ЛЕКЦИЯ 12

ПРОСТОТА ГРУППЫ $\mathbf{SO}_3$

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

РАЗРЕШИМОСТЬ ГРУППЫ ВЕРХНИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

ПРОСТОТА ГРУППЫ $\mathbf{SO}_3$

В качестве примера использования геометрических соображений для доказательства простоты группы докажем, что группа $\mathbf{SO}_3$ проста.

$\mathbf{SO}_n$ — это группа всех движений евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию пространства.

В частности, интересующая нас сейчас группа $\mathbf{SO}_3$ — это группа движений трехмерного пространства, сохраняющих ориентацию пространства.

Рассмотрим произвольную матрицу $A \in \mathbf{SO}_3$. Если представить ее как комплексную матрицу, то она имеет три собственных значения: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (корни характеристического многочлена).

Заметим, что в курсе линейной алгебры доказывалось, что ортогональное пребразование всегда диагонализируемо на $\mathbb{C}$ (так как любое подпространство, являющееся ортогональным дополнением к инвариантному, само является инвариантным).

Если α — какое-то собственное значение, а v_α — соответствующий собственный вектор (возможно, с комплексными координатами), то $|\alpha| = 1$ (так как собственный вектор под действием движения не может изменять длину). Значит, возможны следующие корни характеристического многочлена (с учетом того, что их произведение равно единице, и что невещественные корни могут встречаться только в парах со своими сопряженными):

— $1, 1, 1$ (и тогда преобразование тождественно);

— $1, -1, -1$;

$-1, \cos\theta + i\sin\theta, \cos\theta - i\sin\theta$.

Таким образом, мы видим, что всегда существует собственный вектор с единичным собственным значением, т.е. прямая, точки которой отсаются на месте при преобразовании A.

Ортогональное дополнение к этой прямой (перпендикулярная плоскость) будет инвариантным подпространством для A. Ясно, что на нем A действует как поворот на угол θ, а матрица A принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы доказали, что любой элемент группы $\mathbf{SO}_3$ есть поворот вокруг какой-то оси на определенный угол α.

Преобразование, сопряженное с помощью элемента $g \in \mathbf{SO}_3$ повороту на угол α вокруг оси l, — это поворот на тот же угол вокруг оси gl.

Действительно, ясно, что у сопряженного отображения те же собственные значения, что и у исходного, поэтому поворот будет на тот же угол, что и у исходного. Осталось понять, какой вектор будет неподвижным (собственным со значением 1) у сопряженного отображения.

Пусть v — неподвижный вектор отображения A. Рассмотрим вектор gv. Тогда отображение gAg^{-1} действует на него так:

$$gAg^{-1}(gv) = gA(v) = gv,$$

т.е. прямая gl — неподвижная для сопряженного отображения.

Значит, всякая нормальная подгруппа группы $\mathbf{SO}_3$ вместе с поворотом на угол α вокруг какой-либо оси должна содержать поворот на угол α вокруг любой оси.

Легко видеть, что произведение поворотов на π вокруг осей m и m', образующих угол γ, есть поворот на угол 2γ вокруг оси, перпендикулярной плоскости осей m и m': ось, перпендикулярная прямым m и m', останется недвижимой, так как повернется два раза подряд на угол π; ось m сначала останется на месте, а под действием второго преобразования повернется на 2γ (так как это будет отражение оси m относительно оси m').

Предположим теперь, что $N \lhd \mathbf{SO}_3$ — нормальная подгруппа, содержащая поворот на угол $\alpha \in (0, 2\pi)$ вокруг какой-то оси l.

Пусть g — поворот на π вокруг оси m, образующей с осью l угол $\theta \in [0, \pi/2]$. Тогда

$$h = g(sgs^{-1}) = (gsg^{-1})s^{-1} \in N;$$

но так как sgs^{-1} есть поворот на π вокруг оси sm, то, согласно предыдущему замечанию, h есть поворот на угол 2γ, где γ — угол между m и sm. Угол γ равен нулю при $\theta = 0$ и равен α при $\theta = \pi/2$. Из соображений непрерывности следует, что он может принимать все значения на отрезке $[0, \alpha]$. Следовательно, группа N содержит повороты на все углы из отрезка $[0, 2\pi]$. Возведением этих поворотов в степени можно получить поворот на любой угол. Это показывает, что $N = \mathbf{SO}_3$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Группа* $\mathbf{SO}_3$ *проста.*

Можно показать, что группа $\mathbf{SO}_n$ проста при любом $n \geqslant 3$, за исключением $n = 4$.

