Матрица перехода

от старого (упорядоченного) базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к новому $(e'_1, \ldots, e'_n)$ — это матрица, по столбцам которой записаны координаты векторов нового базиса в старом базисе:

$$\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\ \ldots \\ e'_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases} \iff \boxed{(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C,} \text{ где } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы. 1. Невырожденные матрицы и только они могут быть матрицами перехода. 2. Если $(e_1, \ldots, e_n) \xrightarrow{C} (e'_1, \ldots, e'_n) \xrightarrow{D} (e''_1, \ldots, e''_n)$, то $(e'_1, \ldots, e'_n) \xrightarrow{C^{-1}} (e_1, \ldots, e_n)$ и $(e_1, \ldots, e_n) \xrightarrow{CD} (e''_1, \ldots, e''_n)$.

Как найти матрицу перехода, зная координаты векторов обоих базисов $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, \ldots, e'_n)$ пространства K^n в стандартном базисе. Запишем координаты векторов первого базиса по столбцам матрицы A, а второго — по столбцам матрицы B рядом с A. Получим $(n \times 2n)$-матрицу $(A|B)$, которую приведём к главному ступенчатому виду. Так как матрица A невырожденная, то мы получим на её месте единичную матрицу E: $(A|B) \rightsquigarrow (E|C)$. Тогда C — искомая матрица.

Обоснование: столбцы матрицы C выражаются через столбцы матрицы E *точно так же*, как столбцы матрицы B через столбцы матрицы A (почему?), то есть с помощью искомой матрицы перехода.

Изменение координат векторов при переходе к другому базису. Пусть $X = (x^1, \ldots, x^n)^t \in K^n$ — столбец координат вектора $x \in V$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$, т. е.

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n = (e_1, \ldots, e_n)X$$

— произведение матрицы $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{M}_{1\times n}(V)$ на матрицу $X \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$. Далее пусть X' — столбец координат вектора x в базисе $(e'_1, \ldots, e'_n)$ и пусть C — матрица перехода $(e_1, \ldots, e_n) \to (e'_1, \ldots, e'_n)$. Тогда

$$(e_1, \ldots, e_n)X = (e'_1, \ldots, e'_n)X' = (e_1, \ldots, e_n)CX' \iff \boxed{X = CX'.}$$

Матрица перехода

от старого (упорядоченного) базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ к новому $(e'_1, \ldots, e'_n)$ — это матрица, по столбцам которой записаны координаты векторов нового базиса в старом базисе:

$$\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n \\ e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n \\ \ldots \\ e'_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases} \iff \boxed{(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)C,} \text{ где } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы. 1. Невырожденные матрицы и только они могут быть матрицами перехода. 2. Если $(e_1, \ldots, e_n) \xrightarrow{C} (e'_1, \ldots, e'_n) \xrightarrow{D} (e''_1, \ldots, e''_n)$, то $(e'_1, \ldots, e'_n) \xrightarrow{C^{-1}} (e_1, \ldots, e_n)$ и $(e_1, \ldots, e_n) \xrightarrow{CD} (e''_1, \ldots, e''_n)$.

Как найти матрицу перехода, зная координаты векторов обоих базисов $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, \ldots, e'_n)$ пространства K^n в стандартном базисе. Запишем координаты векторов первого базиса по столбцам матрицы A, а второго — по столбцам матрицы B рядом с A. Получим $(n \times 2n)$-матрицу $(A|B)$, которую приведём к главному ступенчатому виду. Так как матрица A невырожденная, то мы получим на её месте единичную матрицу E: $(A|B) \rightsquigarrow (E|C)$. Тогда C — искомая матрица.

Обоснование: столбцы матрицы C выражаются через столбцы матрицы E *точно так же*, как столбцы матрицы B через столбцы матрицы A (почему?), то есть с помощью искомой матрицы перехода.

Изменение координат векторов при переходе к другому базису. Пусть $X = (x^1, \ldots, x^n)^t \in K^n$ — столбец координат вектора $x \in V$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$, т. е.

$$x = x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n = (e_1, \ldots, e_n)X$$

— произведение матрицы $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{M}_{1\times n}(V)$ на матрицу $X \in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)$. Далее пусть X' — столбец координат вектора x в базисе $(e'_1, \ldots, e'_n)$ и пусть C — матрица перехода $(e_1, \ldots, e_n) \to (e'_1, \ldots, e'_n)$. Тогда

$$(e_1, \ldots, e_n)X = (e'_1, \ldots, e'_n)X' = (e_1, \ldots, e_n)CX' \iff \boxed{X = CX'.}$$

Матрица линейного оператора

$\mathcal{A}\colon V \to V$ в упорядоченном базисе $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V — это матрица $A \in \mathrm{M}_n(K)$, по столбцам которой стоят координаты образов $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ базисных векторов в том же базисе $e_1, \dots, e_n$. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{A}e_1 = 2e_1 \\ \mathcal{A}e_2 = e_2 \\ \mathcal{A}e_3 = 3e_2 + 2e_3 \\ \mathcal{A}e_4 = e_2 + 5e_4 \end{cases}$$

Как меняется матрица оператора при переходе к другому базису.

Бескоординатная запись	В базисе $(e_1, \dots, e_n)$	В базисе $(e'_1, \dots, e'_n)$
$y = \mathcal{A}x$	$Y = AX$	$Y' = A'X'$
$x, y \in V,\ \mathcal{A}\colon V \to V$	$X, Y \in K^n$ — столбцы, $A \in \mathrm{M}_n(K)$	$X', Y' \in K^n$ — столбцы, $A' \in \mathrm{M}_n(K)$

Так как $X = CX'$ и $Y = CY'$, то

$$Y = AX \iff CY' = ACX' \iff CA'X' = ACX' \text{ — для всех } X' \in K^n \text{, откуда}$$

$$CA' = AC \iff \boxed{A' = C^{-1}AC}.$$

Как быстро найти матрицу $C^{-1}AC$? Элементарными преобразованиями: $(C \mid AC) \rightsquigarrow (E \mid C^{-1}AC)$.

Контрольные вопросы. 1. Как меняется матрица оператора при перестановке базисных векторов?
2. Скалярные операторы и только они имеют во всех базисах одну и ту же матрицу (скалярную).
3. Матрицы A и $C^{-1}AC$ имеют одинаковые ранги, определители, следы.

Матрица линейного оператора

$\mathcal{A}\colon V \to V$ в упорядоченном базисе $(e_1, \dots, e_n)$ пространства V — это матрица $A \in \mathrm{M}_n(K)$, по столбцам которой стоят координаты образов $\mathcal{A}e_1, \dots, \mathcal{A}e_n$ базисных векторов в том же базисе $e_1, \dots, e_n$. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{A}e_1 = 2e_1 \\ \mathcal{A}e_2 = e_2 \\ \mathcal{A}e_3 = 3e_2 + 2e_3 \\ \mathcal{A}e_4 = e_2 + 5e_4 \end{cases}$$

Как меняется матрица оператора при переходе к другому базису.

Бескоординатная запись	В базисе $(e_1, \dots, e_n)$	В базисе $(e'_1, \dots, e'_n)$
$y = \mathcal{A}x$	$Y = AX$	$Y' = A'X'$
$x, y \in V,\ \mathcal{A}\colon V \to V$	$X, Y \in K^n$ — столбцы, $A \in \mathrm{M}_n(K)$	$X', Y' \in K^n$ — столбцы, $A' \in \mathrm{M}_n(K)$

Так как $X = CX'$ и $Y = CY'$, то

$$Y = AX \iff CY' = ACX' \iff CA'X' = ACX' \text{ — для всех } X' \in K^n \text{, откуда}$$

$$CA' = AC \iff \boxed{A' = C^{-1}AC}.$$

Как быстро найти матрицу $C^{-1}AC$? Элементарными преобразованиями: $(C \mid AC) \rightsquigarrow (E \mid C^{-1}AC)$.

Контрольные вопросы. 1. Как меняется матрица оператора при перестановке базисных векторов?
2. Скалярные операторы и только они имеют во всех базисах одну и ту же матрицу (скалярную).
3. Матрицы A и $C^{-1}AC$ имеют одинаковые ранги, определители, следы.

