ЛЕКЦИЯ 4

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП

АВТОМОРФИЗМЫ ГРУПП

ВНУТРЕННИЕ АВТОМОРФИЗМЫ

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

Сначала рассмотрим *внутреннее прямое произведение нормальных подгрупп*: будем говорить, что группа G является *внутренним произведением своих нормальных подгрупп* H и K, $H \lhd G$, $K \lhd G$, если $G = HK$ и $H \cap K = \{e\}$ (обозначение: $G = H \times K$).

Выведем основные свойства конструкции $G = H \times K$.

Лемма 1. *Если H и K — нормальные подгруппы группы G, $H \lhd G$, $K \lhd G$, и $H \cap K = \{e\}$, то $hk = kh$ для любых $h \in H$, $k \in K$.*

Доказательство. Так как $H \lhd G$ и $K \lhd G$, то

$$[k, h] = (k^{-1}h^{-1}k)h = k^{-1}(h^{-1}kh) \in H \cap K = \{e\},$$

поэтому $hk = kh$. $\square$

Так как $G = HK$, то любой элемент $g \in G$ представи́м в виде $g = hk$, $h \in H$, $k \in K$. Покажем единственность этого представления. Если $g = hk = h'k'$, $h' \in H$, $k' \in K$, то

$$(h')^{-1}h = k'k^{-1} \in H \cap K = \{e\},$$

и поэтому $h' = h$, $k' = k$.

Если $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$, то по лемме 1 $k_1h_2 = h_2k_1$, и поэтому

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1(k_1h_2)k_2 = h_1(h_2k_1)k_2 = (h_1h_2)(k_1k_2).$$

Пример 1. Пусть

$$G = \mathbf{V}_4 = \{e, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \subseteq \mathbf{S}_4,$$
$$H = \{e, (1\,2)(3\,4)\}, \quad K = \{e, (1\,3)(2\,4)\}, \quad L = \{e, (1\,4)(2\,3)\}.$$

Так как четверная группа Клейна $\mathbf{V}_4$ абелева, то все подгруппы в ней нормальны. Ясно, что

$$H \cap K = K \cap L = H \cap L = \{e\};$$
$$HK = KL = HL = \mathbf{V}_4.$$

Таким образом,

$$\mathbf{V}_4 = H \times K = K \times L = H \times L.$$

Замечание 1. Определение внутреннего прямого произведения можно распространить на любое конечное множество нормальных подгрупп $H_i \lhd G$, $1 \le i \le m$, где

$$G = H_1 H_2 \ldots H_m$$

и

$$H_i \cap \left\langle \bigcup_j H_j,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ j \neq i \right\rangle = \{e\}$$

(обозначение: $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m$).

В этом случае: $h_i h_j = h_j h_i$ для $h_i \in H_i$, $h_j \in H_j$, $i \neq j$; каждый элемент $g \in G$ единственным образом представляется в виде $g = h_1 h_2 \ldots h_m$, $h_i \in H_i$; при этом

$$(h_1 h_2 \ldots h_m)(h'_1 h'_2 \ldots h'_m) = (h_1 h'_1)(h_2 h'_2) \ldots (h_m h'_m).$$

Перейдем к рассмотрению конструкции *внешнего прямого произведения.* Пусть нам дано конечное множество групп $G_1, G_2, \ldots, G_m$ (в отличие от внутренней конструкции, они не предполагаются подгруппами одной группы). Рассмотрим множество

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m = \{(g_1, g_2, \ldots, g_m) \mid g_i \in G\}$$

с бинарной операцией

$$(g_1, g_2, \ldots, g_m)(g_1', g_2', \ldots, g_m') = (g_1 g_1', g_2 g_2', \ldots, g_m g_m'), \quad g_i, g_i' \in G_i.$$

Ясно, что эта операция ассоциативна, $e = (e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, e_{G_m})$ — нейтральный элемент, $(g_1, g_2, \ldots, g_m)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, \ldots, g_m^{-1})$.

Итак, G — группа, называемая *внешним прямым произведением групп* $G_1, G_2, \ldots, G_m$ (обозначение: $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$).