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Название этого класса групп восходит к эпохе Абеля, Галуа и др. Задача о решении алгебраических уравнений в радикалах привела к понятию разрешимой группы.

Рассмотрим следующий ряд подгрупп группы G, называемый *производным рядом коммутантов*:

$$G \supseteq G' \supseteq G'' = [G', G'] \supseteq \ldots \supseteq G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \supseteq \ldots$$

(каждая следующая подгруппа $G^{(i)}$ является коммутантом

$$[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$$

предыдущей подгруппы $G^{(i-1)}$).

Замечание 1.

1) Если $f\colon G \to H$ — гомоморфизм групп, то $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$, и поэтому $f(G') \subseteq H'$. Следовательно, $f(G'') \subseteq H''$, и далее $f(G^{(i)}) \subseteq H^{(i)}$.

2) Если $g \in G$, $f\colon G \to G$, $f(x) = g^{-1}xg$ для $x \in G$, — внутренний автоморфизм, то, применяя 1), видим, что $g^{-1}G^{(i)}g \subseteq G^i$, т. е. $G^{(i)} \lhd G$ (все подгруппы $G^{(i)}$ производного ряда нормальны в G).

Определение 1. Группа G называется *разрешимой* (класса не выше чем i), если $G^{(i)} = \{e\}$ для некоторого i.

Замечание 2.

1) Если G — абелева группа, то $G' = \{e\}$, поэтому группа G разрешимая.

2) Простая группа G, $G \neq \{e\}$, разрешима в том и только в том случае, когда $|G|$ — простое число (G — циклическая группа простого порядка).

3) Группы $\mathbf{S}_n$ и $\mathbf{A}_n$ разрешимы при $n \leqslant 4$ и не являются разрешимыми при $n \geqslant 5$.

4) Группа диэдра $\mathbf{D}_{2n}$ разрешима.

5) Группа кватернионов $\mathbb{Q}_8$ разрешима.

СВОЙСТВА РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Лемма 1. *Если G — разрешимая группа (класса не выше чем i) и H — подгруппа группы G, то H — разрешимая группа (класса не выше чем i).*

Доказательство. Так как $G^{(k)} \supseteq H^{(k)}$, то $\{e\} = G^{(i)} \supseteq H^{(i)}$, т. е. $H^{(i)} = \{e\}$. $\square$

Лемма 2. *Если $f\colon G \to H$ — сюръективный гомоморфизм и G — разрешимая группа (класса не выше чем i), то $H = f(G)$ также разрешимая группа (класса не выше чем i).*

Доказательство. Так как $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ и f — сюръективный гомоморфизм, то $f(G') = H'$, а поэтому $H^{(i)} = f(G^{(i)}) = \{e_H\}$. $\square$

Следствие 1. *Если G — разрешимая группа (класса не выше чем i) и $N \lhd G$, то фактор-группа G/N — разрешимая группа (класса не выше чем i).*

Доказательство. Рассмотрим канонический сюръективный гомоморфизм $\pi_N\colon G \to G/N$. $\square$

Теорема 2. *Группа G разрешима тогда и только тогда, когда в группе G существует субнормальная цепь подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_{i-1} \supset G_i \supset \ldots \supset G_r = \{e\}$$

(это означает, что $G_{i+1} \lhd G_i$ для всех i) с абелевыми фактор-группами G_{i-1}/G_i для всех i.

Доказательство.

1) Допустим, что группа G разрешимая. Рассмотрим цепь нормальных подгрупп коммутантов (производный ряд коммутантов)

$$G \supset G' \supset G'' \supset \ldots \supset G^{(i)} = \{e\}.$$

Тогда $G^{(i-1)}/G^{(i)} = G^{(i-1)}/[G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ — абелева группа для всех i.

2) Допустим, что существует указанная субнормальная цепь подгрупп с абелевыми факторами. Так как G_0/G_1 — коммутативная группа, то $G' \subseteq G_1$. Далее, $G'' = [G', G'] \subseteq [G_1, G_1] \subseteq G_2$, поскольку G_1/G_2 — абелева группа. Таким образом, $G^{(i)} \subseteq G_i$ для всех i, и поэтому $G^{(r)} \subseteq G_r = \{e\}$, т. е. G — разрешимая группа (класса не выше чем r). $\square$

Следствие 2. *Если N — нормальная подгруппа группы G, то G — разрешимая группа тогда и только тогда, когда N и G/N — разрешимые группы.*

Доказательство.