Алгебры

Алгебра ${}_K A$ над полем K — это одновременно кольцо и векторное пространство над K, причём кольцевое умножение $\cdot$ и умножение на скаляры из K для всех $a, b \in A$, $k \in K$ связаны равенствами:

$$\boxed{k(a \cdot b) = (ka) \cdot b = a \cdot (kb)}$$

Напомним остальные аксиомы, предполагая, что кольцо A ассоциативно и содержит единицу $1_A \neq 0_A$:

$$\begin{array}{llll} a+b=b+a & a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c & k(a+b)=ka+kb & \\ (a+b)+c=a+(b+c) & (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c & (k+l)a=ka+la & (a,b,c\in A, \\ a+0_A=a & (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) & (kl)a=k(la) & k,l\in K) \\ a+(-a)=0_A & a\cdot 1_A=a=1_A\cdot a & 1_K a=a & \end{array}$$

Контрольные вопросы. 1. В кольце $(R;+,\cdot)$: $\quad \forall r \in R \;\; 0 \cdot r = 0 = r \cdot 0$.
2. В векторном пространстве ${}_K V$: $\quad \forall k \in K \; \forall v \in V \;\; (kv = 0 \Leftrightarrow k = 0$ или $v = 0)$.

Примеры: $K[x]$, $K[x_1, \ldots, x_n]$, ${}_K L$ (расширение поля K) — коммутативные алгебры;
$\mathbb{H}$ (кватернионы), $\mathrm{M}_n(K)$, $\mathcal{L}(V)$ (линейные операторы в пространстве V) — некоммутативные алгебры.

Подалгебра алгебры A — это её непустое подмножество B, замкнутое относительно всех операций, т. е. и подкольцо, и векторное подпространство, причём если $A \ni 1_A$, то иногда требуют, чтобы $B \ni 1_A$.

Гомоморфизм $f\colon A \to A'$ алгебр ${}_K A$ и ${}_K A'$ — это гомоморфизм и колец, и векторных пространств:

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a)f(b), \quad f(ka) = kf(a) \qquad \text{для всех } a, b \in A,\; k \in K.$$

Отсюда следует, что $f(0_A) = 0_B$ и $f(-a) = -f(a)$ (почему?), но не следует, что $f(1_A) = 1_B$, если A и B — алгебры с единицами (возможно, $f = 0$). Однако тогда это свойство обычно включают в определение кольцевого гомоморфизма. Биективный гомоморфизм $f\colon A \to A'$ называется *изоморфизмом*. Если между алгебрами A и A' существует изоморфизм, то их называют *изоморфными* и пишут $A \cong A'$.

Контрольные вопросы. 3. Если $f\colon A \to B$ — изоморфизм, то $f^{-1}\colon B \to A$ тоже изоморфизм.
4. Примеры подалгебр, в том числе тех, которые изоморфны самим алгебрам.
5. Пример алгебры A с единицей 1_A и её подалгебры B со своей единицей $1_B \neq 1_A$.

Вложение поля K в алгебру ${}_K A$ с единицей 1_A: формально $K \not\subseteq A$, но если A — алгебра с единицей 1_A, то существует *каноническое вложение* — инъективный гомоморфизм

$$K \hookrightarrow A, \quad k \mapsto k1_A,$$

образ $K1_A$ которого часто отождествляют с полем K. Например, $K \hookrightarrow \mathrm{M}_n(K)$, $\;k \mapsto kE$.

Изоморфизм алгебры линейных операторов и алгебры матриц

Теорема. Пусть V — векторное пространство над полем K размерности $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{L}(V) \cong \mathrm{M}_n(K)$.

$\lhd$ Выберем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в V и каждому оператору из $\mathcal{L}(V)$ поставим в соответствие его матрицу в этом базисе. [Все проверки.] $\rhd$ Что надо проверить?

Следствие. $\dim \mathcal{L}(V) = \dim \mathrm{M}_n(K) = n^2$.

Матрицы одного и того же оператора в разных базисах называются *подобными*. Мы знаем, что матрицы $A, A' \in \mathrm{M}_n(K)$ подобны в точности тогда, когда они сопряжены, т. е. когда $A' = C^{-1}AC$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Таким образом, множество матриц $\mathrm{M}_n(K)$ разбивается на классы сопряжённых. Возникает задача: найти в каждом классе наиболее простую матрицу, или для данного оператора найти базис, в котором его матрица выглядит как можно проще.

Мы полностью решим эту задачу в случае поля $K = \mathbb{C}$ (важна алгебраическая замкнутость).

Пример. Матрица $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, оказывается, подобна матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Значит, в некотором базисе (e_1, e_2) соответствующий оператор действует так: вектор e_1 оставляет на месте, вектор e_2 растягивает в три раза.

Собственные векторы и собственные значения

Пусть V — векторное пространство над полем K, $\mathcal{A}\colon V \to V$ — линейный оператор в V.

Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}v = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in K$. В этом случае значение λ определяется однозначно (почему?) и называется *собственным значением*, отвечающим вектору v для оператора $\mathcal{A}$.

Примеры. 1. Для скалярного оператора $\lambda\mathcal{E}$ все ненулевые векторы — собственные со значением λ.

2. а) Оператор поворота плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат на угол φ не имеет собственных векторов, кроме случая $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$.

б) Оператор поворота пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг оси, проходящей через начало координат, оставляет точки этой оси неподвижными, поэтому все её ненулевые векторы являются собственными со значением 1.

3. Пусть оператор $\mathcal{A}$ задан в некотором базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ диагональной матрицей $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогда e_i — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ со значением λ_i при всех $i = 1, \ldots, n$.

4. В пространстве $C^\infty(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ действует оператор дифференцирования, для которого функция $t \mapsto e^{\lambda t}$ является собственным вектором со значением λ.

Контрольные вопросы. 1. Когда сумма двух собственных векторов является собственным вектором?

2. Если для оператора все ненулевые векторы являются собственными, то он скалярен.

3. Собственные векторы оператора $\mathcal{A}$ (матрицы A), отвечающие данному собственному значению λ, вместе с нулевым вектором образуют подпространство. Оно обозначается $V_\lambda(\mathcal{A})$ ($V_\lambda(A)$).

4. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Множество всех собственных значений оператора $\mathcal{A}$ называется его *спектром* и обозначается $\operatorname{Sp}\mathcal{A}$. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в каком-либо базисе. Тогда

$$\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A} \iff \text{оператор } \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} \text{ вырожден} \iff |A - \lambda E| = 0.$$

Многочлен $|A - xE| \in K[x]$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A, а также оператора $\mathcal{A}$ и обозначается $\chi_A(x) = \chi_{\mathcal{A}}(x)$.

Контрольные вопросы. 5. Определение многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(x)$ корректно, т. е. не зависит от выбора базиса, определяющего матрицу A: $\chi_A(x) = \chi_{C^{-1}AC}(x)$ для всех матриц $A \in \mathrm{M}_n(K)$ и $C \in \mathrm{GL}_n(K)$.

6. Чему равны коэффициенты многочлена $\chi_A(x)$ при x^n, x^{n-1}, x^0?

7. $A = \lambda E \in \mathrm{M}_n(K) \implies \chi_A(x) = (x - \lambda)^n \implies \operatorname{Sp} A = \{\lambda\}$, но обратные импликации неверны.

8. Характеристический многочлен $\chi_{R_\varphi}(x)$ матрицы $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, его корни и соответствующие собственные векторы.

9. $\forall \mu \in K\ \operatorname{Sp}(\mathcal{A} + \mu\mathcal{E}) = \operatorname{Sp}\mathcal{A} + \mu$. Собственные векторы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A} + \mu\mathcal{E}$ одни и те же.

10. Связь между $\operatorname{Sp}(\mathcal{A}^2)$ и $(\operatorname{Sp}\mathcal{A})^2$, $V_\lambda(\mathcal{A})$ и $V_{\lambda^2}(\mathcal{A}^2)$ в случаях любого поля K и поля $\mathbb{C}$.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \chi_A(x) = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + |A| = x^2 - (a+d)x + ad - bc}$$

Как искать спектр и собственные векторы данной матрицы?

$$\boxed{\operatorname{Sp} A = \{\lambda \in K \mid |A - \lambda E| = 0\}} \qquad \boxed{\forall \lambda \in \operatorname{Sp} A\ \ V_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda E)}$$

Говорят, что оператор $\mathcal{A}$ имеет *простой спектр*, если многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x) \in K[x]$ раскладывается на линейные множители над K и все его корни простые (имеют кратность один). Например, случайный оператор над $\mathbb{C}$ скорее всего имеет простой спектр.