Группа G_i не является подгруппой внешнего прямого произведения $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$, но в G имеется подгруппа G_i', изоморфная группе G_i, а именно

$$G_i' = \left\{(e_{G_1}, e_{G_2}, \ldots, \underset{i}{a}, \ldots, e_{G_m}) \;\middle|\; a \in G_i\right\}.$$

Так как для $g_i, h_i \in G_i$ имеем

$$\begin{aligned}(g_1, g_2, \ldots, g_m)^{-1}(h_1, h_2, \ldots, h_m)(g_1, g_2, \ldots, g_m) = \\ = (g_1^{-1} h_1 g_1, g_2^{-1} h_2 g_2, \ldots, g_m^{-1} h_m g_m),\end{aligned}$$

то G_i' — нормальная подгруппа в G, $G_i' \lhd G$. Кроме того,

$$G = G_1' G_2' \ldots G_m',$$
$$G_i' \cap \left\langle \bigcup G_j' \;\middle|\; j = 1, \ldots, m,\ j \neq i \right\rangle = \{e\}.$$

Итак, внешнее прямое произведение групп $G_1, G_2, \ldots, G_m$ является внутренним прямым произведением своих подгрупп G_i', $G_i' \cong G_i$:

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m = G_1' \times G_2' \times \ldots \times G_m'.$$

Кроме того, из анализа строения внутреннего прямого произведения $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m$ нормальных подгрупп $H_i \lhd G$, $1 \le i \le m$, мы видим, что группа G изоморфна внешнему прямому произведению групп H_i, $1 \le i \le m$, при соответствии

$$g = h_1 h_2 \ldots h_m \mapsto (h_1, h_2, \ldots, h_m).$$

В дальнейшем мы будем использовать термин “прямое произведение групп” без упоминания прилагательных “внутреннее” и “внешнее”, понимая, что это разные описания одной и той же конструкции.

Замечание 2. 1) Ясно, что прямое произведение групп $G = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m$ является коммутативной группой тогда и только тогда, когда все группы $H_1, \ldots, H_m$ коммутативны.

2) Пусть A, B, A', B' — группы, $A \cong A'$, $B \cong B'$, $G = A \times B$, $G' = A' \times B'$. Тогда $G \cong G'$.

3) Для прямых разложений возможно, что $G = H_1 \times H_2 = K_1 \times K_2$, но $H_i \ncong K_j$, $i, j \in \{1, 2\}$. *Действительно,*

$$\mathbb{Z}_{30} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_6.$$

Теорема 1. *Пусть $G_i = (a_i)$, $O(a_i) = n_i$, $i = 1, \ldots, m$, — циклические группы порядка n_i. Тогда прямое произведение $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$ является циклической группой тогда и только тогда, когда порядки $n_1, n_2, \ldots, n_m$ попарно взаимно просты.*

Доказательство. 1) Пусть числа $n_1, n_2, \ldots, n_m$ попарно взаимно просты и $(a_1, a_2, \ldots, a_m)^k = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$, $k > 0$. Тогда $a_i^k = e_i$ для всех $1 \leq i \leq m$. Поэтому $k = n_i q_i$ и k делится на число $|G| = n = n_1 n_2 \ldots n_m$. Итак, $O\big((a_1, a_2, \ldots, a_m)\big) = n = |G|$, и следовательно, $G = \big((a_1, a_2, \ldots, a_m)\big)$ — циклическая группа с циклическим образующим $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

2) Если $(n_i, n_j) = d > 1$, то

$$l = \text{НОК}(n_1, n_2, \ldots, n_m) < n = n_1 n_2 \ldots n_m,$$

и поэтому

$$(g_1, g_2, \ldots, g_m)^l = (g_1^l, g_2^l, \ldots, g_m^l) = (e_1, e_2, \ldots, e_m).$$

Таким образом, в группе $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_m$ нет элемента порядка $n = |G|$, и следовательно, группа G не является циклической. $\square$

Следствие 1. *Если $n = p_1^{l_1} \dots p_m^{l_m}$, где $p_1, \dots, p_m$ — различные простые числа, $l_i > 0$, $1 \le i \le m$, то*

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{l_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{l_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_m^{l_m}},$$

при этом примарные циклические сомножители $\mathbb{Z}_{p_i^{l_i}}$ далее в прямое произведение неразложимы.

