Реферат статьи

В данной статье мы изучаем взаимосвязь между элементарной эквивалентностью категорий полигонов над моноидами и эквивалентностью в логике второго порядка данных моноидов.

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, теории второго порядка, категория полигонов над моноидами

Коды УДК: 512.58, 510.67

Элементарные свойства категории полигонов над моноидом

Е. И. Бунина, А.В. Михалев

16 декабря 2010 г.

Содержание

Введение

В данной статье мы рассматриваем элементарные свойства (т.е. свойства, выразимые в языке первого порядка) категорий полигонов над моноидами.

Первые результаты о связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были получены А.И. Мальцевым в 1961 году в работе [1]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ (где $G = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}$, $n, m \geq 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Изучение этих вопросов было продолжено в 1992 году, когда с помощью конструкции ультрастепени и теоремы об изоморфизме [2] К.И. Бейдар и А.В. Михалев [3] сформулировали общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур, и обобщили теорему Мальцева на случай, когда K и L — тела и ассоциативные кольца.

В 1998–2005 Е.И. Бунина продолжила изучать некоторые проблемы этого типа. (см. [4, 5, 6]). Она обобщила результаты А.И. Мальцева для унитарных линейных групп над телами и ассоциативными кольцами с инволюциями, а также для групп Шевалле над полями и локальными коммутативными кольцами.

В 2000 году В.Толстых в [7] изучил связь между свойствами второго порядка тел и свойствами первого порядка групп автоморфизмов бесконечномерных линейных пространств над ними.

В 2003 году (см. [8]) авторы изучали связь между свойствами второго порядка ассоциативных колец и элементарными свойствами категорий модулей, колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов и проективных пространств бесконечного ранга над этими кольцами.

В 2004 году авторами (см. [9]) была установлена связь между элементарной эквивалентностью колец эндоморфизмов Абелевых p-групп и эквивалентностью в логике второго порядка этих групп.

В данной статье мы доказываем, что при некотором специальном условии на моноид S_1 категории $Act-S_1$ и $Act-S_2$ полигонов над моноидами S_1 и S_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда моноид S_1 эквивалентен в логике второго порядка некоторому моноиду S, Морита эквивалентному S_2.

В первый параграф мы поместили необходимые определения и утверждения, касающиеся моноидов, полигонов и категории $Act-S$ (см. книгу [10]).

Второй параграф содержит определение структуры $\langle Cn, Mon\rangle$, состоящей из класса Cn всех кардинальных чисел и моноида Mon с обычной операцией умножения; описание логики второго порядка такой структуры, а также доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Если* $Th_2(\langle Cn, S_1\rangle) = Th_2(\langle Cn, S_2\rangle)$, *то* $Act-S_1 \equiv Act-S_2$.

В третьем параграфе проводятся некоторые построения, а именно

1) формулы, характеризующие циклический проективный образующий в категории $Act-S$;

2) формулы, выделяющие для данного циклического проективного образующего P_S класс всех полигонов вида $\coprod\limits_{i\in\varkappa} P_S$, $\varkappa\in Cn$;

3) формулы, выделяющие для данного циклического проективного образующего P_S и данного полигона $\coprod\limits_{i\in\varkappa} P_S$ морфизмы $f: P_S\to \coprod\limits_{i\in\varkappa} P_S$, изоморфно отображающие P_S на одну из неразложимых компонент в копроизведении $\coprod\limits_{i\in\varkappa} P_S$.

В четвертом параграфе мы доказываем основную теорему:

Теорема. *Предположим, что моноид S_1 удовлетворяет следующему условию: существует предложение $Select$ языка второго порядка структуры $\langle Cn, Mon\rangle$, истинное для моноида S, Морита эквивалентного S_1, тогда и только тогда, когда*

$$\langle Cn, S_1\rangle \equiv_2 \langle Cn, S\rangle.$$

Тогда для любого моноида S_2 условие $Act-S_1\equiv Act-S_2$ равносильно $\langle Cn, S_1\rangle \equiv_2 \langle Cn, S'\rangle$ для некоторого моноида S', Морита эквивалентного S_2.

1 Основные определения

Помимо языков первого порядка и их моделей, определение которых можно найти в книге [2], мы будем вынуждены рассматривать языки второго порядка, в которых можно навешивать кванторы на предикатные символы, то есть использовать предикатные символы как переменные. Определение формул такого языка, понятие выводимости в них, модели языков второго порядка, истинность формул второго порядка в соответствующих моделях описаны авторами в работе [9].

Определение 1.1. Полугруппа S с единицей называется *моноидом.*

Определение 1.2. Пусть S — моноид, а $A \neq \emptyset$ — множество. Если имеется отображение $\mu : A \times S \to A$, $(a, s) \mapsto as := \mu(a, s)$, такое, что

(a) $a \cdot 1 = a$;

(b) $a(st) = (as)t$ для $a \in A, s, t \in S$,

то A называется *правым S-полигоном* или *правым полигоном над S* и обозначается через A_S.

Аналогично определяется *левый S-полигон A*, который обозначается через ${}_SA$.

Определение 1.3. Назовем A_S *циклическим S-полигоном*, если $A_S = uS$.

Определение 1.4. Пусть S — полугруппа. Тогда

$$SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\} = S^1aS^1$$

— *главный идеал*, порожденный a.

Определим на полугруппе S следующее отношение для всех $s, t \in S$:

$s\mathcal{J}t$, если $S^1sS^1 = S^1tS^1$,

Определение 1.5. Категория $Act - S$ ($S - Act$) правых (левых) полигонов над моноидом S состоит из всех правых (левых) S-полигонов в качестве класса $Ob\,\mathbf{C}$ и всех S-гомоморфизмов в качестве класса морфизмов $Mor\,\mathbf{C}$. S-гомоморфизмом $f : A_S \to B_S$ называется отображение из A_S в B_S такое, что $f(as) = f(a)s$ для любых $a \in A_S$ и $s \in S$.

Напомним, что в произвольной категории копроизведение семейства объектов $(X_i)_{i\in I}$ обозначается через $\coprod\limits_{i\in I} X_i$, а если все $X_i \cong X$ для всех $i \in I$, то используется обозначение $\coprod\limits_{I} X$.

В категории $Act - S$ для $I \neq \emptyset$ мы имеем

$$\coprod_{i\in I} X_i = \dot{\bigcup_{i\in I}} X_i,$$

где $\dot{\bigcup\limits_{i\in I}} X_i$ — это объединение попарно непересекающихся $X_i \in Act - S$, $i \in I$, с инъекциями $u_i : X_i \to \dot{\bigcup\limits_{i\in I}} X_i$, определяемыми как

$$u_i = id_{\dot{\bigcup} X_i}|_{X_i}, \quad i \in I.$$

Предложение 1.1. ([10], стр. 146) *Для полигона $G_S \in Act - S$ следующие утверждения равносильны:*

(1) *G_S — образующий в $Act - S$;*

(2) *S_S является ретрактом в G_S;*

(3) *существует идемпотент* $\varepsilon^2 = \varepsilon \in End(G_S)$ *такой, что*

$$\varepsilon(G_S) = uS_S \cong S_S$$

для некоторого $u \in G$.