Диагонализируемый оператор, по определению, в некотором базисе задаётся диагональной матрицей.

$\mathcal{A}$ имеет простой спектр $\implies$ $\mathcal{A}$ диагонализируем $\implies$ $\implies$ многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$ раскладывается на линейные множители

Контрольный вопрос: докажите импликации и опровергните обратные, неверные импликации.

Подобные матрицы: затравка

1. Докажите, что матрицы $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ подобны в точности тогда, когда наборы $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ получаются друг из друга перестановкой элементов. Например, при $\lambda \neq \mu$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \nsim \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Приведите примеры двух нескалярных неподобных матриц с одинаковыми характеристическими многочленами.

3. Докажите, что всякая матрица $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ подобна ровно одной из следующих ($\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \lambda \neq \mu$):

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. Заменим в предыдущей задаче всюду $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$.

а) Приведите пример матрицы, опровергающей утверждение задачи в такой формулировке.

б) Пополните список ещё одним, четвёртым типом матриц, чтобы утверждение задачи стало верным.

5. а) Как вы думаете, как была бы сформулирована задача **3** для матрицы $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$?

б) Возможно, вы уже можете доказать сформулированное в пункте **а)** утверждение.

Подобные матрицы: затравка

1. Докажите, что матрицы $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ подобны в точности тогда, когда наборы $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ получаются друг из друга перестановкой элементов. Например, при $\lambda \neq \mu$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \nsim \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Приведите примеры двух нескалярных неподобных матриц с одинаковыми характеристическими многочленами.

3. Докажите, что всякая матрица $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ подобна ровно одной из следующих ($\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \lambda \neq \mu$):

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. Заменим в предыдущей задаче всюду $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$.

а) Приведите пример матрицы, опровергающей утверждение задачи в такой формулировке.

б) Пополните список ещё одним, четвёртым типом матриц, чтобы утверждение задачи стало верным.

5. а) Как вы думаете, как была бы сформулирована задача **3** для матрицы $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$?

б) Возможно, вы уже можете доказать сформулированное в пункте **а)** утверждение.

Подобные матрицы: затравка

1. Докажите, что матрицы $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ подобны в точности тогда, когда наборы $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ получаются друг из друга перестановкой элементов. Например, при $\lambda \neq \mu$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \nsim \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Приведите примеры двух нескалярных неподобных матриц с одинаковыми характеристическими многочленами.

3. Докажите, что всякая матрица $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ подобна ровно одной из следующих ($\lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \lambda \neq \mu$):

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. Заменим в предыдущей задаче всюду $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$.

а) Приведите пример матрицы, опровергающей утверждение задачи в такой формулировке.

б) Пополните список ещё одним, четвёртым типом матриц, чтобы утверждение задачи стало верным.

5. а) Как вы думаете, как была бы сформулирована задача **3** для матрицы $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$?

б) Возможно, вы уже можете доказать сформулированное в пункте **а)** утверждение.

V вариант

1. Про матрицу $A \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ известно, что $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A = \{1, \pm i\}$. **а)** Какой может быть характеристический многочлен матрицы A (все варианты)? **б)** Приведите пример такой матрицы A. **в)** Какие значения может принимать $\dim_{\mathbb{R}}\{X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = X\}$?

2. Приведите пример такой матрицы $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, что $\operatorname{Sp} A = \{0\}$, но $\chi_A(x) \neq -x^3$.

3. Найдите все такие столбцы $X \in \mathbb{R}^3$, что $AX = 2X$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ найдите: **а)** характеристический многочлен; **б)** его корни; **в)** диагональную подобную матрицу, если она существует и матрицу перехода к ней.

5. Для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ найдите: **а)** характеристический многочлен; **б)** его корни; **в)** диагональную подобную матрицу, если она существует и матрицу перехода к ней.

Многочлены от матриц

В любой алгебре над полем K элементы можно складывать, умножать друг над друга и на скаляры из K, а значит, *можно брать многочлены от элементов алгебры.* Например, для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(K)$:

$$f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x] \implies f(A) := a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 E \in \mathrm{M}_n(K).$$

$$\boxed{(fg)(A) = f(A)g(A), \text{ в частности, многочлены от одной матрицы коммутируют.}}$$

Для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_n(K)$ существует ненулевой *аннулирующий* многочлен, т. е. такой многочлен $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$, что $f(A) = 0$. Среди всех таких многочленов есть многочлен $\mu_A(x)$, на который делится любой другой. Он определён однозначно с точностью до ассоциированности, называется **минимальным многочленом** матрицы A и обозначается $\mu_A(x)$.

Примеры. а) $A = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_m, \ldots, \lambda_m}_{k_m})$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различны $\implies$

$$\implies \chi_A(x) = (\lambda_1 - x)^{k_1} \ldots (\lambda_m - x)^{k_m}, \quad \mu_A(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m).$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \chi_A(x) = (1-x)^2(2-x), \quad \mu_A(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2), & \text{если } a = 0, \\ (x-1)^2(x-2), & \text{если } a \neq 0. \end{cases}$

Теорема Гамильтона–Кэли. $\boxed{\chi_A(A) = 0.}$ **Следствие.** $\boxed{\mu_A \mid \chi_A.}$

Контрольные вопросы. 1. Теорема Гамильтона–Кэли в случае $n = 2$.
2. Можно ли так доказать теорему Гамильтона–Кэли: $\chi_A(A) = \det(A - xE)|_{x=A} = |A - AE| = |0| = 0$?
3. $A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \implies \chi_A = \chi_B \chi_C$, но не обязательно $\mu_A = \mu_B \mu_C$.
4. $\{\lambda \in K \mid \mu_A(\lambda) = 0\} = \{\lambda \in K \mid \chi_A(\lambda) = 0\} = \mathrm{Sp}(A)$.
5. а) У подобных матриц равны не только характеристические, но и минимальные многочлены.
б) Примеры неподобных матриц с равными и характеристическими, и минимальными многочленами.
6. Пусть $f(x) \in K[x]$. Тогда а) $f(\mathrm{Sp}\, A) \subseteq \mathrm{Sp}\, f(A)$; б) если $K = \mathbb{C}$, то $f(\mathrm{Sp}\, A) = \mathrm{Sp}\, f(A)$.

Многочлены от матриц

В любой алгебре над полем K элементы можно складывать, умножать друг над друга и на скаляры из K, а значит, *можно брать многочлены от элементов алгебры.* Например, для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(K)$:

$$f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x] \implies f(A) := a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 E \in \mathrm{M}_n(K).$$

$$\boxed{(fg)(A) = f(A)g(A), \text{ в частности, многочлены от одной матрицы коммутируют.}}$$

Для любой матрицы $A \in \mathrm{M}_n(K)$ существует ненулевой *аннулирующий* многочлен, т. е. такой многочлен $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$, что $f(A) = 0$. Среди всех таких многочленов есть многочлен $\mu_A(x)$, на который делится любой другой. Он определён однозначно с точностью до ассоциированности, называется **минимальным многочленом** матрицы A и обозначается $\mu_A(x)$.

