

ЛЕКЦИЯ 8

ПРИМЕРЫ ДЕЙСТВИЙ

НОРМАЛИЗАТОРЫ ПОДГРУПП

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ЦЕНТР p -ГРУППЫ

ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

ПРОСТЫЕ ГРУППЫ

ПРИМЕРЫ ПОЛИГОНОВ

ПРИМЕР 1. $M_G = \{1, 2, \dots, n\}_{S_n}$, где σi — значение подстановки $\sigma \in S_n$ на элементе i из $\{1, 2, \dots, n\}$. Так как $i(i, j) = j$ для цикла (i, j) , то это действие группы \mathbf{S}_n на $\{1, 2, \dots, n\}$ транзитивно. Ясно, что, например, $\text{St}(n) = \mathbf{S}_{n-1}$. Более общим образом, для любого множества M и группы всех биекций $\mathbf{S}(M)$ имеем полигон $M_{\mathbf{S}(M)}$.

ПРИМЕР 2. Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_n$, (σ) — циклическая подгруппа в \mathbf{S}_n , порожденная подстановкой σ . Тогда: $\{1, 2, \dots, n\}_{(\sigma)}$ — полигон над группой (σ) , его различные орбиты — это в точности непересекающиеся циклы подстановки (σ) , перестановочные между собой.

ПРИМЕР 3 (РЕГУЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛЕВЫМИ УМНОЖЕНИЯМИ). Пусть $M_G = G_G$ с умножением $(g, x) \rightarrow gx$ для $x \in G$, $g \in G$. Ясно, что: $(hg)x = h(gx)$ (для $x, g, h \in G$, ассоциативность умножения в группе); $ex = x$ для единицы e группы G .

Если $p, x \in G$, то $\text{St}(p) = \{g \in G \mid gp = p\} = \{e\}$ и $\text{Orb}(x) = Gx = G$ (т. е. это действие транзитивно).

Если $g \in G$, то рассмотрим отображение $\rho_g: G \rightarrow G$, $\rho_g x = gx$. Так как из $gx = gy$ для $x, y \in G$ следует (умножим на g^{-1} справа в группе G), что $x = y$, то ρ_g — мономорфизм. Так как для любого $z \in G$ имеем $z = gg^{-1}z$, то ρ_g — сюръекция. Итак, $\rho_g \in \mathbf{S}(G)$.

Так как для $x, g, h \in G$ имеем

$$\rho_{hg}x = (hg)x = h(gx) = \rho_h(\rho_g x),$$

т. е. $\rho_{hg} = \rho_h \rho_g$, то отображение $\rho: G \rightarrow \mathbf{S}(G)$, $\rho(g) = \rho_g$, является гомоморфизмом групп.

Если $g, g' \in G$ и $\rho_g = \rho(g) = \rho(g') = \rho_{g'}$, то $g = eg = eg' = g'$. Таким образом, ρ — инъективный гомоморфизм.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 (КЭЛИ). *Регулярное представление группы G правыми умножениями*

$$G \xrightarrow{\rho} \mathbf{S}^r(G) = \mathbf{S}(G), \quad g \rightarrow \rho_g, \quad \rho_g x = gx,$$

является инъективным гомоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Всякая группа G изоморфна некоторой подгруппе G' группы подстановок $\mathbf{S}(G)$ на множестве G .*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $n = |G| < \infty$, то группа G изоморфна некоторой подгруппе G' группы подстановок \mathbf{S}_n . С точностью до изоморфизма существует лишь конечное число групп порядка n .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. К сожалению, $|\mathbf{S}_n| = n!$, и подгрупп в \mathbf{S}_n из n элементов достаточно много.

ПРИМЕР 4. Пусть H — подгруппа группы G , рассмотрим полигон $M_H = G_H$, $(hx) \rightarrow hx$ для $x \in G$, $h \in H$. Если $p, x \in G$, то $\text{St}(p) = \{h \in H \mid hp = p\} = \{e\}$ и $\text{Orb}(x) = Hx$ — левый смежный класс Hx по подгруппе H , порожденный элементом $x \in G$. Таким образом, в этом частном случае полигона G_H разбиение на орбиты превращается в хорошо знакомое нам разбиение группы в объединение непересекающихся различных левых смежных классов $G = \dot{\bigcup} Hx$, и как следствие подсчета элементов по орбитам имеем

$$|G| = \sum |\text{Orb}(x)| = \sum |Hx| = [G : H]|H|$$

(т. е. теорему Лагранжа).