Определение 1.6. S-полигон A_S называется *разложимым*, если существует два подполигона $B_S, C_S \subseteq A_S$ такие, что $A_S = B_S \cup C_S$ и $B_S \cap C_S = \emptyset$. В этом случае $A_S = B_S \cup C_S$ называется *разложением* полигона A_S.

В противном случае полигон A_S называется *неразложимым*.

Предложение 1.2. ([10], стр. 66) *Любой циклический полигон* $A_S = aS$, $a \in A_S$, *неразложим.*

Предложение 1.3. ([10], стр. 66) *Любой* S*-полигон* A_S *имеет единственное разложение на неразложимые подполигоны.*

Предложение 1.4. ([10], стр. 277) *Любой неразложимый проективный* S*-полигон* P_S *цикличен и существует* $e^2 = e \in S$ *такое, что* $P_S \cong eS_S$.

Предложение 1.5. ([10], стр. 294) *Пусть* $z \in S$. *Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *циклический полигон* zS *является проективным образующим в* $Act - S$;

(2) $zS \cong eS$ *для некоторого* $e^2 = e \in S$ *с* $e\mathcal{J}1$.

Из предложений 1.4 и 1.5 следует

Предложение 1.6. *Любой неразложимый проективный образующий* P_S *в* $Act - S$ *цикличен и существует* $e^2 = e \in S$ *такое, что* $e\mathcal{J}1$ *и* $P_S \cong eS_S$.

Предложение 1.7. ([10], стр. 295) *Все циклические проективные образующие в* $Act - S$ *изоморфны полигону* S_S *в любом из следующих случаев:*

(1) *любой обратимый справа элемент в* S *обратим слева, и наоборот;*

(2) *все элементы бесконечного порядка в* S *являются степенями одного и того же элемента;*

(3) S *прост справа;*

(4) S *коммутативен;*

(5) S *— группа;*

(6) S *— группа с нулем;*

(7) *единица в* S *является присоединенной внешним образом.*

Определение 1.7. Моноиды S и T называются *Морита эквивалентными*, если категории $Act - S$ и $Act - T$ являются эквивалентными категориями (обозначение $S \sim_M T$).

Теорема 1.1. ([10], стр. 439) *Пусть* $F : Act - S \to Act - T$ *— эквивалентность категорий. Тогда существует циклический проективный образующий* $P_S \in Act - S$ *такой, что* $F(P_S) \cong T_T$ *в категории* $Act - T$.

Теорема 1.2. ([10], стр. 444) *Пусть* T *и* S *— моноиды. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) $S \sim_M T$;

(2) $T \cong eSe$ *для некоторого* $e^2 = e \in S$ *такого, что существуют* $l, l' \in S$ *с* $el = l$, $l'e = l'$, $l'l = 1$.

(3) $T \cong eSe$ *для некоторого* $e^2 = e \in S$ *такого, что существуют* $k, k' \in S$ *с* $ek = k$, $k'k = 1$.

Определение 1.8. Идемпотенты e_1 и e_2 называются *Морита эквивалентными идемпотентами* в S, если $e_1S \cong e_2S$ (обозначение: $e_1\mu_Se_2$).

2 Доказательство легкой импликации.

2.1 Структура $\langle Cn, Mon\rangle$.

Рассмотрим структуру $\langle Cn, Mon\rangle$, состоящую из класса Cn всех кардинальных чисел и моноида Mon с обычной операцией умножения $\circ$.

Логика второго порядка этой структуры $L_2(\langle Cn, Mon\rangle)$ позволяет использовать в формулах произвольные предикатные символы вида

$$P^{(n)}_{\lambda_1,\dots,\lambda_k},$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ — фиксированные кардинальные числа. В такой символ можно подставить элементы

$$P^{(n)}_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}(\alpha_1,\dots,\alpha_k; s_1,\dots,s_n),$$

где $\alpha_i \in \lambda_i$, $s_1,\dots,s_n \in Mon$.

Таким образом, в формулах данного языка мы можем использовать следующие подформулы:

1. $\forall s \in Mon$ ($\exists s \in Mon$);

2. $\forall \varkappa \in Cn$ ($\exists \varkappa \in Cn$);

3. $\forall \alpha \in \varkappa$ ($\exists \alpha \in \varkappa$), где $\varkappa$ — либо свободная переменная формулы φ, либо $\varkappa$ определено в формуле φ раньше α (с помощью подформулы $\forall \varkappa \in Cn$ или $\exists \varkappa \in Cn$);

4. $s_1 = s_2$, $s_1 = s_2 \circ s_3$, где каждая из переменных s_1, s_2, s_3 либо является свободной переменной формулы φ , либо определена в формуле φ ранее (с помощью подформул $\forall s_i \in Mon$ или $\exists s_i \in Mon$);

5. $\varkappa_1 = \varkappa_2$, где каждая из переменных $\varkappa_1, \varkappa_2$ либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ ранее (с помощью подформулы $\forall \varkappa_i \in Cn$ или $\exists \varkappa_i \in Cn$);

6. $\alpha_1 = \alpha_2$, где каждая из переменных α_1, α_2 либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ ранее (с помощью подформулы $\forall \alpha_i \in \varkappa_i$ или $\exists \alpha_i \in \varkappa_i$ и $\varkappa_i$ также определены выше);

7. $\forall P^{(n)}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}$, $\exists P^{(n)}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}$, где каждая из переменных $\varkappa_1,\dots,\varkappa_k$ либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ ранее (с помощью подформулы $\forall \varkappa_i \in \mathrm{Cn}$ или $\exists \varkappa_i \in Cn$);

8. $\forall P^{(n)}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}(\alpha_1,\dots,\alpha_k; s_1,\dots,s_n)$, где каждая из переменных $\varkappa_1,\dots,\varkappa_k, \alpha_1,\dots,\alpha_k, s_1,\dots,s_n$, а также "предикативная" переменная $P^{(n)}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}$ либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ ранее (с помощью подформулы $\forall \varkappa_i \in \mathrm{Cn}$, $\exists \varkappa_i \in Cn$, $\forall \alpha_i \in \varkappa_i$, $\exists \alpha_i \in \varkappa_i$; $\forall s_i \in Mon$, $\exists s_i \in Mon$; $\forall P^{(n)}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}$, $\exists P^{(n)}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}$, соответственно; кроме того, $\varkappa_i$ вводится в формуле раньше чем α_i, $i = 1,\dots,k$; $P^{(n)}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}$ вводится после всех $\varkappa_1,\dots,\varkappa_k$).

2.2 Некоторые понятия в языке $L_2(\langle Cn, Mon\rangle)$.

Введем различные понятия, которые понадобятся нам далее, и выразим их в языке $L_2(\langle Cn, Mon\rangle)$.

Одноместное отношение $P^{(0)}_{\varkappa_1}$ будем называть *подмножеством кардинального числа* $\varkappa_1$.

Множество $\{\alpha \in \varkappa_1 | P_{\varkappa_1}(\alpha)\}$ будем обозначать через $P_{\varkappa_1}$. Мы будем использовать обозначение $\alpha \in P_{\varkappa_1}$ для выражения $P_{\varkappa_1}(\alpha)$.