Примеры. а) $A = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_m, \ldots, \lambda_m}_{k_m})$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ попарно различны $\implies$

$$\implies \chi_A(x) = (\lambda_1 - x)^{k_1} \ldots (\lambda_m - x)^{k_m}, \quad \mu_A(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m).$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \chi_A(x) = (1-x)^2(2-x), \quad \mu_A(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2), & \text{если } a = 0, \\ (x-1)^2(x-2), & \text{если } a \neq 0. \end{cases}$

Теорема Гамильтона–Кэли. $\boxed{\chi_A(A) = 0.}$ **Следствие.** $\boxed{\mu_A \mid \chi_A.}$

Контрольные вопросы. 1. Теорема Гамильтона–Кэли в случае $n = 2$.
2. Можно ли так доказать теорему Гамильтона–Кэли: $\chi_A(A) = \det(A - xE)|_{x=A} = |A - AE| = |0| = 0$?
3. $A = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & C \end{pmatrix} \implies \chi_A = \chi_B \chi_C$, но не обязательно $\mu_A = \mu_B \mu_C$.
4. $\{\lambda \in K \mid \mu_A(\lambda) = 0\} = \{\lambda \in K \mid \chi_A(\lambda) = 0\} = \mathrm{Sp}(A)$.
5. а) У подобных матриц равны не только характеристические, но и минимальные многочлены.
б) Примеры неподобных матриц с равными и характеристическими, и минимальными многочленами.
6. Пусть $f(x) \in K[x]$. Тогда а) $f(\mathrm{Sp}\, A) \subseteq \mathrm{Sp}\, f(A)$; б) если $K = \mathbb{C}$, то $f(\mathrm{Sp}\, A) = \mathrm{Sp}\, f(A)$.

Матрицы и операторы: постановки задач

Пусть дана матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ с известным спектром. Требуется найти:

- матрицу $f(A)$, где $f(x) \in \mathbb{C}[x]$;
- размерность её централизатора, т. е. подалгебры $\mathrm{Cent}(A) = \{B \in \mathrm{M}_n(K) \mid AB = BA\}$;
- все её инвариантные подпространства (или оператора $\mathcal{A}$ с матрицей A, т. е. такие подпространства U, что $\mathcal{A}U \subseteq U$).

1. Допустим, задачи решены для данной матрицы A. Решите их для матрицы $A' = C^{-1}AC$, где $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ и $f \in K[x]$. Докажите, что $f(A) = \begin{pmatrix} f(B) & 0 \\ 0 & f(C) \end{pmatrix}$.

3. Решите поставленные задачи для **а)** диагональной матрицы; **б)** для жордановой клетки.

4. Решите задачи для произвольной матрицы из $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{100} = \begin{pmatrix} 9601 & -4850 & 4750 \\ 9400 & -4749 & 4650 \\ -9800 & 4950 & -4849 \end{pmatrix}, \quad \dim \mathrm{Cent}(A) = 3,$

4 инвариантных подпространства: $\{0\}$, $\langle(1,1,-1)\rangle$, $\langle(1,1,-1),(1,2,0)\rangle$, $\mathbb{C}^3$.

Матрицы и операторы: постановки задач

Пусть дана матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ с известным спектром. Требуется найти:

- размерность её централизатора, т. е. подалгебры $\mathrm{Cent}(A) = \{B \in \mathrm{M}_n(K) \mid AB = BA\}$;
- матрицу $f(A)$, где $f(x) \in \mathbb{C}[x]$;
- все инвариантные подпространства оператора $\mathcal{A}$ с матрицей A, т. е. такие подпространства U, что $\mathcal{A}U \subseteq U$.

1. Допустим, задачи решены для данной матрицы A. Решите их для матрицы $A' = C^{-1}AC$, где $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ и $f \in K[x]$. Докажите, что $f(A) = \begin{pmatrix} f(B) & 0 \\ 0 & f(C) \end{pmatrix}$.

3. Решите поставленные задачи для **а)** диагональной матрицы; **б)** жордановой клетки.

4. Решите задачи для произвольной матрицы из $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \implies A^{100} = \begin{pmatrix} 9601 & -4850 & 4750 \\ 9400 & -4749 & 4650 \\ -9800 & 4950 & -4849 \end{pmatrix}, \quad \dim \mathrm{Cent}(A) = 3,$

4 инвариантных подпространства: $\{0\}$, $\langle(1,1,-1)\rangle$, $\langle(1,1,-1),(1,2,0)\rangle$, $\mathbb{C}^3$.

Корневые векторы и подпространства

решают проблему «мало собственных векторов — оператор не диагонализируем :(»

Пусть $\mathcal{A}\colon {}_{\mathbb{C}}V \to {}_{\mathbb{C}}V$, $\dim V = n \in \mathbb{N}$, $\chi_{\mathcal{A}}(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)^{k_i}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны, $\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$.

$$\underbrace{V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda E)}_{\substack{\text{собственные векторы}\\ \text{или корневые высоты 1}}} \subseteq \underbrace{\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda E)^2}_{\substack{\text{корневые векторы}\\ \text{высоты } \leqslant 2}} \subseteq \underbrace{\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda E)^3}_{\substack{\text{корневые векторы}\\ \text{высоты } \leqslant 3}} \subseteq \ldots \subseteq \underbrace{\bigcup\nolimits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda E)^k =: V^\lambda}_{\text{корневые векторы}}.$$

$$\begin{aligned}
V_\lambda = \{v \in V \mid \mathcal{A}v = \lambda v\} &\text{ — собственное подпространство, отвечающее корню } \lambda,\\
V^\lambda = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N}\ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k v = 0\} &\text{ — \textit{корневое} подпространство, отвечающее корню } \lambda,\\
\dim V_\lambda &\text{ — \textit{геометрическая кратность} корня } \lambda,\\
k_i &\text{ — алгебраическая кратность корня } \lambda_i.
\end{aligned}$$

Контрольные вопросы: • $\boxed{\dim V_{\lambda_i} \leqslant \dim V^{\lambda_i} = k_i}$ • $\boxed{V = \bigoplus_{i=1}^{m} V^{\lambda_i}}$:)

- Вид матрицы оператора в базисе, согласованном с корневыми подпространствами.
- **Критерии диагонализируемости оператора $\mathcal{A}$:** $\boxed{V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}} V_\lambda \iff \forall \lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}\ V_\lambda = V^\lambda}$
- Если подпространство U инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то

$$\boxed{U = \bigoplus\nolimits_{\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}} (U \cap V^\lambda),}$$

а если оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем, то оператор $\mathcal{A}|_U$ тоже диагонализируем и $U = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}} (U \cap V_\lambda)$.

- Корневые векторы оператора $d/dt\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ — *квазимногочлены* — функции вида

$$t \mapsto e^{\lambda t}P(t), \text{ где } \lambda \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}[x].$$

Корневые векторы и подпространства

решают проблему «мало собственных векторов — оператор не диагонализируем :(»

Пусть $\mathcal{A}\colon {}_{\mathbb{C}}V \to {}_{\mathbb{C}}V$, $\dim V = n \in \mathbb{N}$, $\chi_{\mathcal{A}}(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)^{k_i}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны, $\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}$.

$$\underbrace{V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda E)}_{\substack{\text{собственные векторы}\\ \text{или корневые высоты 1}}} \subseteq \underbrace{\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda E)^2}_{\substack{\text{корневые векторы}\\ \text{высоты } \leqslant 2}} \subseteq \underbrace{\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda E)^3}_{\substack{\text{корневые векторы}\\ \text{высоты } \leqslant 3}} \subseteq \ldots \subseteq \underbrace{\bigcup\nolimits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda E)^k =: V^\lambda}_{\text{корневые векторы}}.$$

$$\begin{aligned}
V_\lambda = \{v \in V \mid \mathcal{A}v = \lambda v\} &\text{ — собственное подпространство, отвечающее корню } \lambda,\\
V^\lambda = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N}\ (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k v = 0\} &\text{ — \textit{корневое} подпространство, отвечающее корню } \lambda,\\
\dim V_\lambda &\text{ — \textit{геометрическая кратность} корня } \lambda,\\
k_i &\text{ — алгебраическая кратность корня } \lambda_i.
\end{aligned}$$

Контрольные вопросы: • $\boxed{\dim V_{\lambda_i} \leqslant \dim V^{\lambda_i} = k_i}$ • $\boxed{V = \bigoplus_{i=1}^{m} V^{\lambda_i}}$:)

- Вид матрицы оператора в базисе, согласованном с корневыми подпространствами.
- **Критерии диагонализируемости оператора $\mathcal{A}$:** $\boxed{V = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}} V_\lambda \iff \forall \lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}\ V_\lambda = V^\lambda}$
- Если подпространство U инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то

$$\boxed{U = \bigoplus\nolimits_{\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}} (U \cap V^\lambda),}$$

а если оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем, то оператор $\mathcal{A}|_U$ тоже диагонализируем и $U = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}\mathcal{A}} (U \cap V_\lambda)$.