ПРИМЕР 5 (ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ \mathbf{G} ЛЕВЫМИ УМНОЖЕНИЯМИ НА МНОЖЕСТВЕ ПРАВЫХ СМЕЖНЫХ КЛАССОВ). Пусть H — подгруппа группы G ,

$$M_G = \{xH, x \in G\}, \quad g(xH)g = gxH \quad \text{для } x, g \in G$$

(это умножение корректно: если $xH = x'H$, то $x' = xh$, $h \in H$, и поэтому $gx' = gxh$, тогда $gx'H = gxH$). Если $x, g_1, g_2 \in G$, то $(g_1g_2)(xH) = g_1(g_2(xH))$ и $e(xH) = xH$, т. е. $M_G = \{xH \mid x \in G\}_G$ — правый полигон над группой G . Так как $\text{Orb}(xH) = M_G$, то это действие группы G транзитивно.

ПРИМЕР 6 (ДЕЙСТВИЕ ГРУППЫ \mathbf{G} НА ГРУППЕ \mathbf{G} СОПРЯЖЕНИЕМ). Пусть $M_G = G_G$, $(g, m) \rightarrow gmg^{-1} = \alpha_g m$ для $m, g \in G$. Так как для $m, g, h \in G$ имеем

$$m\alpha_{hg} = (hg)m(hg)^{-1} = h(gmg^{-1})h^{-1} = \alpha_h(\alpha_g m),$$

т. е. $\alpha_{hg} = \alpha_h\alpha_g$,

$$\alpha_e m = em e^{-1} = m,$$

то $M_G = G_G$ с сопряжением — левый G -полигон.

НОРМАЛИЗАТОРЫ ПОДГРУПП

ПРИМЕР 7. Пусть $L_G = L(G)$ — совокупность всех подгрупп H группы G , $(g, H) \rightarrow gHg^{-1}$, $g \rightarrow G$ (действие группы G на подгруппах сопряжением).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Стабилизатор подгруппы H при этом действии группы G сопряжениями $\text{St}(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ называется *нормализатором подгруппы H* в группе G (для него используется обозначение $\mathbf{N}_G(H)$).

Итак, $\mathbf{N}_G(H) = \text{St}(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$.

ЛЕММА 1 (СВОЙСТВА НОРМАЛИЗАТОРА $\mathbf{N}_G(H)$).

- 1) $\mathbf{N}_G(H)$ — подгруппа группы G , содержащая подгруппу H ;
- 2) $H \triangleleft \mathbf{N}_G(H)$;
- 3) если $H \triangleleft K \subseteq G$ (т. е. K — подгруппа группы G , содержащая подгруппу H и H — нормальная подгруппа в K), то $K \subseteq \mathbf{N}_G(H)$, и, таким образом, $\mathbf{N}_G(H)$ — наибольшая подгруппа, содержащая H в качестве нормальной подгруппы (конечно, если $H \triangleleft G$, то $\mathbf{N}_G(H) = G$).

Доказательство.

- 1) Так как $\mathbf{N}_G(H) = \text{St}(H)$, то ясно, что $\mathbf{N}_G(H)$ (как любой стабилизатор) — подгруппа группы G .
- 2) Если $g \in \mathbf{N}_G(H)$, то $gHg^{-1} = H$, т. е. $H \triangleleft \mathbf{N}_G(H)$ (т. е. H — нормальная подгруппа группы $\mathbf{N}_G(H)$).
- 3) Если $H \triangleleft K \subseteq G$, то для любого элемента $g \in K$ имеем $gHg^{-1} = H$ (поскольку H — нормальная подгруппа группы K), т. е. $g \in \text{St}(H) = \mathbf{N}_G(H)$, и поэтому $K \subseteq \mathbf{N}_G(H)$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1. Если B — подгруппа, лежащая в нормализаторе $\mathbf{N}_G(A)$ подгруппы A группы G , то AB — подгруппа группы G и $AB/A \cong B/A \cap B$.

КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Если $x \in G$, то при сопряжении орбита элемента

$$\text{Orb}(x) = \{gxg^{-1} \mid g \in G\} —$$

это класс сопряженных элементов элемента x .

Ясно, что $\text{Orb}(e) = \{e\}$. Более того, $|\text{Orb}(x)| = 1 \iff x \in \mathbf{Z}(G)$, т. е. одноэлементные орбиты — это в точности элементы центра, поскольку $gxg^{-1} = x$ для всех $g \in G$ равносильно тому, что $xg = gx$ для всех $g \in G$, т. е. тому, что $x \in \mathbf{Z}(G)$.

Ясно, что

$$\text{St}(x) = \{g \mid gxg^{-1} = x\} = \mathbf{C}(x),$$

где $\mathbf{C}(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}$ — централизатор элемента $x \in G$.

Таким образом, теорема о разбиении на орбиты в данном случае означает следующее.

ТЕОРЕМА 2 (О РАЗБИЕНИИ НА КЛАССЫ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ).
Пусть G — группа, тогда:

1) *группа является объединением орбит — непересекающихся различных классов сопряженных элементов (т. е. отношение сопряженности $y \sim x$, если $y = gxg^{-1}$, является отношением эквивалентности);*

2) *число элементов конечной группы G , сопряженных с элементом $x \in G$, равно индексу централизатора $\mathbf{C}(x)$ элемента $x \in G$ в группе (поскольку $|G| = |\text{Orb}(x)| \cdot |\text{St}(x)| = \{\text{число сопряженных с } x \text{ элементов}\} \cdot |\mathbf{C}(x)|$), т. е. числу $|G|/|\mathbf{C}(x)|$, и является делителем числа $|G|$. \square*

УПРАЖНЕНИЕ 2. Разбиение на классы сопряженных элементов в группе подстановок \mathbf{S}_n определяется типом циклового разложения (т. е. две подстановки в \mathbf{S}_n сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые цикловые разложения, т. е. для каждого числа r одинаковое число циклов длины r в их цикловых разложениях).

ЦЕНТР КОНЕЧНОЙ p -ГРУППЫ

ТЕОРЕМА 3. *Фактор неабелевой группы по ее центру не может быть циклической группой.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т.е. существует некоторая неабелева группа G такая, что $G/\mathbf{Z}(G) = G/Z$ — циклическая группа. Пусть тогда $G/Z = \langle gZ \rangle$. В этом случае любой элемент группы G представляется в виде произведения $g^k z$, где $z \in Z$.

Рассмотрим два произвольных элемента группы G — $g^k z_1$ и $g^l z_2$. Они коммутируют, так как элементы центра коммутируют со всеми элементами группы, а степени элемента g коммутируют между собой.

Таким образом, группа G — абелева, что противоречит предположению. \square

ТЕОРЕМА 4. *Пусть G — конечная p -группа, т. е. $|G| = p^k$, где p — простое число, $k \in \mathbb{N}$. Тогда ее центр нетривиален, т. е. $|\mathbf{Z}(G)| > 1$.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение группы G на классы сопряженных элементов. Одноэлементный класс — это в точности элемент центра (один из них $\{e\}$). Содержащий больше одного элемента класс сопряженных элементов содержит p^l элементов, где $l > 1$ (как нетривиальный делитель числа $|G| = p^k$). Отсюда следует, что $|\mathbf{Z}(G)| > 1$ (в противном случае $p^k = 1 + pq$). \square