АВТОМОРФИЗМЫ ГРУПП

Напомним, что *автоморфизмом* группы G называется биекция $f\colon G \to G$, являющаяся гомоморфизмом. Через $\mathrm{Aut}\,(G)$ обозначим множество всех автоморфизмов группы G.

Лемма 2. *Если G — группа, то $\mathrm{Aut}\,(G)$ — группа, являющаяся подгруппой группы подстановок $\mathbf{S}(G)$, $\mathrm{Aut}\,(G) \subseteq \mathbf{S}(G)$.*

Доказательство. Так как произведение автоморфизмов — автоморфизм (из свойств гомоморфизмов и изоморфизмов), то операция произведения в группе подстановок $\mathbf{S}(G)$ на множестве G не выводит нас из $\mathrm{Aut}\,(G)$.

Ассоциативность этой операции на $\mathrm{Aut}\,(G)$ является следствием ассоциативности операции умножения в $\mathbf{S}(G)$. Ясно, что тождественное отображение 1_G является автоморфизмом и нейтральным элементом в $\mathrm{Aut}\,(G)$. Если $f \in \mathrm{Aut}\,(G)$, то f^{-1} также автоморфизм (из свойств гомоморфизмов и изоморфизмов). Итак, $\mathrm{Aut}\,(G)$ — группа, являющаяся подгруппой группы подстановок $\mathbf{S}(G)$ на множестве G. □

Пример 2 (автоморфизмов групп). 1) Как мы уже отметили, тождественное отображение 1_G является автоморфизмом любой группы G.

2) Если $(A, +)$ — абелева группа, то отображение $\alpha\colon A \to A$, где $\alpha(a) = -a$ для $a \in A$, является автоморфизмом. *Действительно*, α — биекция, при этом

$$\alpha(x + y) = -(x + y) = -x - y = \alpha(x) + \alpha(y),$$

т. е. α — гомоморфизм. Итак, α — автоморфизм.

Лемма 3. $\alpha \in \operatorname{Aut}(G) \implies O\big(\alpha(g)\big) = O(g)\ \forall g \in G$.

Теорема 2. *Пусть* $G = G(a)$ *— циклическая группа с образующим элементом* a. *Тогда*:

1) *если* $|G| = O(a) = \infty$ (*т. е. если* G *— бесконечная циклическая группа,* $G \cong (\mathbb{Z}, +)$), *то* $\operatorname{Aut}\big((\mathbb{Z}, +)\big) \cong \mathbb{Z}_2$, $|\operatorname{Aut}(G)| = 2$;

2) *если* $|G| = O(a) = n < \infty$, $G \cong \mathbb{Z}_n$, *то* $\operatorname{Aut}\big((\mathbb{Z}_n, +)\big) \cong \mathbf{U}(\mathbb{Z}_n)$, $\big|\operatorname{Aut}\big((\mathbb{Z}_m, +)\big)\big| = \varphi(m)$, *где* $\varphi(m)$ *— функция Эйлера.*

Доказательство. Пусть $G = (a)$ — циклическая группа.

Случай 1: $G = (a)$, $O(a) = \infty$, $G \cong (\mathbb{Z}, +)$, — бесконечная циклическая группа. Если $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ — автоморфизм группы $(\mathbb{Z}, +)$, то f полностью определяется целым числом $n = f(1) \in \mathbb{Z}$, поскольку

$$f(m) = f(m \cdot 1) = mf(1) = mn$$

для всех $m \in \mathbb{Z}$. Так как f — сюръекция, то $1 = f(t)$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$1 = f(t) = f(t \cdot 1) = tf(1) = tn.$$

Таким образом, $n = \pm 1$. Итак, либо $f = 1_{\mathbb{Z}}$ ($f(1) = 1$), либо $f(m) = -m$ для всех $m \in \mathbb{Z}$ ($f(1) = -1$). Следовательно, $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z})| = 2$, т. е. $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.

Случай 2: пусть $G = (a)$, $n = |G| = O(a) < \infty$, $f\colon G \to G$ — автоморфизм.