- Корневые векторы оператора $d/dt\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ — *квазимногочлены* — функции вида

$$t \mapsto e^{\lambda t}P(t), \text{ где } \lambda \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}[x].$$

Жорданова форма и жорданов базис нильпотентного оператора

$\mathcal{N}\colon V \to V$ определяются *цепочками* векторов вида:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ker}\mathcal{N} \ni\ \mathcal{N}^{d_1}e_1 \longmapsfrom \cdots \longmapsfrom \mathcal{N}e_1 \longmapsfrom e_1\\
&\ldots\\
&\operatorname{Ker}\mathcal{N} \ni\ \mathcal{N}^{d_k}e_k \longmapsfrom \cdots \longmapsfrom \mathcal{N}^2e_k \longmapsfrom \mathcal{N}e_k \longmapsfrom e_k
\end{aligned} \tag{$*$}$$

1. Если векторы $\mathcal{N}^{d_1}e_1, \ldots, \mathcal{N}^{d_k}e_k$ линейно независимы, то таковы и все векторы в $(*)$. Докажите.

Если удалось найти несколько цепочек с линейно независимыми первыми векторами (в частности, одну цепочку с ненулевым первым вектором) и общим числом $n = \dim V$, то все векторы этих цепочек образуют жорданов базис оператора $\mathcal{N}$; размеры жордановых клеток равны длинам цепочек $d_1, \ldots, d_k$.

2. Пусть векторы $\mathcal{N}^{d_1}e_1, \ldots, \mathcal{N}^{d_k}e_k$ линейно зависимы. Как, сохранив линейную оболочку векторов в $(*)$, уменьшить их количество? С помощью *элементарных преобразований* системы цепочек $(*)$:

1) отбрасывание нулевых векторов от начала цепочки (в частности, цепочки из одних нулей);

2) прибавление ко всем векторам одной цепочки соответствующих (от начала) векторов другой, не менее короткой, цепочки, умноженных на один и тот же скаляр, например,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}e_1 \leftarrow e_1 & \\ \mathcal{N}^2e_2 \leftarrow \mathcal{N}e_2 \leftarrow e_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathcal{N}e_1 + \alpha\mathcal{N}^2e_2 \leftarrow e_1 + \alpha\mathcal{N}e_2 \\ \mathcal{N}^2e_2 \leftarrow \qquad \mathcal{N}e_2 \leftarrow e_2 \end{pmatrix}$$

При этом цепочки переходят в цепочки и линейная оболочка системы $(*)$ не меняется.

Покажите, что элементарными преобразованиями систему $(*)$ можно привести к системе цепочек с меньшим числом векторов. Отсюда вытекает алгоритм построения жорданова базиса нильпотентного оператора, заданного матрицей N в стандартном базисе пространства K^n:

1) строим цепочки по базису $e_1, \ldots, e_n$ (векторы $\mathcal{N}e_1, \ldots, \mathcal{N}e_n$ — столбцы матрицы N);

2) элементарными преобразованиями приводим построенную систему цепочек к виду, в котором все векторы линейно независимы — они образуют жорданов базис.

Жорданова форма и жорданов базис нильпотентного оператора

$\mathcal{N}\colon V \to V$ определяются *цепочками* векторов вида:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ker}\mathcal{N} \ni\ \mathcal{N}^{d_1}e_1 \longmapsfrom \cdots \longmapsfrom \mathcal{N}e_1 \longmapsfrom e_1\\
&\ldots\\
&\operatorname{Ker}\mathcal{N} \ni\ \mathcal{N}^{d_k}e_k \longmapsfrom \cdots \longmapsfrom \mathcal{N}^2e_k \longmapsfrom \mathcal{N}e_k \longmapsfrom e_k
\end{aligned} \tag{$*$}$$

1. Если векторы $\mathcal{N}^{d_1}e_1, \ldots, \mathcal{N}^{d_k}e_k$ линейно независимы, то таковы и все векторы в $(*)$. Докажите.

Если удалось найти несколько цепочек с линейно независимыми первыми векторами (в частности, одну цепочку с ненулевым первым вектором) и общим числом $n = \dim V$, то все векторы этих цепочек образуют жорданов базис оператора $\mathcal{N}$; размеры жордановых клеток равны длинам цепочек $d_1, \ldots, d_k$.

2. Пусть векторы $\mathcal{N}^{d_1}e_1, \ldots, \mathcal{N}^{d_k}e_k$ линейно зависимы. Как, сохранив линейную оболочку векторов в $(*)$, уменьшить их количество? С помощью *элементарных преобразований* системы цепочек $(*)$:

1) отбрасывание нулевых векторов от начала цепочки (в частности, цепочки из одних нулей);

2) прибавление ко всем векторам одной цепочки соответствующих (от начала) векторов другой, не менее короткой, цепочки, умноженных на один и тот же скаляр, например,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}e_1 \leftarrow e_1 & \\ \mathcal{N}^2e_2 \leftarrow \mathcal{N}e_2 \leftarrow e_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathcal{N}e_1 + \alpha\mathcal{N}^2e_2 \leftarrow e_1 + \alpha\mathcal{N}e_2 \\ \mathcal{N}^2e_2 \leftarrow \qquad \mathcal{N}e_2 \leftarrow e_2 \end{pmatrix}$$

При этом цепочки переходят в цепочки и линейная оболочка системы $(*)$ не меняется.

Покажите, что элементарными преобразованиями систему $(*)$ можно привести к системе цепочек с меньшим числом векторов. Отсюда вытекает алгоритм построения жорданова базиса нильпотентного оператора, заданного матрицей N в стандартном базисе пространства K^n:

1) строим цепочки по базису $e_1, \ldots, e_n$ (векторы $\mathcal{N}e_1, \ldots, \mathcal{N}e_n$ — столбцы матрицы N);

2) элементарными преобразованиями приводим построенную систему цепочек к виду, в котором все векторы линейно независимы — они образуют жорданов базис.

Линейные операторы: фундаментальные факты в задачах

Всюду V — векторное пространство над полем K размерности $n \in \mathbb{N}$.

1. Пусть $\mathcal{N}\colon V \to V$ — нильпотентный оператор, причём $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{N} = 1$. Докажите, что
а) $\dim\operatorname{Im}\mathcal{N} = n-1$ и, более того,
б) $\dim\operatorname{Im}\mathcal{N}^k = n-k$ для всех $k = 1,\dots,n$, соответственно, $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{N}^k = k$ при тех же k;
в) в V существует такой базис $e_1,\dots,e_n$, что $0 \xleftarrow{\mathcal{N}} e_1 \xleftarrow{\mathcal{N}} \cdots \xleftarrow{\mathcal{N}} e_n$, он называется *жордановым базисом*, матрица оператора $\mathcal{N}$ в нём является *жордановой клеткой*;
г) для любого $v \in V \setminus \operatorname{Im}\mathcal{N}$ векторы $v, \mathcal{N}v, \mathcal{N}^2v, \dots, \mathcal{N}^{n-1}v$ линейно независимы (а потому образуют базис, причём жорданов, если их записать в обратном порядке).

2. Для произвольного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ рассмотрим цепочки

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^3 \supseteq \dots$$
$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^3 \subseteq \dots$$

Докажите, что
а) в каждой цепочке после первого равенства следуют только равенства (*цепочка стабилизируется*);
б) обе цепочки рано или поздно стабилизируются, причём одновременно, скажем, на k-м шаге;
в) подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}^m$ и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$ впервые образуют прямую сумму при том же значении $m = k$:

$$\operatorname{Im}\mathcal{A}^m = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{m+1} \iff \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{m+1} \iff \operatorname{Im}\mathcal{A}^m \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m = V.$$

3. Предположим, что для матриц $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ существуют такие матрицы $C, D \in \mathrm{GL}_n(K)$, что обе матрицы $C^{-1}AC$ и $D^{-1}BD$ диагональны. Докажите, что если $AB = BA$, то матрицы C и D можно взять равными.

На языке операторов: любые два коммутирующих диагонализируемых оператора можно *одновременно* привести к диагональному виду.