ТЕОРЕМА 5 (О КОММУТАТИВНОСТИ ГРУППЫ ИЗ p^2 ЭЛЕМЕНТОВ). *Пусть G — конечная группа, $|G| = p^2$, где p — простое число. Тогда G — абелева (т. е. коммутативная) группа.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы $|\mathbf{Z}(G)| > 1$, т. е. $|\mathbf{Z}(G)| = p$ или $|\mathbf{Z}(G)| = p^2$. Но первый случай ($|\mathbf{Z}(G)| = p$) невозможен, поскольку тогда $|G/\mathbf{Z}(G)| = p^2/p = p$, и поэтому $G/\mathbf{Z}(G)$ — циклическая группа, что невозможно. Итак, $|\mathbf{Z}(G)| = p^2$, т. е. $G = \mathbf{Z}(G)$, и поэтому группа G коммутативна. \square

ТЕОРЕМА 6. Пусть G — p -группа, $|G| = p^r$, $r \geq 1$. Тогда группа G содержит нормальную подгруппу порядка p^{r-1} .

Доказательство. Проведем индукцию по r . Ясно, что утверждение верно при $r = 1$. Пусть оно верно для всех $k < r$, где $r > 1$.

В силу теоремы 4 $Z(G) \neq e$ (здесь $Z(G)$ — центр группы G). Так как p делит число $|Z(G)|$, то абелева группа $Z(G)$ содержит элемент g такой, что $p = O(g) = |\langle g \rangle|$. Ясно, что $N = \langle g \rangle \triangleleft G$ и $|G/N| = p^r/p = p^{r-1}$. В силу индуктивного предположения для p^{r-2} фактор-группа $\bar{G} = G/N$ содержит нормальную подгруппу $\bar{H} = H/N$, где H — нормальная подгруппа в G , $N \subset H \triangleleft G$, $|\bar{H}| = p^{r-2}$. Тогда $|H| = |\bar{H}| |N| = p^{r-2} \cdot p = p^{r-1}$. Итак, группа G содержит нормальную подгруппу H порядка p^{r-1} . \square

ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

Напомним, что мы рассматриваем группу подстановок \mathbf{S}_n с записью умножения слева от аргумента: $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$.

Заметим, что:

$$(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_1 i_k)(i_1 i_{k-1}) \dots (i_1 i_2)$$

(в частности, $(12 \dots k) = (1k)(1k-1) \dots (12)$); $(ij) = (1i)(1j)(1i)$ для $1 \neq i, 1 \neq j$.

Нам будут полезны разные системы образующих группы \mathbf{S}_n :

$$\mathbf{S}_n = \langle (ij), i \neq j \rangle = \langle (12), (13), \dots, (1n) \rangle.$$

ЛЕММА 2.

$$\begin{aligned} \tau(1, 2, \dots, k)\tau^{-1} &= (\tau(1), \dots, \tau(k)) \\ (\tau^{-1}(1, 2, \dots, k)\tau &= (\tau^{-1}(1), \dots, \tau^{-1}(k))). \end{aligned}$$

Доказательство. Если $\sigma(i) = j$, $\tau(i) = s$, $\tau(j) = t$, то

$$(\tau\sigma\tau^{-1})(s) = (\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(i)) = (\tau\sigma)(i) = \tau(j) = t. \quad \square$$

ТЕОРЕМА 7. Две подстановки $\sigma, \gamma \in \mathbf{S}_n$ сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое цикловое разложение.

Доказательство.

1) Если $\gamma = \tau\sigma\tau^{-1}$ и $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$ — разложение подстановки σ в произведение циклов с непересекающимися орбитами, то

$$\gamma = (\tau\sigma_1\tau^{-1})(\tau\sigma_2\tau^{-1}) \dots (\tau\sigma_r\tau^{-1}),$$

$\{\tau\sigma_i\tau^{-1}\}$ — циклы, орбиты которых являются образами орбит циклов σ_i , и поэтому эти орбиты дают разбиение множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Таким образом, подстановки γ и σ имеют одинаковые цикловые разложения.

2) Если γ и σ имеют одинаковое цикловое разложение, то соответствие между элементами соответствующих орбит приводит нас к биекции τ , т. е. $\sigma \in \mathbf{S}_n$, для которой $\gamma = \tau\sigma\tau^{-1}$. \square

ЛЕММА 3. Для циклов длины 2 τ_1, τ_2 (т. е. для транспозиций) группы \mathbf{S}_n при $n \geq 3$ произведение $\tau_1\tau_2$ либо 3-цикл, либо произведение двух 3-циклов.

