). \quad \square$$

Теорема о гомоморфизме является эффективным средством для вычисления фактор-групп.

ПРИМЕР 4. Пусть $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $H = (\mathbb{R}^*, \cdot) \subset G$.

Рассмотрим сюръективный гомоморфизм

$$f: G = \mathbb{C}^* \rightarrow T = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

для которого $f(z) = \frac{z^2}{|z|^2}$ для $z \in \mathbb{C}^*$. Тогда $\ker f = H = \{\mathbb{R}^*, \cdot\}$. В силу теоремы о гомоморфизме

$$T \cong G/\ker f = \mathbb{C}^*/\mathbb{R}^*. \quad \square$$

ТЕОРЕМА 7 (ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМЕ). Пусть H — подгруппа группы G , K — нормальная подгруппа группы G (HK — подгруппа группы G). Тогда:

- 1) $H \cap K \triangleleft H$ и $K \triangleleft HK$;
- 2) $HK/K \cong H/H \cap K$.

Доказательство. Нас интересуют четыре подгруппы:

$$\begin{array}{ccc} & HK & \\ & \triangleleft & \supseteq \\ K & & H \\ & \supseteq & \triangleleft \\ & H \cap K & \end{array}$$

1) Так как $K \triangleleft G$, то $H \cap K \triangleleft H$. Если $h \in H$, $k \in K$, то

$$(hk)^{-1}K hk = k^{-1}(h^{-1}K h)k = k^{-1}K k \subseteq K,$$

т. е. $K \triangleleft HK$.

2) Рассмотрим канонический эпиморфизм

$$\pi_K: G \rightarrow G/K$$

и его ограничение на H

$$\pi_K|_H: H \rightarrow \pi_K(H) \subseteq G/K.$$

Ясно, что $\ker \pi_K|_H = H \cap \ker \pi_K = H \cap K$.

Далее, для $h \in H$ и $k \in K$ имеем

$$\pi_K(h) = hK \subseteq HK/K, \quad (hk)K = hK = \pi_K(h)$$

т. е. $HK/K \subseteq \pi_K(H)$. Таким образом,

$$\text{Im}(\pi_K|_H) = \pi_K(H) = HK/K.$$

В силу первой теоремы о гомоморфизмах (ее следствия)

$$HK/K = \text{Im}(\pi_K|_H) \cong H/\ker(\pi_K|_H) = H/H \cap K. \quad \square$$

УПРАЖНЕНИЕ 5. 1) Пусть H — подгруппа группы \mathbf{S}_n , $H \not\subseteq \mathbf{A}_n$ (т. е. подгруппа H содержит нечетную подстановку). Тогда

$$H/(H \cap \mathbf{A}_n) \cong \mathbb{Z}_2$$

(другими словами, $H \cap \mathbf{A}_n$ — подгруппа группы H индекса 2).

Доказательство. Если $h \in H$, $h \notin \mathbf{A}_n$, то $h\mathbf{A}_n = \mathbf{S}_n \setminus \mathbf{A}_n$. Следовательно, $H\mathbf{A}_n = \mathbf{S}_n$. Применяя вторую теорему о гомоморфизмах для $K = \mathbf{A}_n$, получаем

$$H/(H \cap \mathbf{A}_n) \cong (H\mathbf{A}_n)/\mathbf{A}_n = \mathbf{S}_n/\mathbf{A}_n \cong \mathbb{Z}_2. \quad \square$$

2) Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$, $d = \text{НОД}(m, n)$, $l = \text{НОК}(m, n)$. Тогда

$$d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = (m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z})/n\mathbb{Z} \cong m\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$$

($dl = mn$). □

3) Пусть G — конечная группа, $H \triangleleft G$, $(|H|, |G/H|) = 1$. Тогда H — единственная подгруппа группы G порядка $|H|$.

Доказательство. Если $K \subseteq G$, $|K| = |H|$, то $K/K \cap H \cong KH/H \subseteq G/H$ и $|KH/H| = \frac{|KH|}{|H|} = \frac{|K|}{|K \cap H|}$, при этом $|K|/|K \cap H|$ — делитель числа $|G/H|$. Так как $(|H|, |G/H|) = 1$ и $|K| = |H|$, то $|K|/|K \cap H| = 1$, и поэтому $K = K \cap H$, следовательно, $K = H$. □

ТЕОРЕМА 8 (ТРЕТЬЯ ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМАХ). Пусть $G \xrightarrow{f} G'$ — сюръективный гомоморфизм, $K = \ker f \triangleleft G$ (например, если $K \triangleleft G$, то $f = \pi_K: G \rightarrow G/K$), $H' \subseteq G'$ — подгруппа, $H = f^{-1}(H') = \{g \in G \mid f(g) \in H'\}$ — ее полный прообраз при отображении f (ясно, что $H \supseteq K$, поскольку $f(K) = e'$). Тогда:

1) естественные соответствия

$$\begin{aligned} H &\mapsto f(H) = H', \\ H &= f^{-1}(H')H' \end{aligned}$$

устанавливают естественную биекцию между множеством подгрупп H группы G , содержащих нормальную подгруппу K , и множеством всех подгрупп H' группы G' ;

2) при этом соответствии $H \triangleleft G$ тогда и только тогда, когда $H' \triangleleft G'$, и $G'/H' \cong G/H$ (в частности, $(G/K)/(H/K) \cong G/H$ для $G \triangleleft H \triangleleft K$).

Доказательство. 1) Ясно, что в нашем случае $f(f^{-1}(H')) = H'$. Пусть теперь H — подгруппа группы G и $H \supseteq K$. Тогда $f^{-1}(f(H)) \supseteq H$. Если $g \in G$ и $f(g) \in f(H)$, т. е. $f(g) = f(h)$ для $h \in H$, то $f(h^{-1}g) =$

$f(h)^{-1}f(g) = e'$, следовательно, $h^{-1}g \in \ker f = K \subseteq H$, т. е. $g \in hH = H$.
Итак, $f^{-1}(f(H)) = H$.

2) Если $H \triangleleft G$, $H \supseteq K$, и $g' = f(g) \in G'$, и $a = g(h) \in f(H)$, $h \in H$, то $(g')^{-1}ag' = f(g)^{-1}f(h)f(g) = f(g^{-1}hg) \in f(H)$, т. е. $f(H) \triangleleft G'$.

Если $H' \triangleleft G'$, $g \in G$, $x \in H = f^{-1}(H')$, т. е. $f(x) \in H'$, то $f(g^{-1}xg) = f(g)^{-1}f(x)f(g) \in H'$, поэтому $g^{-1}xg \in f^{-1}(H')$, т. е. $f^{-1}(H') \triangleleft G$.

Рассмотрим теперь сюръективный гомоморфизм

$$\psi = \pi_{H'} \cdot f: G \xrightarrow{f} G' \xrightarrow{\pi_{H'}} G'/H'.$$

Если $g \in G$, то $\psi(g) = f(g)H' = H'$ тогда и только тогда, когда $f(g) \in H'$, т. е.

$$\ker \psi = f^{-1}(H') = H.$$

В силу первой теоремы о гомоморфизмах для ψ

$$G/H = G/\ker \psi \cong G'/H'.$$

В ситуации $G \triangleleft H \triangleleft K$ и $f = \pi_K: G \rightarrow G' = G/K$, $H' = f(H) = H/K \triangleleft G'/K$, имеем по доказанному $G/H \cong G'/H' = (G/K)/(H/K)$. \square