Линейные операторы: фундаментальные факты в задачах

Всюду V — векторное пространство над полем K размерности $n \in \mathbb{N}$.

1. Пусть $\mathcal{N}\colon V \to V$ — нильпотентный оператор, причём $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{N} = 1$. Докажите, что
а) $\dim\operatorname{Im}\mathcal{N} = n-1$ и, более того,
б) $\dim\operatorname{Im}\mathcal{N}^k = n-k$ для всех $k = 1,\dots,n$, соответственно, $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{N}^k = k$ при тех же k;
в) в V существует такой базис $e_1,\dots,e_n$, что $0 \xleftarrow{\mathcal{N}} e_1 \xleftarrow{\mathcal{N}} \cdots \xleftarrow{\mathcal{N}} e_n$, он называется *жордановым базисом*, матрица оператора $\mathcal{N}$ в нём является *жордановой клеткой*;
г) для любого $v \in V \setminus \operatorname{Im}\mathcal{N}$ векторы $v, \mathcal{N}v, \mathcal{N}^2v, \dots, \mathcal{N}^{n-1}v$ линейно независимы (а потому образуют базис, причём жорданов, если их записать в обратном порядке).

2. Для произвольного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ рассмотрим цепочки

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 \supseteq \operatorname{Im}\mathcal{A}^3 \supseteq \dots$$
$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}^3 \subseteq \dots$$

Докажите, что
а) в каждой цепочке после первого равенства следуют только равенства (*цепочка стабилизируется*);
б) обе цепочки рано или поздно стабилизируются, причём одновременно, скажем, на k-м шаге;
в) подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}^m$ и $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^m$ впервые образуют прямую сумму при том же значении $m = k$:

$$\operatorname{Im}\mathcal{A}^m = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{m+1} \iff \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{m+1} \iff \operatorname{Im}\mathcal{A}^m \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{A}^m = V.$$

3. Предположим, что для матриц $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ существуют такие матрицы $C, D \in \mathrm{GL}_n(K)$, что обе матрицы $C^{-1}AC$ и $D^{-1}BD$ диагональны. Докажите, что если $AB = BA$, то матрицы C и D можно взять равными.

На языке операторов: любые два коммутирующих диагонализируемых оператора можно *одновременно* привести к диагональному виду.

Линейные рекурренты

Рекуррентное уравнение k-го порядка: $x_n = a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k}$, $(a_i \in \mathbb{C},\ a_k \neq 0)$ (1)

его характеристический многочлен: $t^k - a_1t^{k-1} - \ldots - a_k$ (2)

1. Множество решений уравнения k-го порядка — векторное пространство размерности k.

2. Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ — характеристические многочлены рекуррентных уравнений (A) и (B) соответственно, причём $P(t) \mid Q(t)$. Тогда всякая последовательность, удовлетворяющая уравнению (A), удовлетворяет также и уравнению (B), короче (A) $\Rightarrow$ (B).

3. Последовательность λ^n — решение уравнения (1) $\Leftrightarrow \lambda = 0$ или λ — корень многочлена (2).

4. Если многочлен (2) имеет различные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, то

$$(1) \iff x_n = C_1\lambda_1^n + \ldots + C_k\lambda_k^n.$$

5. Если многочлен (2) имеет единственный корень λ (кратности k), то

$$(1) \iff x_n = \lambda^n(C_0 + C_1n + C_2n^2 + \ldots + C_{k-1}\lambda^{k-1}).$$

Функции такого вида (т. е. $\lambda^nP(n)$, где $P(n)$ — многочлен) называются *квазимногочленами*.

6. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны и для каждого $i = 1, \ldots, m$ многочлены $P_1^i, \ldots, P_{k_i}^i$ ненулевые и имеют разные степени. Тогда квазимногочлены

$$\lambda_1^nP_1^1, \ldots, \lambda_1^nP_{k_1}^1, \quad \ldots, \quad \lambda_m^nP_1^m, \ldots, \lambda_m^nP_{k_m}^m$$

линейно независимы (как последовательности $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$) и образуют базис пространства решений рекуррентного уравнения с характеристическим многочленом $f(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}\ldots(t-\lambda_m)^{k_m}$.

Линейные рекурренты

Рекуррентное уравнение k-го порядка: $x_n = a_1x_{n-1} + \ldots + a_kx_{n-k}$, $(a_i \in \mathbb{C},\ a_k \neq 0)$ (1)

его характеристический многочлен: $t^k - a_1t^{k-1} - \ldots - a_k$ (2)

1. Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ — характеристические многочлены рекуррентных уравнений (A) и (B) соответственно, причём $P(t) \mid Q(t)$. Тогда всякая последовательность, удовлетворяющая уравнению (A), удовлетворяет также и уравнению (B), короче (A) $\Rightarrow$ (B).

2. Последовательность λ^n — решение уравнения (1) $\Leftrightarrow \lambda = 0$ или λ — корень многочлена (2).

3. Если многочлен (2) имеет различные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, то

$$(1) \iff x_n = C_1\lambda_1^n + \ldots + C_k\lambda_k^n.$$

4. Если многочлен (2) имеет единственный корень λ (кратности k), то

$$(1) \iff x_n = \lambda^n(C_0 + C_1n + C_2n^2 + \ldots + C_{k-1}\lambda^{k-1}).$$

Функции такого вида (т. е. $\lambda^nP(n)$, где $P(n)$ — многочлен) называются *квазимногочленами*.

5. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ различны и для каждого $i = 1, \ldots, m$ многочлены $P_1^i, \ldots, P_{k_i}^i$ ненулевые и имеют разные степени. Тогда квазимногочлены

$$\lambda_1^nP_1^1, \ldots, \lambda_1^nP_{k_1}^1, \quad \ldots, \quad \lambda_m^nP_1^m, \ldots, \lambda_m^nP_{k_m}^m$$

линейно независимы (как последовательности $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$) и образуют базис пространства решений рекуррентного уравнения с характеристическим многочленом $f(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}\ldots(t-\lambda_m)^{k_m}$.

1. Замкнутость множества решений уравнения (1) относительно сложения и умножения на константы ясна (важна однородность уравнения). Размерность пространства решений равна количеству начальных членов, по которым последовательность однозначно определяется, т. е. числу k.

2. Пусть $T\colon (x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n$ — оператор сдвига (действует в пространстве последовательностей). Последовательность a_n удовлетворяет уравнению (A) $\Leftrightarrow P(T)a = 0$. Так как по условию $Q(t) = P(t)R(T)$, то $Q(t)a = R(T)P(T)a = R(t)(0) = 0$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_k\lambda^{n-k} \iff \lambda = 0$ или $\lambda^k = a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k$.

4. По **3** последовательности $\lambda_1^n, \ldots \lambda_k^n$ — решения (1), поэтому в силу **1** $\langle \lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n \rangle \subseteq \dim\{x_n \mid (1)\}$. Обратное включение следует из равенства размерностей: так как числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ различны, то последовательности $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n$ линейно независимы (см. определитель Вандермонда).

5. Разберём случай $n = 3$: $(t-\lambda)^3 = t^3 - 3\lambda t^2 + 3\lambda^2 t - \lambda^3$ — характеристический многочлен рекурренты

$$x_{n+2} = 3\lambda x_{n+1} - 3\lambda^2 x_n + \lambda^3 x_{n-1} \iff \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3\lambda & -3\lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}C^{-1}} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3\lambda & -3\lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n}_{C\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}C^{-1}} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

6. В силу **2** данные квазиодночлены являются решениями рекуррентного уравнения с характеристическим многочленом $f(t)$. Квазиодночлены $\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \ldots, n^{k-1}\lambda^n$ при $\lambda \neq 0$, очевидно, линейно независимы, а по **5** — образуют базис корневого подпространства оператора сдвига T, соответствующего значению λ, поскольку $(T - \lambda\mathcal{E})^k(n^{k-1}\lambda^n) = 0$. Остаётся сослаться на тот факт, что корневые подпространства любого оператора, отвечающие различным собственным значениям, образуют прямую сумму.

1. Замкнутость множества решений уравнения (1) относительно сложения и умножения на константы ясна (важна однородность уравнения). Размерность пространства решений равна количеству начальных членов, по которым последовательность однозначно определяется, т. е. числу k.