Доказательство.

СЛУЧАЙ 1. Если $\tau_1 = \tau_2$, то

$$\tau_1\tau_2 = \tau_1^2 = e = (i j k)(k j i).$$

СЛУЧАЙ 2. $\tau_1 \neq \tau_2$.

2а) орбиты пересекаются (по одному элементу i):

$$(i k)(i l) = (i l k),$$

здесь $k \neq l$.

2б) Орбиты транспозиций τ_1 и τ_2 не пересекаются:

$$(i j)(k l) = (i l j)(i l k). \quad \square$$

ТЕОРЕМА 8. $\mathbf{A}_n = \langle \{(i j k)\} \rangle = \langle (1 2 3), (1 2 4), \dots, (1 2 n) \rangle$ при $n \geq 3$.

Доказательство.

1) Если $\sigma \in \mathbf{A}_n$, $n \geq 3$, то $\sigma = \tau_1 \dots \tau_{2m}$, где τ_i — транспозиция (цикл длины 2). Так как $\tau_{2i-1}\tau_{2i}$ — или 3-цикл, или произведение двух 3-циклов, то

$$\mathbf{A}_n = \langle \{(i, j, k)\} \rangle.$$

2)

$$\begin{aligned} (i j k) &= (1 2 i)(2 j k)(1 2 i)^{-1}; \\ (2 j k) &= (1 2 j)(1 2 k)(1 2 j)^{-1}; \\ (1 j k) &= (1 2 k)^{-1}(1 2 j)(1 2 k). \end{aligned} \quad \square$$

УПРАЖНЕНИЕ 3. $\mathbf{A}_5 = \langle (2\ 5\ 4), (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \rangle$.

ТЕОРЕМА 9.

- 1) $[\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_2] = \{e\}$; $[\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_n] = \mathbf{A}_n$ при $n \geq 3$.
- 2) $[\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_3] = \{e\}$;
 $[\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_4] = \mathbf{V}_4 = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$;
 $[\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n] = \mathbf{A}_n$ при $n \geq 5$.

Доказательство.

1) Так как $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ для $a, b \in \mathbf{S}_n$ всегда является четной подстановкой, то $[\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_n] \subseteq \mathbf{A}_n$.

Так как $\mathbf{A}_n = \langle \{(i\ j\ k)\} \rangle$ и

$$(i\ j\ k) = (i\ j)(i\ k)(i\ j)(i\ k) = [(i\ j), (i\ k)],$$

то $\mathbf{A}_n \subseteq [\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_n]$.

2а) Ясно, что $[\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_3] = \{e\}$ (\mathbf{A}_3 — абелева группа, $|\mathbf{A}_3| = 3$).

2б) Так как

$$\begin{aligned} [(i\ j\ k), (i\ j\ l)] &= (k\ j\ i)(l\ j\ i)(i\ j\ k)(i\ j\ l) = (i\ j)(k\ l), \\ [(i\ j\ k), (i\ l\ j)] &= (k\ j\ i)(j\ l\ i)(i\ j\ k)(i\ l\ j) = (i\ k)(j\ l), \end{aligned}$$

то $\mathbf{V}_4 \subseteq [\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_4]$.

Так как $|\mathbf{A}_4/\mathbf{V}_4| = 12/4 = 3$, то $\mathbf{A}_4/\mathbf{V}_4$ — абелева группа, поэтому $[\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_4] \subseteq \mathbf{V}_4$. Итак, $[\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_4] = \mathbf{V}_4$.

2в) При $n \geq 5$ для $\{i, j, k\}$ найдутся $l, m \notin \{i, j, k\}$, $l \neq m$. Поэтому

$$(i\ j\ k) = (i\ j\ m)(i\ k\ l)(m\ j\ i)(l\ k\ i) = [(m\ j\ i), (l\ k\ i)],$$

таким образом, $\mathbf{A}_n \subseteq [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n]$, и следовательно, $\mathbf{A}_n = [\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n]$ при $n \geq 5$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 4. Каждый элемент группы \mathbf{A}_5 является коммутатором.