Одноместное отношение $P^{(1)}$ будем называть *подмножеством моноида* Mon, и, аналогично предыдущему обозначению, использовать обозначение $s \in P^{(1)}$.

Любое двуместное отношение $F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$ (или $F^{(1)}_{\varkappa_1}$, или $F^{(2)}$) называется *соответствием* между кардинальными числами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ (или между кардинальным числом $\varkappa_1$ и моноидом Mon, или соответствием в моноиде). Будем использовать обозначение

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in P^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$$

(или $\langle \alpha_1, s_1 \rangle \in P^{(1)}_{\varkappa_1}$, или $\langle s_1, s_2 \rangle \in P^{(2)}$) для формулы $P^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}(\alpha_1, \alpha_2)$ (соответственно, $P^{(1)}_{\varkappa_1}(\alpha_1, s_1)$, или $P^{(2)}(s_1, s_2)$).

Соответствие $F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$ (или $F^{(1)}_{\varkappa_1}$, или $F^{(2)}$), для которого выполняется формула

$$\forall \alpha \in \varkappa_1 \exists \beta \in \varkappa_2 (\langle \alpha, \beta \rangle \in F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}) \wedge \forall \alpha \in \varkappa_1 \forall \beta_1, \beta_2 \in \varkappa_2 \\ (\langle \alpha, \beta_1 \rangle \in F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2} \wedge \langle \alpha, \beta_2 \rangle \in F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2)$$

(или

$$\forall \alpha \in \varkappa_1 \exists s \in Mon (\langle \alpha, s \rangle \in F^{(1)}_{\varkappa_1}) \wedge \forall \alpha \in \varkappa_1 \forall s_1, s_2 \in Mon \\ (\langle \alpha, s_1 \rangle \in F^{(1)}_{\varkappa_1} \wedge \langle \alpha, s_2 \rangle \in F^{(1)}_{\varkappa_1} \Rightarrow s_1 = s_2),$$

или

$$\forall s \in Mon \exists t \in Mon (\langle s, t \rangle \in F^{(2)}) \wedge \forall s, t_1, t_2 \in Mon \\ (\langle s, t_1 \rangle \in F^{(2)} \wedge \langle s, t_2 \rangle \in F^{(2)} \Rightarrow t_1 = t_2))$$

называется *отображением* из кардинального числа $\varkappa_1$ в кардинальное число $\varkappa_2$ (соответственно, из кардинального числа $\varkappa_1$ в моноид Mon, из моноида Mon в себя).

Утверждение, что $F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$ ($F^{(1)}_{\varkappa_1}$ или $F^{(2)}$) является отображением, выразим через $Func(F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2})$ ($Func(F^{(1)}_{\varkappa_1})$ или $Func(F^{(2)})$).

Отображение $F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$, для которого выполняется формула

$$\forall \beta \in \varkappa_2 \exists \alpha \in \varkappa_1 (\langle \alpha, \beta \rangle \in F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}),$$

называется *сюръективным* (обозначение: $Surj(F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2})$).

Отображение $F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$, для которого выполняется формула

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \varkappa_1 \forall \beta \in \varkappa_2 (\langle \alpha_1, \beta \rangle \in F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2} \wedge \langle \alpha_2, \beta \rangle \in F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2),$$

называется *инъективным* (обозначение: $Inj(F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2})$).

Отображение, одновременно являющееся сюръективным и инъективным, называется *биективным* (обозначение: $Bij(F^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2})$).

Отношение $F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}$, удовлетворяющее формуле

$$\forall \alpha \in \varkappa_1 \forall s \in Mon \exists \beta \in \varkappa_1 (F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}(\alpha, \beta, s)) \wedge \\ \forall \alpha; \beta_1, \beta_2 \in \varkappa_1 \forall s \in Mon (F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}(\alpha, \beta_1, s) \wedge F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}(\alpha, \beta_2, s) \Rightarrow \beta_1 = \beta_2),$$

называется *отображением* $F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1} : \varkappa_1 \times Mon \to \varkappa_1$ (обозначение $Map^{\varkappa_1}_{\varkappa_1 \times Mon}(F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1})$).

Отображение $F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}$, удовлетворяющее формуле

$$\begin{aligned}GenMap^{\varkappa_1}_{\varkappa_1\times Mon}(F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}) := Map^{\varkappa_1}_{\varkappa_1\times Mon}(F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1})\wedge\\ \wedge\,\forall\alpha\in\varkappa_1(F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}(\alpha,\alpha,1))\wedge\\ \wedge\,\forall\alpha,\beta,\gamma\in\varkappa_1\forall s,t\in Mon(F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}(\alpha,\beta,s)\wedge\\ F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}(\beta,\gamma,t)\Rightarrow F^{(1)}_{\varkappa_1,\varkappa_1}(\alpha,\gamma,st)),\end{aligned}$$

называется *порождающим полигон.*

2.3 Доказательство легкой импликации в теореме.

Теорема 2.1. *Если* $Th_2(\langle Cn,S_1\rangle)=Th_2(\langle Cn,S_2\rangle)$, *то* $Act-S_1\equiv Act-S_2$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное предложение φ первого порядка в языке теории категорий.

Мы переведем его в предложение $\widetilde{\varphi}$ второго порядка языка $L_2(\langle Cn,Mon\rangle)$ таким образом, что φ истинно в $Act-S$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\varphi}$ истинно в $\langle Cn,S\rangle$.

Сначала дадим неформальное определение этого перевода.

Каждый объект категории $Act-S$ — это полигон над моноидом S, т.е. некоторое множество A (мощности $\varkappa$) с отображением

$$\begin{aligned}A\times S\to A \qquad\qquad &(\varkappa\times S\to\varkappa),\\ a\times s\mapsto as \qquad\qquad &(\alpha\times s\mapsto\alpha s),\end{aligned}$$

удовлетворяющим свойствам $\forall a\in A\ a\cdot 1=a$ (можно сказать $\forall\alpha\in\varkappa\ \alpha\cdot 1=\alpha$) и $\forall a\in A$ $\forall s,t\in S\ a(st)=(as)t$ (можно сказать $\forall\alpha\in\varkappa\ \forall s,t\in S\ \alpha(st)=(\alpha s)t$).

Значит, любому полигону A_S можно поставить в соответствие пару, состоящую из кардинального числа $\varkappa=|A_S|$ и отношения $F^{(1)}_{\varkappa,\varkappa}$, удовлетворяющего формуле

$$GenMap^{\varkappa}_{\varkappa,Mon}(F^{(1)}_{\varkappa,\varkappa}).$$

Если два полигона A_S и B_S представлены парами $(\varkappa_A,\mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A})$ и $(\varkappa_B,\mathcal{B}^{(1)}_{\varkappa_B,\varkappa_B})$, то морфизм $F:A_S\to B_S$ (т.е. отображение $f:A\to B$ с условием $\forall a\in A\ \forall s\in S\ f(as)=f(a)s$) можно представить в виде отображения $F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}$, удовлетворяющего формуле

$$\begin{aligned}Mor_{A,B}(F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}) := Mor(\varkappa_A,\mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A},\varkappa_B,\mathcal{B}^{(1)}_{\varkappa_B,\varkappa_B},F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}) :=\\ = Func(F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B})\wedge\forall\alpha_1,\alpha_2\in\varkappa_A\forall\beta_1,\beta_2\in\varkappa_B\forall s\in Mon\\ (\mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A}(\alpha_1,\alpha_2,s)\wedge F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}(\alpha_2,\beta_2)\wedge F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}(\alpha_1,\beta_1)\Rightarrow\\ \Rightarrow\mathcal{B}^{(1)}_{\varkappa_B,\varkappa_B}(\beta_1,\beta_2,s)).\end{aligned}$$

Теперь перейдем к формальному переводу.

