

ЛЕКЦИЯ 4

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП

АВТОМОРФИЗМЫ ГРУПП

ВНУТРЕННИЕ АВТОМОРФИЗМЫ

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

Сначала рассмотрим *внутреннее прямое произведение нормальных подгрупп*: будем говорить, что группа G является *внутренним произведением своих нормальных подгрупп* H и K , $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, если $G = HK$ и $H \cap K = \{e\}$ (обозначение: $G = H \times K$).

Выведем основные свойства конструкции $G = H \times K$.

ЛЕММА 1. *Если H и K — нормальные подгруппы группы G , $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, и $H \cap K = \{e\}$, то $hk = kh$ для любых $h \in H$, $k \in K$.*

Доказательство. Так как $H \triangleleft G$ и $K \triangleleft G$, то

$$[k, h] = (k^{-1}h^{-1}k)h = k^{-1}(h^{-1}kh) \in H \cap K = \{e\},$$

поэтому $hk = kh$. □

Так как $G = HK$, то любой элемент $g \in G$ представим в виде $g = hk$, $h \in H$, $k \in K$. Покажем единственность этого представления. Если $g = hk = h'k'$, $h' \in H$, $k' \in K$, то

$$(h')^{-1}h = k'k^{-1} \in H \cap K = \{e\},$$

и поэтому $h' = h$, $k' = k$.

Если $h_1, h_2 \in H$, $k_1, k_2 \in K$, то по лемме 1 $k_1h_2 = h_2k_1$, и поэтому

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1(k_1h_2)k_2 = h_1(h_2k_1)k_2 = (h_1h_2)(k_1k_2).$$

ПРИМЕР 1. Пусть

$$G = \mathbf{V}_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq \mathbf{S}_4,$$

$$H = \{e, (12)(34)\}, \quad K = \{e, (13)(24)\}, \quad L = \{e, (14)(23)\}.$$

Так как четверная группа Клейна \mathbf{V}_4 абелева, то все подгруппы в ней нормальны. Ясно, что

$$H \cap K = K \cap L = H \cap L = \{e\};$$

$$HK = KL = HL = \mathbf{V}_4.$$

Таким образом,

$$\mathbf{V}_4 = H \times K = K \times L = H \times L.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определение внутреннего прямого произведения можно распространить на любое конечное множество нормальных подгрупп $H_i \triangleleft G$, $1 \leq i \leq m$, где

$$G = H_1 H_2 \dots H_m$$

и

$$H_i \cap \left\langle \bigcup_j H_j, j = 1, 2, \dots, m, j \neq i \right\rangle = \{e\}$$

(обозначение: $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_m$).

В этом случае: $h_i h_j = h_j h_i$ для $h_i \in H_i, h_j \in H_j, i \neq j$; каждый элемент $g \in G$ единственным образом представляется в виде $g = h_1 h_2 \dots h_m$, $h_i \in H_i$; при этом

$$(h_1 h_2 \dots h_m)(h'_1 h'_2 \dots h'_m) = (h_1 h'_1)(h_2 h'_2) \dots (h_m h'_m).$$

Перейдем к рассмотрению конструкции *внешнего прямого произведения*. Пусть нам дано конечное множество групп G_1, G_2, \dots, G_m (в отличие от внутренней конструкции, они не предполагаются подгруппами одной группы). Рассмотрим множество

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m = \{(g_1, g_2, \dots, g_m) \mid g_i \in G_i\}$$

с бинарной операцией

$$(g_1, g_2, \dots, g_m)(g'_1, g'_2, \dots, g'_m) = (g_1g'_1, g_2g'_2, \dots, g_mg'_m), \quad g_i, g'_i \in G_i.$$

Ясно, что эта операция ассоциативна, $e = (e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, e_{G_m})$ — нейтральный элемент, $(g_1, g_2, \dots, g_m)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_m^{-1})$.

Итак, G — группа, называемая *внешним прямым произведением групп* G_1, G_2, \dots, G_m (обозначение: $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$).