а) Ясно, что f полностью определяется элементом $f(a) \in G$, поскольку $f(a^k) = f(a)^k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Так как f — изоморфизм, то $O\big(f(a)\big) = O(a) = n$, т. е. $f(a)$ — образующий циклической группы $G = (a)$, и поэтому $f(a) = a^i$, где $1 \leq i < m$, $(i, m) = 1$.

б) Если же $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i < n$, $(i, n) = 1$, то отображение $f\colon G \to G$, $f(g) = g^i$ для всех $g \in G$, является гомоморфизмом, поскольку $G = (a)$ — абелева группа:

$$f(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^i = g_1^i g_2^i = f(g_1) f(g_2)$$

для всех $g_1, g_2 \in G$.

Так как $f(a) = a^i$ и $(i, n) = 1$, то

$$O\big(f(a)\big) = O(a^i) = \frac{n}{(i, n)} = n,$$

поэтому $f(a)$ является образующим группы $G = (a)$, и следовательно, $\operatorname{Im} f = G$, т. е. $f\colon G \to G$ — сюръективное отображение. Но G — конечное множество, поэтому f — биекция, т. е. $f \in \operatorname{Aut}(G)$.

в) Итак, мы описали строение всех автоморфизмов $f \in \operatorname{Aut}(G)$, где $G = (a)$, $|G| = O(a) = n < \infty$, $G \cong \mathbb{Z}_n$, доказав, что $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbf{U}(\mathbb{Z}_n, \cdot)$. Из этого описания следует, что $|\operatorname{Aut}(G)| = \varphi(n)$ для $G = (a)$, $|G| = O(a) = n < \infty$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. □

Упражнение 1. Найдите все такие группы G, что $\operatorname{Aut}(G)$ — тривиальная группа.

ВНУТРЕННИЕ АВТОМОРФИЗМЫ

Определение 1. Пусть G — группа, $g, x \in G$. Элемент $gxg^{-1} \in G$ называется элементом, *сопряженным с элементом x с помощью элемента g* (иногда используется обозначение $gxg^{-1} = x^g$).

Лемма 4. *Пусть G — группа. Для каждого элемента $g \in G$ отображение*

$$\tau(g)\colon G \to G, \quad \tau(g)(x) = gxg^{-1} \ \ \textit{для} \ \ x \in G,$$

является автоморфизмом группы G (называемым внутренним автоморфизмом группы G, индуцированным элементом $g \in G$*).*

Доказательство. 1) Если $x, y \in G$, то

$$\tau(g)(xy) = g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = (\tau(g)x)\big(\tau(g)(y)\big),$$

т. е. $\tau(g)\colon G \to G$ — гомоморфизм групп.

2) Так как $\tau(g^{-1}) = \tau(g)^{-1}$, то $\tau(g)$ — биекция, и поэтому $\tau(g)$ — автоморфизм группы G. $\square$

Соберем вместе свойства отображения $\tau\colon G \to \mathrm{Aut}\,(G)$.

Теорема 3 (свойства внутренних автоморфизмов). *Пусть G — группа. Тогда*:

1) *отображение $\tau\colon G \to \mathrm{Aut}\,(G)$, $\tau(g)(x) = gxg^{-1}$, $g \in G$, $x \in G$, является гомоморфизмом групп (называемым* гомоморфизмом сопряжения);

2) *образ гомоморфизма $\tau\colon G \to \mathrm{Aut}\,(G)$, т. е. совокупность $\mathrm{Inn}\,(G) = \{\tau(g) \in \mathrm{Aut}\,(G) \mid g \in G\} = \mathrm{Im}\,\tau$ всех внутренних автоморфизмов $\tau(g)$, $g \in G$, является нормальной подгруппой группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,(G)$ (группа $\mathrm{Inn}\,(G)$ называется* группой внутренних автоморфизмов группы G);

3) $\ker(\tau) = \mathbf{Z}(G)$, *т. е. ядро $\ker(\tau)$ гомоморфизма τ совпадает с центром $\mathbf{Z}(G)$ группы G*;

4) $\mathrm{Inn}\,(G) \cong G/\mathbf{Z}(G)$, *группа $\mathrm{Inn}\,(G)$ внутренних автоморфизмов изоморфна фактор-группе группы G по ее центру $\mathbf{Z}(G)$*;

Доказательство. 1) Если $g, h \in G$, то

$$\tau(gh)(x) = (gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = \tau(g)\big(\tau(h)(x)\big)$$

для всех $x \in G$. Итак, $\tau(gh) = \tau(g)\tau(h)$ для всех $g, h \in G$, т. е. $\tau\colon G \to \mathrm{Aut}\,(G)$ — гомоморфизм групп.