Проведем следующие замены в предложении φ.

1. Подформула $\forall A\in Obj(\dots)$ переводится в подформулу

$$\forall\varkappa_A\in Cn\forall\mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A}(GenMap^{\varkappa_A}_{\varkappa_A,Mon}(\mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A})\Rightarrow\dots).$$

2. Подформула $\exists A \in Obj(\dots)$ переводится в подформулу

$$\exists \varkappa_A \in Cn \exists \mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A}(GenMap^{\varkappa_A}_{\varkappa_A,Mon}(\mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A}) \wedge \dots).$$

3. Подформула $\forall f \in Mor(A,B)$ заменяется на подформулу

$$\forall F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}(Mor(\varkappa_A, \mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A}, \varkappa_B, \mathcal{B}^{(1)}_{\varkappa_B,\varkappa_B}, F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}) \Rightarrow \dots).$$

4. Подформула $\exists f \in Mor(A,B)$ заменяется на подформулу

$$\exists F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}(Mor(\varkappa_A, \mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A}, \varkappa_B, \mathcal{B}^{(1)}_{\varkappa_B,\varkappa_B}, F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}) \wedge \dots).$$

5. Подформула $A = B$ для $A, B \in Obj$ переводится в подформулу

$$\varkappa_A = \varkappa_B \wedge \forall \alpha, \beta \in \varkappa_A \forall s \in Mon(\mathcal{A}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A}(\alpha,\beta,s) \Leftrightarrow \mathcal{B}^{(1)}_{\varkappa_A,\varkappa_A}(\alpha,\beta,s)),$$

а подформула $f = g$ для $f, g \in Mor(A,B)$ — в подформулу

$$\forall \alpha \in \varkappa_A \forall \beta \in \varkappa_B (F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}(\alpha,\beta) \Leftrightarrow G^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}(\alpha,\beta)).$$

6. Подформула $f = 1_A$ для данных $A \in Obj$ и $f \in Mor(A,A)$ переводится в подформулу

$$\forall \alpha, \beta \in \varkappa_A (F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_A}(\alpha,\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta).$$

7. Подформула $f = g \circ h$ для данных $f \in Mor(A,C)$, $g \in Mor(B,C)$, $h \in Mor(A,B)$ $(A, B, C \in Obj)$ переводится в подформулу

$$\forall \alpha \in \varkappa_A \forall \gamma \in \varkappa_C (F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_C}(\alpha,\gamma) \Leftrightarrow \exists \beta \in \varkappa_B (G^{(0)}_{\varkappa_B,\varkappa_C}(\beta,\gamma) \wedge F^{(0)}_{\varkappa_A,\varkappa_B}(\alpha,\beta))).$$

Таким образом, можно заметить, что любое предложение первого порядка φ теории категорий можно перевести в предложение $\widetilde{\varphi}$ логики второго порядка L_2 структуры $\langle Cn, Mon\rangle$, алгоритм перевода не зависит от базисного моноида. Предложение φ выполняется в категории $Act - S$ тогда и только тогда, когда предложение $\widetilde{\varphi}$ выполняется в структуре $\langle Cn, S\rangle$. Отсюда легко видеть, что если

$$\langle Cn, S\rangle \equiv_2 \langle Cn, T\rangle,$$

то

$$Act - S \equiv Act - T.$$

$\square$

3 Некоторые построения.

3.1 Элементарная характеризация циклического проективного образующего в категории $Act - S$.

Лемма 3.1. *Для морфизма $f \in Mor(X,Y)$ формула*

$$Epi(f) := \forall Z \in Obj \forall k, h \in Mor(Y,Z)(k \circ f = h \circ f \Rightarrow k = h)$$

выполняется тогда и только тогда, когда f — эпиморфизм.

Доказательство. Это очевидно следует из определения эпиморфизма в категории. □

Лемма 3.2. *Формула*

$$Proj(P) := P \in Obj \wedge \forall X, Y \in Obj \forall f \in Mor(P,Y) \forall \pi \in Mor(X,Y)(Epi(\pi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \overline{f} \in Mor(P,X)(\pi \circ \overline{f} = f))$$

выделяет в любой категории проективные объекты.

Доказательство. Это очевидно следует из определения прективных объектов в категории. □

Лемма 3.3. *Формула*

$$Gener(G) := G \in Obj \wedge \forall X, Y \in Obj \forall f, g \in Mor(X,Y) \\ (f \neq g \Rightarrow \exists \alpha \in Mor(G,X)(f\alpha \neq g\alpha))$$

выделяет в любой категории образующие.

Доказательство. Это очевидно следует из определения образующего категории. □

Аналогично формуле $Epi(f)$, выделяющей эпиморфизмы, можно написать формулу $Mon(f)$, выделяющую мономорфизмы.

Лемма 3.4. *Формула*

$$Decomp(X) := X \in Obj \wedge \exists Y, Z \in Obj \exists f \in Mor(Y,X) \\ \exists g \in Mor(Z,X)(\forall K \in Obj \forall k_1 \in Mor(Y,K) \forall k_2 \in Mor(Z,K) \\ (\exists k \in Mor(X,K)(kf = k_1 \wedge kg = k_2)) \wedge (\forall k, k' \in Mor(X,K) \\ (kf = k_1 \wedge k'f = k_1 \wedge kg = k_2 \wedge k'g = k_2 \Rightarrow k = k')))$$

истинна в категории $Act - S$ для полигонов X, которые можно представить в виде $X \cong Y \coprod Z$, и только для них;

формула

$$Undecomp(X) := X \in Obj \wedge \neg Decomp(X)$$

истинна в категории $Act - S$ для неразложимых полигонов X, и только для них.

Доказательство. Первая формула является формальной записью того, что полигон X есть копроизведение полигонов Y и Z, но в категории $Act - S$ $Y \coprod Z = Y \dot{\bigcup} Z$, поэтому $X \cong Y \dot{\bigcup} Z$, т.е. полигон X разложим (см. определение 1.6). Из этого же определения получаем второе утверждение леммы. □

Лемма 3.5. *Формула*

$$CPG(X) := Proj(X) \wedge Gener(X) \wedge Undecomp(X)$$

характеризует циклические проективные образующие в категории $Act - S$.

Доказательство. Эта лемма очевидно следует из лемм 3.2–3.4 и предложения 1.6. □

3.2 Для данного циклического проективного образующего P_S выделение класса всех $\coprod_{i \in I} P_S$.

В этом пункте будем считать, что у нас фиксирован циклический проективный образующий P_S.

Лемма 3.6. *Формула*

$$(A \cong B) := Isom(A, B) := A, B \in Obj \wedge \exists f \in Mor(A, B)(Epi(f) \wedge Mon(f))$$

истинна в категории $Act - S$ для изоморфных полигонов, и только для них.