ПРОСТЫЕ ГРУППЫ

Группа G называется *простой*, если у нее нет нормальных подгрупп $N \triangleleft G$, отличных от $\{e\}$ и G .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Простые абелевы группы — это в точности циклические группы простого порядка. Действительно, в абелевой группе любая подгруппа нормальна. Поэтому простая абелева группа является циклической. В группе \mathbb{Z} много подгрупп, в частности $2\mathbb{Z}$, т. е. она не является простой. Если $G = \langle a \rangle$, $O(a) = n = kl$, то $\langle a^k \rangle \subset \langle a \rangle$, и группа G не является простой. Итак, $G = \langle a \rangle$ — простая группа тогда и только тогда, когда $|G| = O(a) = p$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $|G| = p^k$, $k > 1$, — конечная p -группа из p^k , $k > 1$, элементов, то G не является простой. Действительно, $e \neq \mathbf{Z}(G) \triangleleft G$.

Теорема о классификации конечных простых групп, видимо, завершена, ее полное связное доказательство создается.

Мы докажем теорему о том, что при $n \geq 5$ группа \mathbf{A}_n является простой (в частности, \mathbf{A}_5 — простая группа).

ЛЕММА 4. При $n \geq 5$ любые два 3-цикла в группе \mathbf{A}_n сопряжены.

Доказательство. Пусть $\sigma_1 = (1\ 2\ 3)$, $\sigma_2 = (a\ b\ c) \in \mathbf{A}_n$, $n \geq 5$. Найдется $\tau \in \mathbf{S}_n$, для которой $\sigma_2 = \tau(1\ 2\ 3)\tau^{-1}$.

а) Если $\tau \in \mathbf{A}_n$, то все доказано.

б) Если $\tau \in \mathbf{S}_n \setminus \mathbf{A}_n$, то $\rho = \tau(4\ 5) \in \mathbf{A}_n$, $(4\ 5) \in \mathbf{C}_{\mathbf{A}_5}((1\ 2\ 3))$. Тогда

$$\rho(1\ 2\ 3)\rho^{-1} = \tau(4\ 5)(1\ 2\ 3)(4\ 5)^{-1}\tau^{-1} = \tau(1\ 2\ 3)\tau^{-1} = \sigma_2. \quad \square$$

ЛЕММА 5. Подстановки вида $(1\ 2)(3\ 4)$ и $(a\ b)(c\ d)$ сопряжены в \mathbf{A}_n при $n \geq 5$.

Доказательство. Пусть $m = 5$ (отличный от 1, 2, 3, 4). Тогда $(3\ 4\ m)(1\ 2)(3\ 4)(3\ 4\ m)^{-1} = (1\ 2)(4\ m)$. \square

ТЕОРЕМА 10. \mathbf{A}_5 — простая (некоммутативная) группа.

Доказательство. Пусть $\{e\} \neq H \triangleleft \mathbf{A}_5$.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $(a\ b\ c) \in H$. Тогда и все сопряженные с ним циклы длины 3 лежат в H , а циклы длины три порождают все \mathbf{A}_5 , поэтому $H = \mathbf{A}_5$.

СЛУЧАЙ 2. $\alpha = (a\ b\ c\ d\ e) \in H$. Тогда

$$\begin{aligned} (a\ b)(c\ d)(a\ b\ c\ d\ e)(a\ b)(c\ d) &= (b\ a\ d\ c\ e) \in H, \\ (b\ a\ d\ c\ e)(a\ b\ c\ d\ e) &= (b\ e\ d) \in H, \end{aligned}$$

и поэтому (случай 1) $H = \mathbf{A}_5$.

СЛУЧАЙ 3. $(a\ b)(c\ d) \in H$. Тогда

$$(a\ b\ c\ e\ d) = (d\ e)(a\ c)(c\ d)(a\ b) \in H,$$

и (случай 2) поэтому $H = \mathbf{A}_5$. \square