Группа G_i не является подгруппой внешнего прямого произведения $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$, но в G имеется подгруппа G'_i , изоморфная группе G_i , а именно

$$G'_i = \{(e_{G_1}, e_{G_2}, \dots, a, \dots, e_{G_m}) \mid a \in G_i\}.$$

Так как для $g_i, h_i \in G_i$ имеем

$$\begin{aligned} (g_1, g_2, \dots, g_m)^{-1}(h_1, h_2, \dots, h_m)(g_1, g_2, \dots, g_m) &= \\ &= (g_1^{-1}h_1g_1, g_2^{-1}h_2g_2, \dots, g_m^{-1}h_mg_m), \end{aligned}$$

то G'_i — нормальная подгруппа в G , $G'_i \triangleleft G$. Кроме того,

$$\begin{aligned} G &= G'_1G'_2 \dots G'_m, \\ G'_i \cap \left\langle \bigcup_{j=1, \dots, m, j \neq i} G'_j \right\rangle &= \{e\}. \end{aligned}$$

Итак, внешнее прямое произведение групп G_1, G_2, \dots, G_m является внутренним прямым произведением своих подгрупп G'_i , $G'_i \cong G_i$:

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m = G'_1 \times G'_2 \times \dots \times G'_m.$$

Кроме того, из анализа строения внутреннего прямого произведения $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_m$ нормальных подгрупп $H_i \triangleleft G$, $1 \leq i \leq m$, мы видим, что группа G изоморфна внешнему прямому произведению групп H_i , $1 \leq i \leq m$, при соответствии

$$g = h_1h_2 \dots h_m \mapsto (h_1, h_2, \dots, h_m).$$

В дальнейшем мы будем использовать термин “прямое произведение групп” без упоминания прилагательных “внутреннее” и “внешнее”, понимая, что это разные описания одной и той же конструкции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 1) Ясно, что прямое произведение групп $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_m$ является коммутативной группой тогда и только тогда, когда все группы H_1, \dots, H_m коммутативны.

2) Пусть A, B, A', B' — группы, $A \cong A', B \cong B', G = A \times B, G' = A' \times B'$. Тогда $G \cong G'$.

3) Для прямых разложений возможно, что $G = H_1 \times H_2 = K_1 \times K_2$, но $H_i \not\cong K_j, i, j \in \{1, 2\}$. Действительно,

$$\mathbb{Z}_{30} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_6.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G_i = \langle a_i \rangle, O(a_i) = n_i, i = 1, \dots, m$, — циклические группы порядка n_i . Тогда прямое произведение $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$ является циклической группой тогда и только тогда, когда порядки n_1, n_2, \dots, n_m попарно взаимно просты.

Доказательство. 1) Пусть числа n_1, n_2, \dots, n_m попарно взаимно просты и $(a_1, a_2, \dots, a_m)^k = (e_1, e_2, \dots, e_m), k > 0$. Тогда $a_i^k = e_i$ для всех $1 \leq i \leq m$. Поэтому $k = n_i q_i$ и k делится на число $|G| = n = n_1 n_2 \dots n_m$. Итак, $O((a_1, a_2, \dots, a_m)) = n = |G|$, и следовательно, $G = \langle (a_1, a_2, \dots, a_m) \rangle$ — циклическая группа с циклическим образующим (a_1, a_2, \dots, a_m) .

2) Если $(n_i, n_j) = d > 1$, то

$$l = \text{НОК}(n_1, n_2, \dots, n_m) < n = n_1 n_2 \dots n_m,$$

и поэтому

$$(g_1, g_2, \dots, g_m)^l = (g_1^l, g_2^l, \dots, g_m^l) = (e_1, e_2, \dots, e_m).$$

Таким образом, в группе $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$ нет элемента порядка $n = |G|$, и следовательно, группа G не является циклической. \square

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $n = p_1^{l_1} \dots p_m^{l_m}$, где p_1, \dots, p_m — различные простые числа, $l_i > 0$, $1 \leq i \leq m$, то

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{l_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{l_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_m^{l_m}},$$

при этом примарные циклические сомножители $\mathbb{Z}_{p_i^{l_i}}$ далее в прямое произведение неразложимы.