2) Совокупность $\mathrm{Inn}\,(G) = \{\tau(g) \in \mathrm{Aut}\,(G) \mid g \in G\}$ всех внутренних автоморфизмов $\tau(g)$, $g \in G$, в группе $\mathrm{Aut}\,(G)$ как образ гомоморфизма τ является подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,(G)$.

Если $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(G)$ и $g \in G$, $x \in G$, то

$$\tau\big(\alpha(g)\big)(x) = \alpha(g)x\alpha(g)^{-1} = \alpha(g)x\alpha(g^{-1}) = \\ = \alpha(g\alpha^{-1}(x)g^{-1}) = \alpha\Big(\tau(g)\big(\alpha^{-1}(x)\big)\Big) = (\alpha\tau(g)\alpha^{-1})(x),$$

поэтому
$$\alpha\tau(g)\alpha^{-1} = \tau\big(\alpha(g)\big) \in \operatorname{Inn}(G),$$
следовательно,
$$\operatorname{Inn}(G) \lhd \operatorname{Aut}(G).$$

3) Элемент $g \in G$ принадлежит ядру $\ker\tau$ гомоморфизма τ тогда и только тогда, когда $\tau(g)(x) = x$ для всех $x \in G$, т. е. $gxg^{-1} = x$, или $gx = xg$, но это означает, что $g \in \mathbf{Z}(G)$. Итак, $\ker\tau = \mathbf{Z}(G)$.

4) В силу теоремы о гомоморфизме для сюръективного гомоморфизма $\tau\colon G \to \operatorname{Inn}(G)$ имеем
$$\operatorname{Inn}(G) = \operatorname{Im}\tau \cong G/\ker\tau = G/\mathbf{Z}(G).$$

□

ПРИМЕРЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

1) *Циклические группы* $G = \langle a\rangle$, поскольку $a^m a^n = a^{m+n} = a^n a^m$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}$.

2) Прямые суммы $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ и прямые произведения $\prod\limits_{i\in I} A_i$ абелевых групп A_i, $i \in I$, являются абелевыми группами.

3) *Аддитивная группа рациональных чисел* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +)$ (эта группа без кручения, она является делимой (для любого $a \in \mathbb{Q}$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ уравнение $nx = a$ разрешимо в $\mathbb{Z}$) и по этой причине не является прямой суммой циклических групп).

4) *Квазициклическая группа* $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — группа по умножению всех корней степени p^n, где p — фиксированное простое число, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\ldots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+2} \to \ldots$$

называется *точной последовательностью*, если

$$\operatorname{Im} f_i = \ker f_{i+1} \ \forall i \in \mathbb{N},$$

и называется *комплексом* абелевых групп, если

$$f_{i+1} f_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$$

(это равносильно тому, что $\operatorname{Im} f_i \subseteq \ker f_{i+1}$, и поэтому в этом случае можно рассмотреть фактор-группу $D_{i+1} = \ker f_{i+1} / \operatorname{Im} f_i$, называемую $(i+1)$-*й группой гомологий* комплекса).

