ЛЕКЦИЯ 20

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ТЕОРЕМА МАШКЕ

ЛЕММА ШУРА И СЛЕДСТВИЯ

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Предложение 1. *Если группа G абелева, а поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, то неприводимыми над $\mathbb{F}$ представлениями группы G являются только одномерные представления.*

Доказательство. Так как группа G абелева, то все операторы $\varphi(g)$, $g \in G$ коммутируют.

Однако множество коммутирующих операторов всегда имеет общий собственный вектор, то есть у данного представления (если оно не одномерно) есть собственная инвариантная прямая.

Таким образом, лишь одномерные представления могут быть неприводмы.

На всякий случай напомним, как доказывается, что у множества коммутирующих операторов есть общий собственный вектор.

Если два оператора A и B коммутируют, поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, рассмотрим некоторое собственное подпространство V_λ^A оператора A с собственным значением λ.

Рассмотрим некоторый вектор $v \in V_\lambda^A$.

Тогда

$$BA(v) = B(\lambda \cdot v) = \lambda B(v) = A(B(v)).$$

Таким образом,

$$B(v) \in V_\lambda^A,$$

то есть подпространство V_λ^A — инвариантно и для оператора B.

Значит, у оператора B на этом подпространстве есть собственный вектор u, который автоматически окажется собственный и для A.

Для произвольного множества векторов доказательство аналогично. $\square$

Пример 1. Над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел утверждение предыдущего предложения не будет выполняться: у абелевой группы $\mathbb{Z}_n$ $(n > 2)$ можно рассмотреть двухмерное представление, при котором

$$k \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi/n & \sin 2\pi/n \\ -\sin 2\pi/n & \cos 2\pi/n \end{pmatrix}.$$

Это представление, очевидно, будет неприводимо.

Опишем теперь все неэквивалентные неприводимые представления конечно порожденной абелевой группы A над полем комплексных чисел.

Как мы уже знаем, все они одномерны.

При этом группа A раскладывается в прямую сумму конечных и бесконечных циклических групп.

Пусть, для определенности,

$$A = \oplus_k \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_m}.$$

Обозначим образующие бесконечных циклических групп через $a_1, \ldots, a_k$, а образующие групп $\mathbb{Z}_{n_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{n_m}$ — через $b_1, \ldots, b_m$.

Понятно, что нам требуется построить все различные гомоморфизмы из группы A в группу $\mathbb{C}^*$.

Для этого нужно задать гомоморфизм на образующих.

Образующие $a_1, \ldots, a_k$ переводятся в произвольные элементы группы $\mathbb{C}^*$, а элементы $b_1, \ldots, b_m$ должны при гомоморфизме переходить в корни их единицы степеней $n_1, \ldots, n_m$, соответственно (n_i вариантов для каждого b_i).

Далее отображение однозначно продолжается до гомоморфизма.

Заметим в скобках, что если группа A была конечна, то у нее будет ровно $|A|$ различных комплексных неприводимых представлений.

Лемма 1. *Для любого одномерного представления φ группы G (над произвольным полем) коммутант группы G содержится в ядре φ.*

Доказательство. Так как группа $\mathbb{C}^*$ абелева, то одномерное представление группы G — это гомоморфизм из некоторой группы в абелеву группу. Как мы знаем, в этом случае ядро гомоморфизма содержит коммутант. $\square$

Таким образом, чтобы построить все одномерные представления группы G, нужно рассмотреть группу A — фактор группы G по ее коммутанту и построить все одномерные представления этой абелевой группы, что мы уже умеем делать.

ТЕОРЕМА МАШКЕ

Теорема 1 (теорема Машке). *Каждое линейное представление конечной группы G над полем K характеристики, не делящей $|G|$ (в частности, нулевой), вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть U — инвариантное относительно φ подпространство во всем пространстве представления V.

Рассмотрим прямую сумму

$$V = U \oplus U',$$

где U' — произвольным образом выбранное дополнение к U. Вообще говоря, U' не является φ-инвариантным.

Возьмем оператор проектирования $\rho : V \to U'$, определенный соотношением

$$\rho v = u'$$

для всякого вектора $v = u + u'$. Имеем

$$v - \rho v \in U, \quad \rho(U) = 0, \quad \rho^2 = \rho.$$

Возьмем теперь "усредненный" линейный операто

$$\rho_G = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \varphi(h) \rho \varphi(h^{-1})$$

(деление на $|G|$ по условию возможно).

Покажем, что

$$\varphi(g)\rho_G = \rho_G\varphi(g)$$

для всех $g \in G$.

Действительно,

$$\varphi(g)\rho_G\varphi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi(g)\varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})\varphi(g^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\varphi(gh)\rho\varphi((gh)^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\varphi(t)\rho\varphi(t^{-1}) = \rho_G,$$

что и приводит к искомому равенству.

Теперь положим

$$W = \rho_G(V) = \{\rho_G v \mid v \in V\}.$$

Благодаря соотношению

$$\varphi(g)\rho_G = \rho_G\varphi(g)$$

имеем

$$\varphi(g)w = \varphi(g)\rho_G v = \rho_G\varphi(g)v = \rho_G v' = w' \in W$$

для всякого $w \in W$, так что векторное подпространство $W \subset V$ также является φ-инвариантным подпространством.

Осталось показать, что $V = U \oplus W$ — прямая сумма подпространств.

Так как

$$\varphi(h^{-1})v - \rho\varphi(h^{-1})v \in U,$$

то

$$v - \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})v = \\ = \varphi(h)\left(\varphi(h^{-1})v - \rho\varphi(h^{-1})v\right) \in \varphi(h)U = U$$

(применяем инвариантность U).