АВТОМОРФИЗМЫ ГРУПП

Напомним, что *автоморфизмом* группы G называется биекция $f: G \rightarrow G$, являющаяся гомоморфизмом. Через $\text{Aut}(G)$ обозначим множество всех автоморфизмов группы G .

ЛЕММА 2. Если G — группа, то $\text{Aut}(G)$ — группа, являющаяся подгруппой группы подстановок $\mathbf{S}(G)$, $\text{Aut}(G) \subseteq \mathbf{S}(G)$.

Доказательство. Так как произведение автоморфизмов — автоморфизм (из свойств гомоморфизмов и изоморфизмов), то операция произведения в группе подстановок $\mathbf{S}(G)$ на множестве G не выводит нас из $\text{Aut}(G)$.

Ассоциативность этой операции на $\text{Aut}(G)$ является следствием ассоциативности операции умножения в $\mathbf{S}(G)$. Ясно, что тождественное отображение 1_G является автоморфизмом и нейтральным элементом в $\text{Aut}(G)$. Если $f \in \text{Aut}(G)$, то f^{-1} также автоморфизм (из свойств гомоморфизмов и изоморфизмов). Итак, $\text{Aut}(G)$ — группа, являющаяся подгруппой группы подстановок $\mathbf{S}(G)$ на множестве G . \square

ПРИМЕР 2 (АВТОМОРФИЗМОВ ГРУПП). 1) Как мы уже отметили, тождественное отображение 1_G является автоморфизмом любой группы G .

2) Если $(A, +)$ — абелева группа, то отображение $\alpha: A \rightarrow A$, где $\alpha(a) = -a$ для $a \in A$, является автоморфизмом. Действительно, α — биекция, при этом

$$\alpha(x + y) = -(x + y) = -x - y = \alpha(x) + \alpha(y),$$

т. е. α — гомоморфизм. Итак, α — автоморфизм.

ЛЕММА 3. $\alpha \in \text{Aut}(G) \implies O(\alpha(g)) = O(g) \forall g \in G$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = G(a)$ — циклическая группа с образующим элементом a . Тогда:

1) если $|G| = O(a) = \infty$ (т. е. если G — бесконечная циклическая группа, $G \cong (\mathbb{Z}, +)$), то $\text{Aut}((\mathbb{Z}, +)) \cong \mathbb{Z}_2$, $|\text{Aut}(G)| = 2$;

2) если $|G| = O(a) = n < \infty$, $G \cong \mathbb{Z}_n$, то $\text{Aut}((\mathbb{Z}_n, +)) \cong \mathbf{U}(\mathbb{Z}_n)$, $|\text{Aut}((\mathbb{Z}_n, +))| = \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

Доказательство. Пусть $G = (a)$ — циклическая группа.

Случай 1: $G = (a)$, $O(a) = \infty$, $G \cong (\mathbb{Z}, +)$, — бесконечная циклическая группа. Если $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ — автоморфизм группы $(\mathbb{Z}, +)$, то f полностью определяется целым числом $n = f(1) \in \mathbb{Z}$, поскольку

$$f(m) = f(m \cdot 1) = mf(1) = mn$$

для всех $m \in \mathbb{Z}$. Так как f — сюръекция, то $1 = f(t)$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$1 = f(t) = f(t \cdot 1) = tf(1) = tn.$$

Таким образом, $n = \pm 1$. Итак, либо $f = 1_{\mathbb{Z}}$ ($f(1) = 1$), либо $f(m) = -m$ для всех $m \in \mathbb{Z}$ ($f(1) = -1$). Следовательно, $|\text{Aut}(\mathbb{Z})| = 2$, т. е. $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.

Случай 2: пусть $G = (a)$, $n = |G| = O(a) < \infty$, $f: G \rightarrow G$ — автоморфизм.

