ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2017, том 472, № 2, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 512.534.7512.555

ГРУППЫ ЧАСТНЫХ ПОЛУГРУПП ОБРАТИМЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД ТЕЛАМИ

© 2017 г. Е. И. Бунина, А. В. Михалев, В. В. Немиро*

Представлено академиком РАН А.Т. Фоменко 15.03.2016 г.
Поступило 30.06.2016 г.

В работе доказывается, что для линейно упорядоченного тела группа частных полугруппы $G_n(\mathbb{D})$ совпадает с группой $GL_n(\mathbb{D})$ при $n \geq 3$.

DOI: 10.7868/S0869565217020037

В данной работе приводится доказательство для полугрупп над линейно упорядоченными телами, а не полями, как было доказано ранее [1]. Кроме того, доказательство приведено для всех размеров матриц, начиная с 3×3, а не только конкретно этого размера.

Пусть D – линейно упорядоченное тело. Рассмотрим $G_n(\mathbb{D})$ – подполугруппу в группе $GL_n(\mathbb{D})$, состоящую из всех матриц с неотрицательными коэффициентами.

Существует понятие (например, введенное А.И. Мальцевым в работе [2]) группы частных для полугруппы. Группа частных полугруппы G – это группа с теми же порождающими, что и полугруппа G, соотношения в которой – только следствия соотношений полугруппы G.

Поскольку над линейно упорядоченным телом порождающие полугруппы $G_n(\mathbb{D})$ гарантированно совпадают с порождающими группы $GL_n(\mathbb{D})$, то естественно задаться вопросом, не совпадет ли группа частных полугруппы $G_n(\mathbb{D})$ с группой $GL_n(\mathbb{D})$.

В работе [3] В.Г. Фаянс рассмотрел этот вопрос для $n = 2$ и получил отрицательный ответ. В работе [1] Е.И. Бунина и В.В. Немиро доказали, что в случае, когда $n = 3$ и $\mathbb{D}$ – линейно упорядоченное поле, ответ на поставленный вопрос является положительным.

В данной работе мы доказываем, что для линейно упорядоченного тела группа частных полугруппы $G_n(\mathbb{D})$ совпадает с группой $GL_n(\mathbb{D})$ при $n \geq 3$. В этой работе будут частично использоваться результаты работы [1].

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
**E-mail: vlad.nemiro@gmail.com*

Полугруппа $G_n(R)$ для различных типов упорядоченных колец R с точки зрения ее автоморфизмов, эндоморфизмов и элементарной эквивалентности изучалась различными авторами: А.В. Михалевым, М.А. Шаталовой, Е.И. Буниной, П.П. Семеновым [4]– [11].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть имеется некоторая непустая полугруппа A. Каждому элементу x из A поставим в соответствие новый элемент x^-, не входящий в A. Обозначим через S совокупность всех конечных слов, состоящих из новых элементов и элементов полугруппы A. Определим следующие элементарные преобразования:

1) между любыми двумя соседними элементами слова вставляется пара x^-x или пара xx^-;

2) из слова выбрасывается либо пара x^-x, либо пара xx^-;

3) два соседние элемента слова, принадлежащие к A, заменяются элементом, равным их произведению;

4) элемент $x \in A$ заменяется парой элементов из A, произведение которых равно x.

Все слова относительно этих элементарных преобразований распадаются на классы эквивалентных между собой. Пусть (a) означает класс, к которому принадлежит слово a. По определению полагаем $(a)(b) = (ab)$. Классы относительно такого умножения образуют группу G.

Определение 1. Построенная группа G называется *группой частных* полугруппы A.

Обозначим положительные и отрицательные элементы тела $\mathbb{D}$ через $\mathbb{D}_+$ и $\mathbb{D}_-$ соответственно.

Определение 2. Введем для матриц элементарных преобразований следующие обозначения:

$$t_{ij}(a) = E + a \cdot E_{ij}, \quad \text{где } i \neq j.$$

Через σ обозначим матрицу перестановки, соответствующую $\sigma \in S_n$. Обозначим $\mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_k \in \mathbb{D}^*$.