Доказательство. Очевидно. □

Совершенно очевидно, как написать формулу $(X \cong Y \dot{\bigcup} Z)$, утверждающую, что полигон X изоморфен объединению $Y \dot{\bigcup} Z$.

Лемма 3.7. *Формула*

$$\begin{aligned} Union_{P_S}(X) := Union(P_S, X) := \forall Y \in Obj(\exists Z \in Obj(X \cong Y \dot{\bigcup} Z) \wedge \\ \wedge Undecomp(Y) \Rightarrow (Y \cong P_S)) \wedge (\exists Y, Z \in Obj((Y \cong P_S) \wedge \\ \wedge (X \cong Y \dot{\bigcup} Z)) \vee (X \cong P_S))) \end{aligned}$$

истинна в категории $Act - S$ для полигонов X, изоморфных

$$\dot{\bigcup_{I}} P_S, \quad I \in Set, I \neq \emptyset,$$

и только для них.

Доказательство. Предположим, что $X \cong \dot{\bigcup}_I P_S$. Первая часть конъюнкции следует из того, что разложение полигона в объединение неразложимых компонент единственно.

Во второй части конъюнкции первая часть дизъюнкции выполняется при $|I| > 1$, а вторая — при $|I| = 1$.

Теперь предположим, что для некоторого полигона X выполнена формула $Union_{P_S}(X)$.

Если полигон X неразложим, то не может выполняться первая часть дизъюнкции во второй части конъюнкции, поэтому должна выполняться вторая часть этой дизъюнкции, откуда следует, что $X \cong P_S$.

Предположим теперь, что $X \cong \dot{\coprod}_{i \in I} X_i$, X_i неразложимы. Рассмотрим произвольное $i \in I$ и положим $Y := X_i$, $Z := \dot{\coprod}_{j \in I, j \neq i} X_j$. Тогда мы имеем ситуацию $X \cong Y \dot{\bigcup} Z \wedge Undecomp(Y)$, из которой (первая часть конъюнкции в формуле $Union_{P_S}(X)$) следует $Y = X_i \cong P_S$. Значит, $X \cong \dot{\coprod}_{i \in I} P_S$. □

Таким образом, для каждого проективного образующего P_S формула $Union_{P_S}(X)$ выделяет в категории $Act - S$ класс

$$Un_{P_S} = \{\dot{\bigcup_{\varkappa}} P_S | \varkappa \in Cn \setminus \{\emptyset\}\}.$$

3.3 Выделение множества вложений.

Пусть мы имеем фиксированный циклический проективный образующий P_S, а также полигон $X_S \cong \dot{\bigcup\limits_{\varkappa}} P_S$, $|\varkappa| > 1$, удовлетворяющий формуле $Union_{P_S}(X)$.

Лемма 3.8. *Формула*

$$\begin{aligned} &Inject_{P_S,X_S}(f) := Inject(P_S, X_S; f) := \\ &\qquad = f \in Mor(P_S, X_S) \wedge Mon(f) \wedge \exists Y \in Obj \exists g \in Mor(Y, X_S) \\ &\qquad (\forall K \in Obj \forall k_1 \in Mor(P_S, X_S) \forall k_2 \in Mor(Y, X_S)(\exists k \in Mor(X_S, K) \\ &\qquad (kf = k_1 \wedge kg = k_2)) \wedge (\forall k, k' \in Mor(X_S, K)(kf = k_1 \wedge k'f = k_1 \wedge \\ &\qquad\qquad \wedge kg = k_2 \wedge k'g = k_2 \Rightarrow k = k'))) \end{aligned}$$

истинна в категории $Act - S$ для морфизмов $f : P_S \to X_S \cong \dot{\bigcup\limits_{\varkappa}} P_S$, изоморфно отображающих P_S на одну из компонент в объединении $\dot{\bigcup\limits_{\varkappa}} P_S$, и только для них.

Доказательство. Если гомоморфизм f изоморфно отображает P_S на одну из компонент объединения $\dot{\bigcup\limits_{\varkappa}} P_S$ в полигоне X_S, то, во-первых, f является мономорфизмом, а во-вторых (так как $|\varkappa| > 1$), $X_S = X_1 \dot{\coprod} X_2$, где $X_1 \cong P_S$, ограничение f на X_1 является изоморфизмом P_S и X_1, и длинное условие в формуле $Inject(\dots)$ ровно является утверждением о том, что $X_S \cong P_S \dot{\coprod} X_2$, а в качестве вложения P_S в X_S можно выбрать f.

Пусть теперь формула $Inject(f)$ истинна для некоторого мономорфизма $f : P_S \to X_S$. Тогда из длинной части формулы следует, что образ $f(P_S)$ выделяется в модуле X_S в непересекающееся объединение с некоторым подполигоном $g(Y)$.

Так как f — мономорфизм, то подполигон $f(P_S)$ неразложим в X_S, откуда следует, что он совпадает с одной из компонент, изоморфных P_S в $X_S \cong \dot{\coprod\limits_{\varkappa}} P_S$. □

Лемма 3.9. *Формула*

$$\begin{aligned} &SurMain_{P_S,X_S}(\rho) = SurMain(P_S, X_S; \rho) := \\ &\qquad = \rho \in Mor(X_S, P_S) \wedge \forall f \in Mor(P_S, X_S) \\ &\qquad (Inject_{P_S,X_S}(f) \Rightarrow \exists g \in Mor(P_S, P_S)(g \circ (\rho \circ f) = (\rho \circ f) \circ g = 1_{P_S})) \end{aligned}$$

истинна в категории $Act - S$ для эпиморфизмов $\rho \in Mor(X_S, P_S)$, которые каждую компоненту в $X_S \cong \dot{\coprod\limits_{\varkappa}} P_S$ изоморфно отображают на полигон P_S, и только для них.

Доказательство. Пусть отображение $\rho : X_S \to P_S$ имеет вид, описанный в условии леммы. Рассмотрим произвольное вложение $f : P_S \to X_S$, удовлетворяющее формуле $Inject_{P_S,X_S}(f)$.

Пусть $f(P_S) = X_1 \cong P_S$, $X_S = X_1 \dot{\coprod} X_2$.

Так как $f : P_S \to X_1$ — изоморфизм, $\rho|_{X_1} : X_1 \to P_S$ — изоморфизм, то $\rho \circ f$ — автоморфизм полигона P_S, что и утверждается в формуле.

Пусть теперь отображение $\rho : X_S \to P_S$ удовлетворяет формуле $SurMain(\dots)$. Нам нужно показать, что если $X_S = \coprod\limits_{i\in\varkappa} X_i$ $(X_i \cong P_S)$, то для всех $i \in \varkappa$ отображение $\rho|_{X_i} : X_i \to P_S$ — изоморфизм.

Это очевидно следует из того, что $\rho \circ f$ — автоморфизм полигона P_S для любого изоморфизма $f : P_S \to X_i$. □

Теперь помимо полигонов P_S и X_S мы фиксируем некоторый гомоморфизм $\rho : X_S \to P_S$, удовлетворяющий формуле $SurMain_{P_S,X_S}(\rho)$.