а) Ясно, что f полностью определяется элементом $f(a) \in G$, поскольку $f(a^k) = f(a)^k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Так как f — изоморфизм, то $O(f(a)) = O(a) = n$, т. е. $f(a)$ — образующий циклической группы $G = (a)$, и поэтому $f(a) = a^i$, где $1 \leq i < n$, $(i, n) = 1$.

б) Если же $i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i < n$, $(i, n) = 1$, то отображение $f: G \rightarrow G$, $f(g) = g^i$ для всех $g \in G$, является гомоморфизмом, поскольку $G = (a)$ — абелева группа:

$$f(g_1g_2) = (g_1g_2)^i = g_1^i g_2^i = f(g_1)f(g_2)$$

для всех $g_1, g_2 \in G$.

Так как $f(a) = a^i$ и $(i, n) = 1$, то

$$O(f(a)) = O(a^i) = \frac{n}{(i, n)} = n,$$

поэтому $f(a)$ является образующим группы $G = \langle a \rangle$, и следовательно, $\text{Im } f = G$, т. е. $f: G \rightarrow G$ — сюръективное отображение. Но G — конечное множество, поэтому f — биекция, т. е. $f \in \text{Aut}(G)$.

в) Итак, мы описали строение всех автоморфизмов $f \in \text{Aut}(G)$, где $G = \langle a \rangle$, $|G| = O(a) = n < \infty$, $G \cong \mathbb{Z}_n$, доказав, что $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbf{U}(\mathbb{Z}_n, \cdot)$. Из этого описания следует, что $|\text{Aut}(G)| = \varphi(n)$ для $G = \langle a \rangle$, $|G| = O(a) = n < \infty$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1. Найдите все такие группы G , что $\text{Aut}(G)$ — тривиальная группа.

ВНУТРЕННИЕ АВТОМОРФИЗМЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G — группа, $g, x \in G$. Элемент $gxg^{-1} \in G$ называется элементом, сопряженным с элементом x с помощью элемента g (иногда используется обозначение $gxg^{-1} = x^g$).

ЛЕММА 4. Пусть G — группа. Для каждого элемента $g \in G$ отображение

$$\tau(g): G \rightarrow G, \quad \tau(g)(x) = gxg^{-1} \quad \text{для } x \in G,$$

является автоморфизмом группы G (называемым внутренним автоморфизмом группы G , индуцированным элементом $g \in G$).

Доказательство. 1) Если $x, y \in G$, то

$$\tau(g)(xy) = g(xy)g^{-1} = (gxyg^{-1}) = (\tau(g)x)(\tau(g)y),$$

т. е. $\tau(g): G \rightarrow G$ — гомоморфизм групп.

2) Так как $\tau(g^{-1}) = \tau(g)^{-1}$, то $\tau(g)$ — биекция, и поэтому $\tau(g)$ — автоморфизм группы G . \square

Соберем вместе свойства отображения $\tau: G \rightarrow \text{Aut}(G)$.

ТЕОРЕМА 3 (СВОЙСТВА ВНУТРЕННИХ АВТОМОРФИЗМОВ). Пусть G — группа. Тогда:

1) отображение $\tau: G \rightarrow \text{Aut}(G)$, $\tau(g)(x) = gxg^{-1}$, $g \in G$, $x \in G$, является гомоморфизмом групп (называемым гомоморфизмом сопряжения);

2) образ гомоморфизма $\tau: G \rightarrow \text{Aut}(G)$, т. е. совокупность $\text{Inn}(G) = \{\tau(g) \in \text{Aut}(G) \mid g \in G\} = \text{Im } \tau$ всех внутренних автоморфизмов $\tau(g)$, $g \in G$, является нормальной подгруппой группы автоморфизмов $\text{Aut}(G)$ (группа $\text{Inn}(G)$ называется группой внутренних автоморфизмов группы G);

3) $\ker(\tau) = \mathbf{Z}(G)$, т. е. ядро $\ker(\tau)$ гомоморфизма τ совпадает с центром $\mathbf{Z}(G)$ группы G ;