Будем называть перечисленные матрицы *элементарными*.

Определение 3. Пусть $\mathbf{P}$ — подполугруппа в $G_n(\mathbb{D})$, порожденная всеми матрицами σ ($\sigma \in S_n$), $t_{i,j}(x)$ ($x \in \mathbb{D}_+, i \neq j$) и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, $\alpha_k \in \mathbb{D}_+^*$.

Определение 4. Две матрицы $A, B \in G_n(\mathbb{D})$ называются $\mathcal{P}$-*эквивалентными* (см. [4]), если существуют матрицы $A_j \in G_n(R), j = 0, 1, \ldots, k$, $A = A_0$, $B = A_k$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ такие, что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

Над линейно упорядоченным телом полугруппа, порожденная всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$, совпадает с всей полугруппой $G_n(\mathbb{D})$.

В случае $n = 2$ в работе [2] рассматривалась следующая система образующих полугруппы $\mathbf{P}$, совпадающей в этой размерности со всей $G_2(\mathbb{D})$:

$$\mathrm{diag}[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad t_{12}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$t_{21}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta > 0$, $a \geq 0$.

При $n > 2$ полугруппа $\mathbf{P}$ строго меньше полугруппы $G_n(\mathbb{D})$ (см. далее).

В данной системе образующих при $n = 2$ соотношения принимают следующий вид:

1. $\mathrm{diag}[1, 1] = t_{12}(0)$;
2. $\mathrm{diag}[\alpha, \beta]\mathrm{diag}[\gamma, \delta] = \mathrm{diag}[\alpha\gamma, \beta\delta]$;
3. $t_{12}(a)t_{12}(b) = t_{12}(a + b)$;
4. $\mathrm{diag}[\alpha, \beta]t_{12}(x) = t_{12}(\alpha x \beta^{-1})\mathrm{diag}[\alpha, \beta]$;
5. $t_{12}(x)t_{21}(y) = \mathrm{diag}[\alpha, \beta]t_{21}(u)t_{12}(v)$, где $\alpha = 1 + xy$, $\beta = (1 + yx)^{-1}$, $u = y\alpha$, $v = x\beta$;
6. $\sigma\mathrm{diag}[\alpha, \beta] = \mathrm{diag}[\beta, \alpha]\sigma$;
7. $\sigma t_{12}(a)\sigma = t_{21}(a)$;
8. $\sigma^2 = \mathrm{diag}[1, 1]$;
9. $\mathrm{diag}[1, 1]\sigma = \sigma$.

При $n > 2$ появляются (по крайней мере) следующие дополнительные соотношения:

$$t_{ij}(a)t_{kl}(b) = t_{kl}(b)t_{ij}(a), \quad \text{где} \quad i \neq l \quad \text{и} \quad j \neq k;$$
$$t_{ij}(a)t_{jk}(b) = t_{ik}(ab)t_{jk}(b)t_{ij}(a), \quad \text{где} \quad i \neq k.$$

Обозначим через e элемент, соответствующий единичной матрице.

Во всей группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ определяющие соотношения примут следующий вид:

1. $e = t_{ij}(0)$;
2. $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n][\beta_1, \ldots, \beta_n] = [\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n]$;
3. $t_{ij}(x)t_{ij}(y) = t_{ij}(x + y)$;
4. $\alpha t_{ij}(x) = t_{ij}(\alpha_i x \alpha_j^{-1})\alpha$;
5. $t_{ij}(x)t_{ji}(y) = \alpha t_{ji}(u)t_{ij}(v)$, где α — диагональная матрица $1 + xy = \alpha_i$, $(1 + yx)^{-1} = \alpha_j$, $u = y\alpha_i$, $v = x\alpha_j$;
6. $\sigma[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}]$;
7. $\sigma t_{ij}(a)\sigma^{-1} = t_{\sigma(i)\sigma(j)}(a)$;
8. $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3$, где σ_3 — перестановка $\sigma_1\sigma_2$ в S_n;
9. $e\sigma = \sigma$;
10. $t_{ij}(a)t_{kl}(b) = t_{kl}(b)t_{ij}(a)$, где $i \neq l$ и $j \neq k$;
11. $t_{ij}(a)t_{jk}(b) = t_{ik}(ab)t_{jk}(b)t_{ij}(a)$, где $i \neq k$.