Лемма 3.10. *Формула*

$$InjMain_{P_S,X_S,\rho}(f) := f \in Mor(P_S, X_S) \wedge Inject_{P_S,X_S}(f) \wedge (\rho \circ f = 1_{P_S})$$

истинна в категории $Act - S$ для некоторого множества

$$\{f_i \in Mor(P_S, X_S) | f(P_S) = X_i, f : P_S \to X_i \text{ — изоморфизм}, i \in \varkappa\}$$

вложений, по одному для каждого $i \in \varkappa$.

Доказательство. Очевидно. □

4 Доказательство основной теоремы.

Теорема 4.1. *Предположим, что моноид S_1 удовлетворяет следующему условию: существует предложение $Select$ языка второго порядка структуры $\langle Cn, Mon\rangle$, истинное для моноида S, Морита эквивалентного S_1, тогда и только тогда, когда*

$$\langle Cn, S_1\rangle \equiv_2 \langle Cn, S_2\rangle.$$

Тогда для любого моноида S_2 условие $Act - S_1 \equiv Act - S_2$ равносильно $\langle Cn, S_1\rangle \equiv_2 \langle Cn, S'\rangle$ для некоторого моноида S', Морита эквивалентного S_2.

Теорема 4.1 легко вытекает из следующего предложения:

Предложение 4.1. *Предположим, что предложение $Select$ языка второго порядка структуры $\langle Cn, Mon\rangle$ истинно для моноида S', Морита экивалентного данному моноиду S тогда и только тогда, когда*

$$\langle Cn, S'\rangle \equiv_2 \langle Cn, S\rangle.$$

В этом случае сущесвует алгоритм, переводящий любое предложение φ языка второго порядка структуры $\langle Cn, Mon\rangle$ в предложение $\widetilde{\varphi}$ языка первого порядка теории категорий таким образом, что

$$\langle Cn, S\rangle \vDash \varphi \Leftrightarrow Act - S \vDash \widetilde{\varphi}.$$

Алгоритм не зависит от моноида S, а зависит лишь от предложения $Select$.

Доказательство. Сначала фиксируем некоторый циклический проективный образующий P_S в категории $Act - S$ и будем использовать его во всех переводах.

Переведем предложение φ в предложение

$$\widetilde{\varphi} = \exists P_S \in Obj(CPG(P_S) \wedge \widetilde{Select}(P_S) \wedge \widetilde{\varphi}(P_S)),$$

где $\widetilde{\varphi}(P_S)$ получается из φ следующим образом:

1) подформула $\forall \varkappa \in Cn(\dots)$ переводится в подформулу

$$\forall X_S^\varkappa \in Obj \forall \rho^\varkappa \in Mor(X_S^\varkappa, P_S)(Union_{P_S}(X_S^\varkappa) \wedge SurMain_{P_S, X_S^\varkappa}(\rho^\varkappa) \Rightarrow \dots)$$

аналогично, подформула $\exists \varkappa \in Cn(\dots)$ переводится в подформулу

$$\exists X_S^\varkappa \in Obj \exists \rho^\varkappa \in Mor(X_S^\varkappa, P_S)(Union_{P_S}(X_S^\varkappa) \wedge SurMain_{P_S, X_S^\varkappa}(\rho^\varkappa) \wedge \dots)$$

2) подформула $\forall s \in S(\dots)$ переводится в подформулу

$$\forall h^s \in Mor(P_S, P_S)(\dots)$$

подформула $\exists s \in S(\dots)$ переводится в подформулу

$$\exists h^s \in Mor(P_S, P_S)(\dots).$$

3) подформула $\varkappa_1 = \varkappa_2$ переводится в подформулу

$$\exists F^{\varkappa_1,\varkappa_2} \in Mor(X_S^{\varkappa_1}, X_S^{\varkappa_2})(\exists G \in Mor(X_S^{\varkappa_2}, X_S^{\varkappa_1})(G \circ F^{\varkappa_1,\varkappa_2} = 1_{X_S^{\varkappa_1}} \wedge F^{\varkappa_1,\varkappa_2} \circ G = 1_{X_S^{\varkappa_2}}))$$

4) подформула $\forall \alpha \in \varkappa$ для уже переведенного $\varkappa \in Cn$ переводится в подформулу

$$\forall f^\alpha \in Mor(P_S, X_S^\varkappa)(InjMain_{P_S, X_S^\varkappa, \rho^\varkappa}(f^\alpha) \Rightarrow \dots);$$

аналогично для $\exists \alpha \in \varkappa$.

5) подформула $\alpha_1 = \alpha_2$ при уже определенных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ таких, что $\varkappa_1 = \varkappa_2$, переводится в подформулу

$$f^{\alpha_2} = F^{\varkappa_1,\varkappa_2} \circ f^{\alpha_1},$$

а подформула $\alpha_1 = \alpha_2$ при $\alpha_1, \alpha_2 \in \varkappa$ — в подформулу

$$f^{\alpha_1} = f^{\alpha_2}.$$

6) подформула $s_1 = s_2$ при уже определенных $s_1, s_2 \in S$ переводится в подформулу

$$h^{s_1} = h^{s_2}.$$

7) подформула $s_1 = s_2 \circ s_3$ при уже определенных $s_1, s_2, s_3 \in S$ переводится в подформулу

$$h^{s_1} = h^{s_3} \circ h^{s_2}.$$

8) Для дальнейших переводов нужно ввести еще некоторые формулы.

Лемма 4.1. *Полигон X_S удовлетворяет формуле*

$$\begin{aligned}BigUnion_{P_S}(X_S) := Union_{P_S}(X_S) \wedge \forall \rho \in Mor(X_S, P_S) \\ (SurMain_{P_S,X_S}(\rho) \Rightarrow \exists \rho' \in Mor(X_S, P_S)(\forall f \in Mor(P_S, P_S) \\ \exists f' \in Mor(P_S, X_S)(InjMain_{P_S,X_S,\rho}(f') \wedge f = \rho' \circ f')))\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда $X_S \cong \dot{\coprod\limits_{\varkappa}} P_S$*, где* $\varkappa \geq |EndP_S|$.

Доказательство. Формула $BigUnion_{P_S}(X_S)$ утверждает, во-первых, что $X_S \cong \dot{\coprod\limits_{\varkappa}} P_S$, а во-вторых, что существует набор вложений $f_i : P_S \to \dot{\coprod\limits_{\varkappa}} P_S$, $i \in \varkappa$ и сюръекция $\rho' : \dot{\coprod\limits_{\varkappa}} P_S \to P_S$ такие, что набор

$$\{g_i \in Mor(P_S, P_S) | g_i = \rho' \circ f_i, i \in \varkappa\}$$

содержит все можество $Mor(P_S, P_S)$. Значит, $\varkappa \geq |Mor(P_S, P_S)|$.