4) $\text{Inn}(G) \cong G/\mathbf{Z}(G)$, группа $\text{Inn}(G)$ внутренних автоморфизмов изоморфна фактор-группе группы G по ее центру $\mathbf{Z}(G)$;

Доказательство. 1) Если $g, h \in G$, то

$$\tau(gh)(x) = (gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = \tau(g)(\tau(h)(x))$$

для всех $x \in G$. Итак, $\tau(gh) = \tau(g)\tau(h)$ для всех $g, h \in G$, т. е. $\tau: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ — гомоморфизм групп.

2) Совокупность $\text{Inn}(G) = \{\tau(g) \in \text{Aut}(G) \mid g \in G\}$ всех внутренних автоморфизмов $\tau(g)$, $g \in G$, в группе $\text{Aut}(G)$ как образ гомоморфизма τ является подгруппой группы $\text{Aut}(G)$.

Если $\alpha \in \text{Aut}(G)$ и $g \in G$, $x \in G$, то

$$\begin{aligned} \tau(\alpha(g))(x) &= \alpha(g)x\alpha(g)^{-1} = \alpha(g)x\alpha(g^{-1}) = \\ &= \alpha(g\alpha^{-1}(x)g^{-1}) = \alpha\left(\tau(g)(\alpha^{-1}(x))\right) = (\alpha\tau(g)\alpha^{-1})(x), \end{aligned}$$

поэтому

$$\alpha\tau(g)\alpha^{-1} = \tau(\alpha(g)) \in \text{Inn}(G),$$

следовательно,

$$\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G).$$

3) Элемент $g \in G$ принадлежит ядру $\ker \tau$ гомоморфизма τ тогда и только тогда, когда $\tau(g)(x) = x$ для всех $x \in G$, т. е. $gxg^{-1} = x$, или $gx = xg$, но это означает, что $g \in \mathbf{Z}(G)$. Итак, $\ker \tau = \mathbf{Z}(G)$.

4) В силу теоремы о гомоморфизме для сюръективного гомоморфизма $\tau: G \rightarrow \text{Inn}(G)$ имеем

$$\text{Inn}(G) = \text{Im } \tau \cong G / \ker \tau = G / \mathbf{Z}(G).$$

□

ПРИМЕРЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

1) *Циклические группы* $G = \langle a \rangle$, поскольку $a^m a^n = a^{m+n} = a^n a^m$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}$.

2) Прямые суммы $\bigoplus_{i \in I} A_i$ и прямые произведения $\prod_{i \in I} A_i$ абелевых групп A_i , $i \in I$, являются абелевыми группами.

3) *Аддитивная группа рациональных чисел* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +)$ (эта группа без кручения, она является делимой (для любого $a \in \mathbb{Q}$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ уравнение $nx = a$ разрешимо в \mathbb{Z}) и по этой причине не является прямой суммой циклических групп).

4) *Квазициклическая группа* $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — группа по умножению всех корней степени p^n , где p — фиксированное простое число, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$\dots \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+2} \rightarrow \dots$$

называется *точной последовательностью*, если

$$\text{Im } f_i = \ker f_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

и называется *комплексом* абелевых групп, если

$$f_{i+1}f_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

(это равносильно тому, что $\text{Im } f_i \subseteq \ker f_{i+1}$, и поэтому в этом случае можно рассмотреть фактор-группу $D_{i+1} = \ker f_{i+1} / \text{Im } f_i$, называемую $(i+1)$ -й *группой гомологий* комплекса).