2. Пусть $T\colon (x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n$ — оператор сдвига (действует в пространстве последовательностей). Последовательность a_n удовлетворяет уравнению (A) $\Leftrightarrow P(T)a = 0$. Так как по условию $Q(t) = P(t)R(T)$, то $Q(t)a = R(T)P(T)a = R(t)(0) = 0$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}_0\ \lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_k\lambda^{n-k} \iff \lambda = 0$ или $\lambda^k = a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k$.

4. По **3** последовательности $\lambda_1^n, \ldots \lambda_k^n$ — решения (1), поэтому в силу **1** $\langle \lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n \rangle \subseteq \dim\{x_n \mid (1)\}$. Обратное включение следует из равенства размерностей: так как числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ различны, то последовательности $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n$ линейно независимы (см. определитель Вандермонда).

5. Разберём случай $n = 3$: $(t-\lambda)^3 = t^3 - 3\lambda t^2 + 3\lambda^2 t - \lambda^3$ — характеристический многочлен рекурренты

$$x_{n+2} = 3\lambda x_{n+1} - 3\lambda^2 x_n + \lambda^3 x_{n-1} \iff \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3\lambda & -3\lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}C^{-1}} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3\lambda & -3\lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n}_{C\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}C^{-1}} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

6. В силу **2** данные квазиодночлены являются решениями рекуррентного уравнения с характеристическим многочленом $f(t)$. Квазиодночлены $\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \ldots, n^{k-1}\lambda^n$ при $\lambda \neq 0$, очевидно, линейно независимы, а по **5** — образуют базис корневого подпространства оператора сдвига T, соответствующего значению λ, поскольку $(T - \lambda\mathcal{E})^k(n^{k-1}\lambda^n) = 0$. Остаётся сослаться на тот факт, что корневые подпространства любого оператора, отвечающие различным собственным значениям, образуют прямую сумму.

Проективная прямая и её проективные преобразования

Проецирование прямой прямой l на прямую l' — это преобразование $l \to l'$ одного из двух типов:

1) *проецирование из точки* O, не лежащей ни на l, ни на l', при котором каждой точке $A \in l$ сопоставляется точка $A' = OA \cap l'$;

2) *параллельное проецирование* вдоль прямой c, не параллельной ни l, ни l', при которой каждой точке $A \in l$ сопоставляется такая точка $A' \in l'$, что $AA' \parallel c$.

Приведённое определение содержит ошибку (какую?). Чтобы её исправить, надо добавить к каждой из прямых l и l' свою *«бесконечно удалённую точку»*, получив *проективные прямые* $\bar{l} = l \cup \{\infty_l\}$ и $\overline{l'} = l' \cup \{\infty_{l'}\}$. Подкорректируйте должным образом определения.

Проективное преобразование проективной прямой $\bar{l}$ — это преобразование $\bar{l} \to \bar{l}$, являющееся композицией каких-либо проецирований $\bar{l} \to \overline{l'} \to \bar{l}$.

1. Реализуйте преобразования **а)** $x \mapsto x+1$; **б)** $x \mapsto 2x$; **в)** $x \mapsto 1/x$ расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ композициями проецирований, показав тем самым, что все они — проективные.

Теорема. Пусть $\bar{l}, \overline{l'}$ — две проективные прямые, $A, B, C \in \bar{l}$, $A', B', C' \in \overline{l'}$. Тогда существует и притом единственное проективное преобразование $\bar{l} \to \overline{l'}$, при котором $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$.

2. Докажите часть «существует». Единственность следует из задачи **5**.

Двойным отношением четырёх точек A, B, C, D, лежащих на прямой l, называется число

$$[A,B,C,D] := \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}, \text{ или в координатах } [a,b,c,d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

(слева берутся ориентированные длины отрезков, что ясно из написанного справа).

3. Докажите, что двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях, т. е. $[A,B,C,D] = [A',B',C',D']$, где штрихом обозначен образ при некотором проецировании.

4. Пусть $[a,b,c,d] = \theta$. Найдите **а)** $[a,b,d,c]$; **б)** $[a,c,b,d]$; **в)** все значения двойного отношения чисел a,b,c,d при всех их перестановках.

Проективная прямая и её проективные преобразования

Проецирование прямой прямой l на прямую l' — это преобразование $l \to l'$ одного из двух типов:

1) *проецирование из точки* O, не лежащей ни на l, ни на l', при котором каждой точке $A \in l$ сопоставляется точка $A' = OA \cap l'$;

2) *параллельное проецирование* вдоль прямой c, не параллельной ни l, ни l', при которой каждой точке $A \in l$ сопоставляется такая точка $A' \in l'$, что $AA' \parallel c$.

Приведённое определение содержит ошибку (какую?). Чтобы её исправить, надо добавить к каждой из прямых l и l' свою *«бесконечно удалённую точку»*, получив *проективные прямые* $\bar{l} = l \cup \{\infty_l\}$ и $\overline{l'} = l' \cup \{\infty_{l'}\}$. Подкорректируйте должным образом определения.

Проективное преобразование проективной прямой $\bar{l}$ — это преобразование $\bar{l} \to \bar{l}$, являющееся композицией каких-либо проецирований $\bar{l} \to \overline{l'} \to \bar{l}$.

1. Реализуйте преобразования **а)** $x \mapsto x+1$; **б)** $x \mapsto 2x$; **в)** $x \mapsto 1/x$ расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ композициями проецирований, показав тем самым, что все они — проективные.

Теорема. Пусть $\bar{l}, \overline{l'}$ — две проективные прямые, $A, B, C \in \bar{l}$, $A', B', C' \in \overline{l'}$. Тогда существует и притом единственное проективное преобразование $\bar{l} \to \overline{l'}$, при котором $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, $C \mapsto C'$.

2. Докажите часть «существует». Единственность следует из задачи **5**.

Двойным отношением четырёх точек A, B, C, D, лежащих на прямой l, называется число

$$[A,B,C,D] := \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}, \text{ или в координатах } [a,b,c,d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$$

(слева берутся ориентированные длины отрезков, что ясно из написанного справа).

3. Докажите, что двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях, т. е. $[A,B,C,D] = [A',B',C',D']$, где штрихом обозначен образ при некотором проецировании.

4. Пусть $[a,b,c,d] = \theta$. Найдите **а)** $[a,b,d,c]$; **б)** $[a,c,b,d]$; **в)** все значения двойного отношения чисел a,b,c,d при всех их перестановках.

5. Докажите, что проективные преобразования проективной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ — это в точности дробно-линейные отображения — отображения вида $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $ad \neq bc$.

«Равноправие» всех точек проективной прямой. Пусть точка O не лежит на прямой l. Каждую точку $A \in l$ отождествим с прямой OA, а бесконечно удалённую точку $\infty_l \in \bar{l}$ — с прямой $OB \parallel l$. Таким образом, проективную прямую $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ можно определить как множество прямых, проходящих через данную точку O. При этом любую точку проективной прямой (= одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$) можно объявить *«бесконечно удалённой»* и считать, что остальные точки образуют «обычную прямую».

Каждая прямая OA задаётся углом поворота xOA, причём этот угол определён по модулю π. Каждая прямая пересекает окружность с центром O в двух точках, поэтому проективную прямую можно мыслить себе как окружность, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки.

Однородные координаты. Введём на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ отношение эквивалентности

$$(x,y) \sim (x',y') \iff xy' = x'y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ (x',y') = (\lambda x, \lambda y).$$

Класс эквивалентности пары (x,y) обозначается $(x:y)$. Таким образом, $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x:y) = (x':y')$, например, $(1:2) = (2:4)$, $(1:0) = (-2:0)$. Проективную прямую можно определить как множество классов $(x:y)$, где $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Проективные преобразования проективной прямой $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ теперь можно определить как её биекции на себя, индуцированные невырожденными линейными преобразованиями плоскости $\mathbb{R}^2$. Именно, каждая матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ задаёт биективное линейное преобразование $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и при нём прямые, проходящие через O, переходят в прямые, проходящие через O. Получаем преобразование $\overline{A}\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$:

$$\boxed{A\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{A}\colon \frac{x}{y} \mapsto \frac{ax+by}{cx+dy}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{A}\colon \overline{\mathbb{R}} \ni x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \in \overline{\mathbb{R}}}$$

5. Докажите, что проективные преобразования проективной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ — это в точности дробно-линейные отображения — отображения вида $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $ad \neq bc$.