Замечание 1. Очевидно, что группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ не содержит собственной подгруппы, содержащей $G_n(\mathbb{D})$. Таким образом, группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ является минимальной группой, содержащей полугруппу $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$.

2. ГРУППА ЧАСТНЫХ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО $n \geq 3$

Приведем несколько важных определений и предложений из работы [1].

В случае $n > 2$ с помощью элементарных порождающих σ, $t_{ij}(a)$ и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ невозможно представить все элементы полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$. Простейшим примером элемента, который таким образом не выражается, является матрица с нулевыми элементами на главной диагонали и положительными вне нее.

Введем матрицу

$$u(a, b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-3} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{D}_+.$$

Предложение 1. ([1, предложение 1]). *Система* σ, $\mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $u(a, b)$, $t_{ij}(a)$, *где* $a \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ *и* $\sigma \in S_3$, *является полной системой образующих для полугруппы* $\mathrm{G}_3(\mathbb{F})$.

Предложение 2. ([1, предложение 2]). *В группе частных полугруппы* $\mathrm{G}_3(\mathbb{F})$ *элемент* $c = t_{12}(-1)t_{21}(1)$ *является элементом порядка* 6, *где* $\mathbb{F}$ — *линейно упорядоченное поле.*

Докажем дополнительное предложение, аналогичное предложению 2.

Предложение 3. *В группе частных полугруппы* $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ *элемент* $c = t_{12}(-1)t_{21}(1)$ *является элементом порядка* 6, *где* $\mathbb{D}$ — *линейно упорядоченное тело.*

Доказательство. Рассмотрим минимальный элемент $u(a,b)$. Разложим его на элементарные матрицы (в том числе с отрицательными коэффициентами):

$$u(a,b) = t_{32}(-b^{-1})\mathrm{diag}[b,1,b^{-1}(a+b)]\times$$
$$\times\,\sigma_{321}t_{12}((a+b)^{-1}b)t_{31}(a)t_{23}(b^{-1}).$$

Таким образом, получаем новое соотношение, которое имеет следующий вид:

$$t_{32}(b^{-1})u(a,b) = \mathrm{diag}[b,1,b^{-1}(a+b)]\times$$
$$\times\,\sigma_{321}t_{12}((a+b)^{-1}b)t_{31}(a)t_{23}(b^{-1}).$$

Транспонировав и заменив a на b, получим следующее равенство:

$$u(a,b) = t_{32}(a^{-1})t_{13}(b)t_{21}(a(a+b)^{-1})\sigma_{123}\times$$
$$\times\,\mathrm{diag}[a,1,(a+b)a^{-1}]t_{23}(-a^{-1}).$$

Это значит, что у нас есть еще одно дополнительное соотношение:

$$u(a,b)t_{23}(a^{-1}) = t_{32}(a^{-1})t_{13}(b)t_{21}\times$$
$$\times\,(a(a+b)^{-1})\sigma_{123}\mathrm{diag}[a,1,(a+b)a^{-1}].$$

Таким образом, получаем дополнительное соотношение

$$t_{32}(-b^{-1})\mathrm{diag}[b,1,b^{-1}(a+b)]\times$$
$$\times\,\sigma_{321}t_{12}((a+b)^{-1}b)t_{31}(a)t_{23}(b^{-1}) =$$
$$= t_{32}(a^{-1})t_{13}(b)t_{21}(a(a+b)^{-1})\sigma_{123}\times$$
$$\times\,\mathrm{diag}[a,1,(a+b)a^{-1}]t_{23}(-a^{-1}).$$