Следующие примеры точных последовательностей наиболее употребительны в нашем курсе:

1) точность последовательности

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B$$

означает, что $\ker i = 0$, т. е. i — инъективный гомоморфизм (мономорфизм);

2) точность последовательности

$$B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$$

означает, что $\text{Im } \pi = C$, т. е. π — сюръективный гомоморфизм;

3) точность последовательности

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$$

означает, что $\ker i = 0$, $\text{Im } i = \ker \pi$, $\text{Im } \pi = C$, т. е. что $A \cong \text{Im } i$, $B / \text{Im } i = B / \ker \pi \cong C$ (в частности, для сюръективного гомоморфизма $f: A \rightarrow B$ имеем короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \ker f \subseteq A \xrightarrow{f} \text{Im } f = B \rightarrow 0).$$

ЛЕММА 5 (О РЕТРАКТЕ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП). Пусть G и G' — абелевы группы.

1) Если $f: G \rightarrow G'$, $h: G' \rightarrow G$ — гомоморфизмы и $fh = 1_{G'}$ (пара f, h — ретракт), то:

- а) $\ker h = 0$;
- б) $\operatorname{Im} f = G'$;
- в) $\operatorname{Im} h \oplus \ker f = G$.

2) Если $f: G \rightarrow G'$ — гомоморфизм,

$$\operatorname{Im} f = G' \text{ и } A \oplus \ker f = G$$

для некоторой подгруппы $A \subseteq G$, то существует гомоморфизм $h: G' \rightarrow G$, для которого $fh = 1_{G'}$.

3) Если $h: G' \rightarrow G$ — гомоморфизм,

$$\ker h = 0 \text{ и } \operatorname{Im} h \oplus B = G$$

для некоторой подгруппы $B \subseteq G$, то существует гомоморфизм $f: G \rightarrow G'$, для которого $fh = 1_{G'}$.

Доказательство.

1а) Если $y \in \ker h \subseteq G'$, то $h(y) = 0$, и поэтому

$$y = 1_{G'}(y) = (fh)(y) = f(h(y)) = f(0) = 0.$$

Итак, $\ker h = 0$.

1б) Если $y \in G'$, то

$$y = 1_{G'}(y) = (fh)(y) = f(h(y)) \in \operatorname{Im} f.$$

Итак, $\operatorname{Im} f = G'$.

1в) Если $x \in G$, то $x = h(f(x)) + (x - (hf)(x))$, при этом, поскольку $fh = 1_{G'}$,

$$f(x - (hf)(x)) = f(x) - (fhf)(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

поэтому $x - (hf)(x) \in \ker f$, $h(f(x)) \in \operatorname{Im} h$. Таким образом, $G = \operatorname{Im} h + \ker f$.

Если $z \in \text{Im } h \cap \ker f$, то $z = h(y)$ для $y \in G'$ и $f(z) = 0$, поэтому

$$y = 1_{G'}(y) = (fh)(y) = f(h(y)) = f(z) = 0.$$

Таким образом, $\text{Im } h \cap \ker f = 0$.

Итак, $G = \text{Im } h \oplus \ker f$.

2) Так как для $f|_A: A \rightarrow G'$ имеем

$$\begin{aligned} f|_A(A) &= f(A \oplus \ker f) = f(G) = G', \\ \ker(f|_A) &= \ker f \cap A = 0, \end{aligned}$$

то $f|_A: A \rightarrow G'$ — изоморфизм.

Положим

$$h = (f|_A)^{-1}: G' \rightarrow A \subseteq G.$$

Тогда

$$fh = f(f|_A)^{-1} = 1_{G'}.$$

3) Гомоморфизм $h: G' \rightarrow \text{Im } h$ является изоморфизмом, поскольку $\ker h = 0$. Рассмотрим изоморфизм $h^{-1}: \text{Im } h \rightarrow G'$. Пусть $\pi: G = \text{Im } h \oplus B \rightarrow \text{Im } h$ — проекция на первое слагаемое. Рассмотрим гомоморфизм

$$f = h^{-1}\pi: G = \text{Im } h \oplus B \xrightarrow{\pi} \text{Im } h \xrightarrow{h} G'.$$

Тогда для $g' \in G'$ имеем

$$(fh)(g') = f(h(g')) = h^{-1}(\pi(h(g'))) = h^{-1}(h(g')) = g'.$$

Таким образом, $fh = 1_{G'}$. □