Следующие примеры точных последовательностей наиболее употребительны в нашем курсе:

1) точность последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{i} B$$

означает, что $\ker i = 0$, т. е. i — инъективный гомоморфизм (мономорфизм);

2) точность последовательности

$$B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

означает, что $\operatorname{Im} \pi = C$, т. е. π — сюръективный гомоморфизм;

3) точность последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

означает, что $\ker i = 0$, $\operatorname{Im} i = \ker \pi$, $\operatorname{Im} \pi = C$, т. е. что $A \cong \operatorname{Im} i$, $B / \operatorname{Im} i = B / \ker \pi \cong C$ (в частности, для сюръективного гомоморфизма $f\colon A \to B$ имеем короткую точную последовательность

$$0 \to \ker f \subseteq A \xrightarrow{f} \operatorname{Im} f = B \to 0).$$

Лемма 5 (о ретракте абелевых групп). *Пусть G и G' — абелевы группы.*

1) *Если $f\colon G \to G'$, $h\colon G' \to G$ — гомоморфизмы и $fh = 1_{G'}$ (пара f, h — ретракт), то*:

а) $\ker h = 0$;

б) $\operatorname{Im} f = G'$;

в) $\operatorname{Im} h \oplus \ker f = G$.

2) *Если $f\colon G \to G'$ — гомоморфизм,*

$$\operatorname{Im} f = G' \ \text{и} \ A \oplus \ker f = G$$

для некоторой подгруппы $A \subseteq G$, то существует гомоморфизм $h\colon G' \to G$, для которого $fh = 1_{G'}$.

3) *Если $h\colon G' \to G$ — гомоморфизм,*

$$\ker h = 0 \ \text{и} \ \operatorname{Im} h \oplus B = G$$

для некоторой подгруппы $B \subseteq G$, то существует гомоморфизм $f\colon G \to G'$, для которого $fh = 1_{G'}$.

Доказательство.

1а) Если $y \in \ker h \subseteq G'$, то $h(y) = 0$, и поэтому

$$y = 1_{G'}(y) = (fh)(y) = f\bigl(h(y)\bigr) = f(0) = 0.$$

Итак, $\ker h = 0$.

1б) Если $y \in G'$, то

$$y = 1_{G'}(y) = (fh)(y) = f\bigl(h(y)\bigr) \in \operatorname{Im} f.$$

Итак, $\operatorname{Im} f = G'$.

1в) Если $x \in G$, то $x = h\bigl(f(x)\bigr) + \bigl(x - (hf)(x)\bigr)$, при этом, поскольку $fh = 1_{G'}$,

$$f\bigl(x - (hf)(x)\bigr) = f(x) - (fhf)(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

поэтому $x - (hf)(x) \in \ker f$, $h\bigl(f(x)\bigr) \in \operatorname{Im} h$. Таким образом, $G = \operatorname{Im} h + \ker f$.

Если $z \in \operatorname{Im} h \cap \ker f$, то $z = h(y)$ для $y \in G'$ и $f(z) = 0$, поэтому

$$y = 1_{G'}(y) = (fh)(y) = f\bigl(h(y)\bigr) = f(z) = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{Im} h \cap \ker f = 0$.

Итак, $G = \operatorname{Im} h \oplus \ker f$.

2) Так как для $f|_A \colon A \to G'$ имеем

$$f|_A(A) = f(A \oplus \ker f) = f(G) = G',$$
$$\ker(f|_A) = \ker f \cap A = 0,$$

то $f|_A \colon A \to G'$ — изоморфизм.

Положим

$$h = (f|_A)^{-1} \colon G' \to A \subseteq G.$$

Тогда

$$fh = f(f|_A)^{-1} = 1_{G'}.$$

3) Гомоморфизм $h \colon G' \to \operatorname{Im} h$ является изоморфизмом, поскольку $\ker h = 0$. Рассмотрим изоморфизм $h^{-1} \colon \operatorname{Im} h \to G'$. Пусть $\pi \colon G = \operatorname{Im} h \oplus B \to \operatorname{Im} h$ — проекция на первое прямое слагаемое. Рассмотрим гомоморфизм

$$f = h^{-1}\pi \colon G = \operatorname{Im} h \oplus B \xrightarrow{\pi} \operatorname{Im} h \xrightarrow{h} G'.$$

Тогда для $g' \in G'$ имеем

$$(fh)(g') = f\bigl(h(g')\bigr) = h^{-1}\Bigl(\pi\bigl(h(g')\bigr)\Bigr) = h^{-1}\bigl(h(g')\bigr) = g'.$$

Таким образом, $fh = 1_{G'}$. $\square$