В конечном итоге получим следующее соотношение, выраженное через элементы полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$:

$$t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})t_{12}(a)t_{21}(-a^{-1})t_{31}(a^{-1}+b^{-1}) =$$
$$= t_{23}(-(a+b)^{-1}b)t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})t_{32}(b^{-1}(a+b))\sigma_{321}\times$$
$$\times\,\mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1},a,(a+b)^{-1}b].$$

Возведем равенство в квадрат и справа получим следующее:

$$t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})t_{21}(a^{-1})t_{23}(-(a+b)^{-1}b)t_{32}(b^{-1}(a+b))\cdot$$
$$\cdot\, t_{12}(-a)t_{23}(-(a+b)^{-1}b)t_{21}(a^{-1})\cdot$$
$$\cdot\, t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})t_{12}(-a)t_{13}(a(a+b)^{-1}b).$$

Таким образом, имеем следующие равенства:

$$(t_{12}(a)t_{21}(-a^{-1}))^3 = t_{21}(a^{-1})t_{23}(-(a+b)^{-1}b)t_{32}\cdot$$
$$\cdot\,(b^{-1}(a+b))t_{12}(-a)t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\cdot$$
$$\cdot\, t_{21}(a^{-1})t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})\cdot$$
$$\cdot\, t_{12}(-a)t_{13}(a(a+b)^{-1}b)t_{31}(-a^{-1}-b^{-1});$$

$$(t_{12}(a)t_{21}(-a^{-1}))^5 = t_{23}(-(a+b)^{-1}b)t_{13}\cdot$$
$$\cdot\,(-a(a+b)^{-1}b)t_{21}(a^{-1})t_{13}(a(a+b)^{-1}b)t_{12}(-a);$$
$$(t_{12}(a)t_{21}(-a^{-1}))^6 = E.$$

Значит, в полугруппе частных выполняется соотношение $(t_{12}(a)t_{21}(-a^{-1}))^6 = E$.

Предложение доказано.

Теперь мы можем доказать основную теорему этой работы.

Теорема 1. *Для линейно упорядоченного тела* $\mathbb{D}$ *группа частных полугруппы* $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ *изоморфна группе* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$.

Доказательство. Обозначим через H группу частных полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$. В силу того, что $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ является минимальным расширением $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$, группа H является расширением группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ (или совпадает с ней).

Поскольку определяющее соотношение $(t_{12}(-1)t_{21}(1))^6 = e$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ является следствием образующих соотношений полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ (по предложению 3), а остальные соотношения группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ очевидным образом выводятся из образующих соотношений полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$, то группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ является расширением группы H.

Значит, $H = \mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бунина Е.И., Немиро В.В.* Группа частных полугруппы обратимых неотрицательных матриц порядка три над полями // Фундамент. и прикл. математика. 2013. Т. 18. № 3. С. 27–42.
2. *Мальцев А.И.* О включении ассоциативных систем в группы. II // Мат. сб. 1940. Т. 8. № 2. С. 251–264.
3. *Фаянс В.Г.* Группа частных полугруппы неособенных матриц с неотрицательными элементами // УМН. 1973. Т. 28. № 6. С. 221–222.
4. *Михалев А.В., Шаталова М.А.* Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 4. С. 600–609.

5. *Бунина Е.И., Михалев А.В.* Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундам. и прикл. математика. 2005. Т. 11. № 2. С. 3–23.
6. *Бунина Е.И., Михалев А.В.* Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундам. и прикл. математика. 2006. Т. 12. № 2. С. 39–53.
7. *Бунина Е.И., Семенов П.П.* Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. № 2. С. 69–100.
8. *Бунина Е.И., Семенов П.П.* Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14. № 4. С. 75–85.
9. *Бунина Е.И.* Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Мат. заметки. 2011. Т. 91. № 1. С. 3–12.
10. *Семенов П.П.* Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными целыми элементами // Мат. сб. 2012. Т. 203. № 9. С. 117–132.
11. *Семенов П.П.* Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными кольцами // Фундам. и прикл. математика. 2012. Т. 17. № 5. С. 165–178.