Следовательно,

$$v - \rho_G v = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}(v - \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})v) = u \in U,$$

и мы получаем

$$v = u + w, \qquad \text{где } w = \rho_G v \in W,$$

т.е.

$$V = U + W.$$

Осталось доказать, что

$$U \cap W = 0.$$

Так как

$$\varphi(h^{-1})U \subset U \Rightarrow \rho\varphi(h^{-1})U = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(h)\rho\varphi(h^{-1})U = 0 \Rightarrow \rho_G(U) = 0,$$

откуда следует

$$v - \rho_G v = u \in U \Rightarrow \rho_G(v - \rho_G v) = 0,$$

поэтому $\rho_G v = \rho_G^2 v$ для всех $v \in V$. Это значит, что ρ_G — проектирование на W вдоль U:

$$\rho_G(U) = 0, \quad \rho_G^2 = \rho_G.$$

Пусть теперь

$$v \in U \cap W,$$

тогда $\rho_G v = 0$, поскольку $v \in U$, и $v = \rho_G v'$, поскольку $v \in \rho_G(V) = W$.

Используя предыдущие соотношения, получаем

$$0 = \rho_G v = \rho_G(\rho_G v') = \rho_G^2 v' = \rho_G v' = v,$$

откуда следует, что

$$U \cap W = 0.$$

□

Однозначности разложения на неприводимые компоненты, конечно же, не будет.

Например, если $\varphi(g)$ — единичный оператор для всех $g \in G$, то любое прямое разложение пространства V в сумму одномерных подпространств будет разложением на неприводимые компоненты, а таких разложений бесконечно много.

Однако если мы сгруппируем все изоморфные неприводимые компоненты:

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s,$$

где

$$\begin{aligned} &U_1 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_1 = n_1 V_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &U_s = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s = n_s V_s, \end{aligned}$$

то такое разложение уже будет иметь однозначный вид (докажем это позже).

Замечание 1. Почти один и тот же пример демонстрирует, что теорема Машке перестает быть верной, если либо группа G бесконечна, либо характеристика поля делит порядок группы.

Именно, рассмотрим группу $G = \mathbb{Z}$ и ее двухмерное представление

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы уже упоминали выше, что оно приводимо, но не вполне приводимо.

Теперь рассмотрим поле характеристики p и группу $G = \mathbb{Z}_p$ с представлением

$$n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Оно также является приводимым, но не вполне приводимым.

ЛЕММА ШУРА

Теорема 2 (лемма Шура). *Пусть*

$$\varphi : G \to \mathrm{GL}\,(V) \text{ и } \psi : G \to \mathrm{GL}\,(W)$$

— два неприводимых представления группы G,

$$\sigma : V \to W$$

— линейное отображение такое, что

$$\psi(g)\sigma = \sigma\varphi(g) \quad \forall g \in G.$$

Тогда

а) *если представления φ и ψ не эквивалентны, то $\sigma = 0$;*

б) *если $V = W$, $\varphi = \psi$, представления комплексны, то $\sigma = \lambda E$.*

Доказательство. а) Если представления φ и ψ не эквивалентны, то σ — не изоморфизм.

1. Пусть у σ есть ненулевое ядро $U \subset V$. Тогда для любого $u \in U$ $\sigma(u) = 0$. Рассмотрим $\varphi(g)u = u'$. Так как

$$\sigma u' = \sigma\varphi(g)u = \psi(g)\sigma u = 0,$$

то $\varphi(g)u \in U$. Значит, U — инвариантное подпространство.

Таким образом, ядро может быть ненулевым только при $\sigma = 0$.

2. Пусть образ σ не совпадает со всем W. Обозначим этот образ через $U \subset W$, пусть $u \in U$. Тогда

$$\psi(g)u = \psi(g)\sigma u' = \sigma(\varphi(g)u') \in U.$$

Таким образом, U — инвариантное подпространство.

б) То же самое, но надо вычесть λE, где λ — собственное значение для σ. $\square$

СЛЕДСТВИЯ ЛЕММЫ ШУРА

Предложение 2. *Пусть $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ и $\psi : G \to \mathrm{GL}(W)$ — два неприводимых комплексных представления конечной группы G порядка $|G|$ и $\sigma : V \to W$ — произвольное линейное отображение.*

Тогда усредненное отображение

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g) \sigma \varphi(g)^{-1}$$

обладает следующими свойствами:

а) если φ и ψ не эквивалентны, то $\widetilde{\sigma} = 0$;

б) если $V = W$, $\varphi = \psi$, то $\tilde{\sigma} = \lambda E$, $\lambda = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{\dim V}$.

Доказательство. Нужно лишь проверить, что отображение $\tilde{\sigma}$ удовлетворяет условиями леммы Шура:

$$\psi(g)\tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|}\psi(g) \sum_{h \in G} \psi(h) \sigma \varphi(h)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(g)\psi(h)\sigma\varphi(h)^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(gh)\sigma\varphi(h)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi(gh)\sigma\varphi(gh)^{-1}\varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h' \in G} \psi(h')\sigma\varphi(h')^{-1}\varphi(g) =$$

$$= \tilde{\sigma}\varphi(g).$$

Таким образом,

$$\psi(g)\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}\varphi(g) \text{ для всех } g \in G.$$

По лемме Шура вытекают сразу оба утверждение, причем уточнение по поводу константы следует из соотношений

$$(\dim V)\lambda = \operatorname{tr} \lambda E = \operatorname{tr} \tilde{\sigma} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{tr} \varphi(g)\sigma\varphi(g)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \ inG} \operatorname{tr} \sigma = \operatorname{tr} \sigma.$$

$\square$