Очевидно, что при $\varkappa \geq |Mor(P_S, P_S)|$ искомые отображения существуют. □

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 4.2. *Полигон X_S удовлетворяет формуле*

$$\begin{aligned}NormUnion_{P_S}(X_S) := BigUnion_{P_S}(X_S) \wedge \forall \rho \in Mor(X_S, P_S) \\ (SurMain_{P_S,X_S}(\rho) \Rightarrow \exists \rho' \in Mor(X_S, P_S)(\forall f_1, f_2 \in Mor(P_S, X_S) \\ (InjMain_{P_S,X_S,\rho}(f_1) \wedge InjMain_{P_S,X_S,\rho}(f_2) \wedge f_1 \neq f_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho' \circ f_1 \neq \rho' \circ f_2)))\end{aligned}$$

тогда и только тогда, когда $X_S \cong \dot{\coprod\limits_{\varkappa}} P_S$*, где* $\varkappa = |EndP_S|$.

Кроме того, очевидно, что

Лемма 4.3. *Для полигонов* $X_S \cong \dot{\coprod\limits_{\varkappa}} P_S$ *и* $X'_S \cong \dot{\coprod\limits_{\varkappa'}} P_S$ *формула*

$$\begin{aligned}(X_S \leq X'_S) := Union_{P_S}(X_S) \wedge Union_{P_S}(X'_S) \wedge \\ \wedge (\exists Y \in Obj(Union_{P_S}(Y) \wedge X'_S \cong X_S \dot{\coprod} Y) \vee X'_S \cong X_S)\end{aligned}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\varkappa' \geq \varkappa$.

Теперь совершим следующее удобное упрощение. Заметим, что в формулах языка $L_2(\langle Cn, Monoid\rangle)$ можно обойтись только лишь двухместными предикатными символами следующих трех видов:

а) $P^{(0)}_{\varkappa_1,\varkappa_2}$;

б) $P^{(1)}_{\varkappa_1}$;

в) $P^{(2)}$.

Будем производить переводы именно для них.

а) подформула $\forall P_{\varkappa_1,\varkappa_2}(\dots)$ (где $\varkappa_1, \varkappa_2$ уже определены) переводится в подформулу

$$X^{\varkappa_2} \le X^{\varkappa_1} \Rightarrow \forall g_P^{\varkappa_1} \in Mor(X^{\varkappa_1}, X^{\varkappa_1}) \forall g_P^{\varkappa_1} \in Mor(X^{\varkappa_1}, X^{\varkappa_2})$$
$$(\forall f_1 \in Mor(P_S, X^{\varkappa_1})(InjMain_{P_S, X^{\varkappa_1}, \rho^{\varkappa_1}}(f_1) \Rightarrow \exists f_1' \in Mor(P_S, X^{\varkappa_1})$$
$$(InjMain_{P_S, X^{\varkappa_1}, \rho^{\varkappa_1}}(f_1') \wedge f_1' = p_P^{\varkappa_1} \circ f_1 \wedge \exists f_2' \in Mor(P_S, X^{\varkappa_2})$$
$$(InjMain_{P_S, X^{\varkappa_2}, \rho^{\varkappa_2}}(f_2') \wedge f_2' = g_P^{\varkappa_2} \circ f_1)) \Rightarrow \ldots) \wedge$$
$$X^{\varkappa_1} \le X^{\varkappa_2} \Rightarrow \forall g_P^{\varkappa_2} \in Mor(X^{\varkappa_2}, X^{\varkappa_2}) \forall g_P^{\varkappa_2} \in Mor(X^{\varkappa_2}, X^{\varkappa_1})$$
$$(\forall f_1 \in Mor(P_S, X^{\varkappa_2})(InjMain_{P_S, X^{\varkappa_2}, \rho^{\varkappa_2}}(f_1) \Rightarrow \exists f_1' \in Mor(P_S, X^{\varkappa_2})$$
$$(InjMain_{P_S, X^{\varkappa_2}, \rho^{\varkappa_2}}(f_1') \wedge f_1' = p_P^{\varkappa_2} \circ f_1 \wedge \exists f_2' \in Mor(P_S, X^{\varkappa_1})$$
$$(InjMain_{P_S, X^{\varkappa_1}, \rho^{\varkappa_1}}(f_2') \wedge f_2' = g_P^{\varkappa_1} \circ f_1)) \Rightarrow \ldots)$$

Это условие означает, что при $\varkappa_1 \ge \varkappa_2$ мы рассматриваем отображения $\dot{\coprod\limits_{\varkappa_1}} P_S \cong \dot{\coprod\limits_{i \in \varkappa_1}} X_i$ в себя и в $\dot{\coprod\limits_{\varkappa_2}} P_S \cong \dot{\coprod\limits_{j \in \varkappa_2}} X_j$, причем рассматриваем их просто как отбражения множества $\varkappa_1$ в себя и в $\varkappa_2$.

Теперь подформула $P_{\varkappa_1, \varkappa_2}(\alpha_1, \alpha_2)$ при $\varkappa_1 \ge \varkappa_2$ переводится в подформулу

$$\exists f \in Mor(P_S, X^{\varkappa_1})(InjMain_{P_S, X^{\varkappa_1}, \rho^{\varkappa_1}}(f) \wedge f^{\alpha_1} = g_P^{\varkappa_1} \circ f \wedge f^{\alpha_2} = g_P^{\varkappa_2} \circ f),$$

то есть отношение $P_{\varkappa_1, \varkappa_2}$ состоит из таких пар $i \in \varkappa_1$, $j \in \varkappa_2$, что существует $k \in \varkappa_1$ с условием, что $g_P^{\varkappa_1}$ переводит X_k в X_i, а $g_P^{\varkappa_2}$ переводит X_k в Y_j.

Мощность множества таких пар может достигать $\varkappa_1 = \max(\varkappa_1, \varkappa_2)$, что нам и требуется.

б) Теперь рассмотрим подформулу

$$\forall P_{\varkappa}^{(1)}(\ldots).$$

Она переводится в

$$(BigUnion_{P_S}(X^{\varkappa}) \Rightarrow \forall g_P^{\varkappa} \in Mor(X^{\varkappa}, X^{\varkappa}) \forall g_P^M \in Mor(X^{\varkappa}, P_S)$$
$$(\forall f \in Mor(P_S, X^{\varkappa})(InjMain_{P_S, X^{\varkappa}, \rho^{\varkappa}}(f) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow InjMain_{P_S, X^{\varkappa}, \rho^{\varkappa}}(g_P^{\varkappa} \circ f)) \Rightarrow \ldots)) \wedge \wedge (\neg BigUnion_{P_S}(X^{\varkappa}) \Rightarrow \forall X_P \in Obj \forall \rho_P \in Mor(X_P, P_S)$$
$$(NormUnion_{P_S}(X_P) \wedge SurMain_{P_S, X_P}(\rho_P) \Rightarrow \forall g_P^{\varkappa} \in Mor(X_P, X^{\varkappa})$$
$$\forall g_P^M \in Mor(X_P, P_S)(\forall f \in Mor(P_S, X_P)(InjMain_{P_S, X_P, \rho_P}(f) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow InjMain_{P_S, X^{\varkappa}, \rho^{\varkappa}}(g_P^{\varkappa} \circ f)) \Rightarrow \ldots)).$$

Здесь при $\varkappa \ge |End\, PS|$ мы рассматриваем полигон $\dot{\coprod\limits_{i \in \varkappa}} X_i \cong \dot{\coprod\limits_{\varkappa}} P_S$, его морфизм $g_P^{\varkappa}$ в самого себя, индуцирующий отображение $\varkappa \to \varkappa$, а также отображение $\dot{\coprod\limits_{i \in \varkappa}} X_i$ в P_S, индуцирующее отображение

$$\varkappa \to End\, P_S.$$

Аналогично поступаем при $\varkappa < |End\, P_S|$.