1) Если G — разрешимая группа, то, как мы уже доказали, N и G/N — разрешимые группы.

2) Допустим, что N и $G/N = \bar{G}$ — разрешимые группы. Тогда существуют субнормальные цепи с абелевыми фактор-группами:

$N = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supseteq N_r = \{e\}$, $\quad N_{i-1}/N_i$ — абелева группа,
$G/N = \bar{G} = \bar{G}_0 \supset \bar{G}_1 \supset \ldots \supset \bar{G}_s = \{\bar{e}\}$, $\quad \bar{G}_{i-1}/\bar{G}_i$ — абелева группа.

Из строения и свойств подгрупп фактор-группы следует, что $\bar{G}_i = G_i/N$, $N \subseteq G_i \subseteq G$, $G_{i-1} \triangleright G_i$, $\bar{G}_{i-1}/\bar{G}_i = (G_{i-1}/N)/(G_i/N) \cong G_{i-1}/G_i$ — абелева группа. Таким образом,

$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s = N = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_r = \{e\}$ —

субнормальная цепь в группе G с абелевыми фактор-группами, т. е. G — разрешимая группа. □

Упражнение 1. Любая конечная группа из менее чем 60 элементов разрешима.

Упражнение 2. Если $|G| = p^2 q$, $q \neq p$, то G — разрешимая группа.

Замечание 3. Теорема Бернсайда (1904 г.) утверждает, что если p и q — различные простые числа, то любая группа порядка $p^m q^n$ разрешима ($m, n \geqslant 0$).

РАЗРЕШИМОСТЬ ГРУППЫ ВЕРХНИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Теорема 3. *Группа треугольных матриц* $G = \mathbf{T}_n(K)$ *над полем* K *(т. е. треугольных матриц вида*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$0 \neq a_{ii} \in K$*) является разрешимой группой.*

Доказательство.

1) Рассмотрим унитреугольную подгруппу $H = \mathbf{U}T_n(K)$ матриц вида

$$B = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении треугольных матриц их соответствующие диагональные элементы перемножаются, поэтому в матрице $A^{-1}BA$ на (i,i)-м месте стоит $a_{ii}^{-1} 1 a_{ii} = 1$, т. е. $A^{-1}BA \in H$, и поэтому H — нормальная подгруппа в G, $H \lhd G$. Это же соображение показывает, что $[G, G] \subseteq H$, поскольку для $A, D \in \mathbf{T}_n(K)$ в коммутаторе $[A, D]$ на месте (i,i) стоит элемент $a_{ii}^{-1} d_{ii}^{-1} a_{ii} d_{ii} = 1$, т. е. $[A, D] \in H$. Поэтому фактор-группа G/H абелева и, следовательно, разрешимая.

2) Докажем индукцией по n, что $H = H_n$ — разрешимая группа. Рассмотрим отображение

$$H_n = \mathbf{U}T_n(K) \xrightarrow{f} \mathbf{U}T_{n-1}(K) = H_{n-1},$$

при котором если

$$B = \begin{pmatrix} B' & * \\ 0\ldots 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то $f(B) = B'$. Так как для $x, y \in \hat{K}^{n-1}$, $B', C' \in \mathbf{U}T_{n-1}(K)$ имеем

$$\begin{pmatrix} B' & x \\ 0\ldots 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C' & y \\ 0\ldots 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B'C' & B'y + x \\ 0\ldots 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то f — сюръективный гомоморфизм групп, при этом

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} E_{n-1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \hat{K}^{n-1} \right\}.$$

Тогда $\ker f \lhd \mathbf{U}T_n(K)$ (как ядро гомоморфизма f) и

$$\mathbf{U}T_n(K)/\ker f \cong \mathbf{U}T_{n-1}(K)$$

(в силу теоремы о гомоморфизме). Но $\ker f$ — абелева группа, и следовательно, разрешимая группа. По индуктивному предположению $\mathbf{U}T_{n-1}(K)$ — разрешимая группа. Тогда и группа $H = H_n$ разрешимая.

3) Так как $H = \mathbf{U}T_n(K)$ — разрешимая группа и G/H — разрешимая группа, то $G = \mathbf{T}_n(K)$ — разрешимая группа. $\square$