Теперь в первом случае переводим $P_{\varkappa}^{(1)}(\alpha, s)$ в

$$\exists f \in Mor(P_S, X^{\varkappa})(InjMain_{P_S, X^{\varkappa}, \rho^{\varkappa}}(f) \wedge f^{\alpha} = g_P^{\varkappa} \circ f \wedge h^s = g_P^M \circ f),$$

а во втором случае — в

$$\exists f \in Mor(P_S, X_P)(InjMain_{P_S,X_P,\rho_P}(f) \wedge f^\alpha = g_P^\varkappa \circ f \wedge h^s = g_P^M \circ f).$$

в) Наконец, разберемся с подформулами вида

$$\forall P^{(2)}(\dots).$$

Такая подформула переводится в

$$\forall X_P \in Obj \forall \rho_P \in Mor(X_P, P_S)(SurMain_{P_S,X_P}(\rho_P) \Rightarrow \forall g_P^1, g_P^2 \in Mor(X_P, P_S)(\dots)).$$

Здесь мы просто рассматриваем полигон

$$\dot{\coprod_{i\in\varkappa}} X_i \cong \dot{\coprod_{\varkappa}} P_S$$

при $\varkappa = |End\, P_S|$ и его морфизмы g_P^1, g_P^2 в P_S, индуцирующие отображения $\varkappa \to End\, P_S$.

Таким образом, мы можем считать, что пара $\langle s, t\rangle \in P^{(2)}$, где $s, t \in End\, P_S$, тогда и только тогда, когда найдется индекс $i \in \varkappa$, для которого $g_P^1(X_i)$ индуцирует эндоморфизм s, а $p_P^2(X_i)$ — эндоморфизм t.

Именно, подформула $P^{(2)}(s,t)$ переводится в

$$\exists f \in Mor(P_S, X_P)(InjMain_{P_S,X_P,\rho_P}(f) \wedge h^s = g_P^1 \circ f \wedge h^t = p_P^2 \circ f).$$

Легко показать, что предложение φ выполняется в структуре $\langle Cn, End_S P_S\rangle$ тогда и только тогда, когда формула $\widetilde{\varphi}(X_S)$ выполняется в категории $Act - S$ для полигона P_S.

Таким образом, предложение $Select$ выполняется в структуре $\langle Cn, End\, P_S\rangle$ тогда и только тогда, когда формула $\widetilde{Select}(X_S)$ выполняется в категории $Act - S$ на полигоне P_S.

Теперь предположим, что предложение

$$\varphi \in Th_2(\langle Cn, S\rangle).$$

Рассмотрим предложение

$$\widetilde{\varphi} = \exists P_S \in Obj(CPG(P_S) \wedge \widetilde{Select}(P_S) \wedge \widetilde{\varphi}(P_S)).$$

Мы знаем, что на моноиде $S \cong End\, S_S$ выполянется предложение $Select$ (по условию нашего предложения). Следовательно, в категории $Act - S$ на полигоне S_S формула $\widetilde{Select}(S_S)$ верна. Кроме того, естественно, выполняются формулы $CPG(S_S)$ и $\widetilde{\varphi}(S_S)$. Значит,

$$\widetilde{\varphi} \in Th_1(Act - S).$$

Теперь предположим, что $\widetilde{\varphi} \in Th_1(Act - S)$. Это означает, что для некоторого циклического проективного образующего P_S выполняются формулы $\widetilde{Select}(P_S)$ и $\widetilde{\varphi}(P_S)$. Значит, предложение $Select$ выполняется в структуре $\langle Cn, End_S P_S\rangle$. Моноид $End_S P_S$ Морита эквивалентен моноиду S, откуда следует

$$\langle Cn, End_S P_S\rangle \equiv_2 \langle Cn, S\rangle.$$

Так как в категории $Act - S$ выполняется формула $\widetilde{\varphi}(P_S)$ на полигоне P_S, то предложение φ выполняется в структуре $\langle Cn, End_S P_S\rangle$, а значит, в структуре $\langle Cn, S\rangle$. $\square$

Если применить к теореме 4.1 предложение 1.7, то мы получим

Следствие 1. *Предположим, что моноид S_1 удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) *любой обратимый справа элемент в S_1 обратим слева, и наоборот;*

(2) *все элементы бесконечного порядка в S_1 являются степенями одного и того же элемента;*

(3) *S_1 прост справа;*

(4) *S_1 коммутативен;*

(5) *S_1 — группа;*

(6) *S_1 — группа с нулем;*

(7) *единица в S_1 является присоединенной внешним образом.*

Тогда для любого моноида S_2 условие $Act - S_1 \equiv Act - S_2$ равносильно $\langle Cn, S_1\rangle \equiv_2 \langle Cn, S'\rangle$ для некоторого моноида S', Морита эквивалентного S_2.

Определение 4.1. Идемпотенты e_1 и e_2 назовем *Морита эквивалентными идемпотентами в языке второго порядка* в S, если $\langle Cn, e_1Se_1\rangle \equiv_2 \langle Cn, e_2Se_2\rangle$ (обозначение: $e_1\mu_S^{(2)}e_2$).

Следствие 2. *Предположим, что в моноиде S_1 существует лишь конечное число не Морита эквивалентных в языке второго порядка идемпотентов. Тогда для любого моноида S_2 условие $Act - S_1 \equiv Act - S_2$ равносильно $\langle Cn, S_1\rangle \equiv_2 \langle Cn, S'\rangle$ для некоторого моноида S', Морита эквивалентного S_2.*

Список литературы

[1] А. И. Мальцев, Об элементарных свойствах линейных групп, в: *Проблемы математики и механики*, Новосибирск (1961), 110–132.

[2] Г. Кейслер, Ч.Ч. Чэн, *Теория моделей*, Мир, М., 1977.

[3] C. I. Beidar and A. V. Mikhalev, On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups, *Contemp. Math.*, **131**, 29–35 (1992).

[4] Е. И. Бунина, Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами, *Успехи Мат. Наук*, **53**, 2, 137–138 (1998).

[5] Е. И. Бунина, "Элементарная эквивалентность групп Шевалле," *Успехи Мат. наук*, **56**, 1, 157–158 (2001).

[6] Е.И. Бунина, Группы Шевалле над полями и их элементарные свойства, *Успехи мат. наук*, **59**, 5, 952–953 (2004).

[7] V. Tolstykh, Elementary equivalence of infinite-dimensional classical groups, *Ann. Pure Appl. Logic*, **105**, 103–156 (2000).

[8] Е.И. Бунина, А.В. Михалев, Элементарная эквивалентность категорий модулей над кольцами, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей, *Фунд. Прикл. Мат.*, **10**, 2, 51–134 (2004).

[9] Е.И. Бунина, А.В. Михалев, Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп, *Фунд. Прикл. Мат.*, **10**, 2, 135–224 (2004).

[10] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories*, Walter de Gruyter. Berlin–New York, 2000.