«Равноправие» всех точек проективной прямой. Пусть точка O не лежит на прямой l. Каждую точку $A \in l$ отождествим с прямой OA, а бесконечно удалённую точку $\infty_l \in \bar{l}$ — с прямой $OB \parallel l$. Таким образом, проективную прямую $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ можно определить как множество прямых, проходящих через данную точку O. При этом любую точку проективной прямой (= одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$) можно объявить *«бесконечно удалённой»* и считать, что остальные точки образуют «обычную прямую».

Каждая прямая OA задаётся углом поворота xOA, причём этот угол определён по модулю π. Каждая прямая пересекает окружность с центром O в двух точках, поэтому проективную прямую можно мыслить себе как окружность, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки.

Однородные координаты. Введём на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ отношение эквивалентности

$$(x,y) \sim (x',y') \iff xy' = x'y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ (x',y') = (\lambda x, \lambda y).$$

Класс эквивалентности пары (x,y) обозначается $(x:y)$. Таким образом, $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x:y) = (x':y')$, например, $(1:2) = (2:4)$, $(1:0) = (-2:0)$. Проективную прямую можно определить как множество классов $(x:y)$, где $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Проективные преобразования проективной прямой $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ теперь можно определить как её биекции на себя, индуцированные невырожденными линейными преобразованиями плоскости $\mathbb{R}^2$. Именно, каждая матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ задаёт биективное линейное преобразование $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и при нём прямые, проходящие через O, переходят в прямые, проходящие через O. Получаем преобразование $\overline{A}\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$:

$$\boxed{A\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{A}\colon \frac{x}{y} \mapsto \frac{ax+by}{cx+dy}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\overline{A}\colon \overline{\mathbb{R}} \ni x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \in \overline{\mathbb{R}}}$$

Проективная плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$: модели и визуальные образы

1. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \{(x:y:z) \mid (0,0,0) \neq (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$, где $(x:y:z) = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Общий вид проективной прямой:

$$\{(ax_1 + bx_2 : ay_1 + by_2 : az_1 + bx_2) \mid (0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{R}^2\},\ \text{где } (x_1 : y_1 : z_1) \neq (x_2 : y_2 : z_2).$$

2. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — множество прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через $O = (0,0,0)$.
Проективные прямые — плоскости, проходящие через O.

3. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — обычная плоскость $\mathbb{R}^2$, пополненная бесконечно удалёнными точками следующим образом: каждому направлению — пучку прямых, параллельных, скажем, прямой l, сопоставляется бесконечно удалённая точка ∞_l. При этом считают, что проективные прямые — это прямые вида $\bar{l} = l \cup \{\infty_l\}$, а также бесконечно удалённая прямая $\overline{\infty} = \{\infty_l \mid l \text{ — обычная прямая}\}$ — прямая, состоящая из бесконечно удалённых точек. Отсюда следует, что

(1) если $l_1 \parallel l_2$, то $\overline{l_1} \cap \overline{l_2} = \{\infty_{l_1}\} = \{\infty_{l_2}\}$;

(2) $\overline{\infty} \cap \bar{l} = l_\infty$, таким образом,

любые две проективные прямые пересекаются ровно в одной точке и через любые две точки проходит ровно одна проективная прямая.

4. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в O, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки, т. е. формально *фактормножество* $S^2/{\sim}$, где S^2 — сфера, $\sim$ — отношение эквивалентности на S^2: $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$.

5. Коль скоро точки x и $-x$ эквивалентны, достаточно взять одну из них, т. е. вместо сферы рассматривать полусферу. Однако возникает вопрос, что делать с её границей — экватором. Это — окружность с отождествлёнными точками x и $-x$, т. е. проективная прямая. Как видим, во всех подходах

проективная плоскость = обычная плоскость $\cup$ проективная прямая.

Проективная плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$: модели и визуальные образы

1. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — множество прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через $O = (0,0,0)$.
Проективные прямые — плоскости, проходящие через O.

2. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \{(x:y:z) \mid (0,0,0) \neq (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$, где $(x:y:z) = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Общий вид проективной прямой:

$$\{(ax_1 + bx_2 : ay_1 + by_2 : az_1 + bx_2) \mid (0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{R}^2\},\ \text{где } (x_1 : y_1 : z_1) \neq (x_2 : y_2 : z_2).$$

3. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — обычная плоскость $\mathbb{R}^2$, пополненная бесконечно удалёнными точками следующим образом: каждому направлению — пучку прямых, параллельных, скажем, прямой l, сопоставляется бесконечно удалённая точка ∞_l. При этом считают, что проективные прямые — это прямые вида $\bar{l} = l \cup \{\infty_l\}$, а также бесконечно удалённая прямая $\overline{\infty} = \{\infty_l \mid l \text{ — обычная прямая}\}$ — прямая, состоящая из бесконечно удалённых точек. Отсюда следует, что

(1) если $l_1 \parallel l_2$, то $\overline{l_1} \cap \overline{l_2} = \{\infty_{l_1}\} = \{\infty_{l_2}\}$;

(2) $\overline{\infty} \cap \bar{l} = l_\infty$, таким образом,

любые две проективные прямые пересекаются ровно в одной точке и через любые две точки проходит ровно одна проективная прямая.

4. $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в O, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки, т. е. формально *фактормножество* $S^2/{\sim}$, где S^2 — сфера, $\sim$ — отношение эквивалентности на S^2: $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$.

5. Коль скоро точки x и $-x$ эквивалентны, достаточно взять одну из них, т. е. вместо сферы рассматривать полусферу. Однако возникает вопрос, что делать с её границей — экватором. Это — окружность с отождествлёнными точками x и $-x$, т. е. проективная прямая. Как видим, во всех подходах

проективная плоскость = обычная плоскость $\cup$ проективная прямая.

Проективные преобразования проективной плоскости $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$

индуцируются невырожденными линейными отображениями в $\mathbb{R}^3$, т. е. матрицами $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\[2ex] \dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{pmatrix}}$$

(последний переход: (x, y) — координаты на плоскости $\{z = 1\}$.)

Эквивалентный геометрический подход: проективные преобразования — композиции центральных и параллельных проецирований плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Как и в случае, проективных преобразований прямой, проецирования, вообще говоря, определены не на всех точках плоскости (почему?), но становятся всюду определёнными и взаимно-однозначными при добавлении к каждому пучку параллельных прямых плоскости бесконечно удалённой точки (после чего плоскость становится проективной).

Точки проективной плоскости $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, никакие три из которых не лежат на одной проективной прямой, называются точками общего положения.

Любые четыре точки общего положения можно перевести проективным преобразованием в любые четыре точки общего положения, причём такое преобразование единственно.

Проективные преобразования проективной плоскости $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$

индуцируются невырожденными линейными отображениями в $\mathbb{R}^3$, т. е. матрицами $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\[2ex] \dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{pmatrix}}$$

(последний переход: (x, y) — координаты на плоскости $\{z = 1\}$.)

Эквивалентный геометрический подход: проективные преобразования — композиции центральных и параллельных проецирований плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Как и в случае, проективных преобразований прямой, проецирования, вообще говоря, определены не на всех точках плоскости (почему?), но становятся всюду определёнными и взаимно-однозначными при добавлении к каждому пучку параллельных прямых плоскости бесконечно удалённой точки (после чего плоскость становится проективной).

Точки проективной плоскости $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$, никакие три из которых не лежат на одной проективной прямой, называются точками общего положения.

Любые четыре точки общего положения можно перевести проективным преобразованием в любые четыре точки общего положения, причём такое преобразование единственно.

1. Набор $(x_1 : \ldots : x_n)$ однородных координат определён $\Leftrightarrow \exists i\ x_i \neq 0$ и определяется как множество всех ненулевых упорядоченных наборов, пропорциональных набору $(x_1, \ldots, x_n)$. Верно ли, что

$$(x_1 : y_1 : z_1) = (x_2 : y_2 : z_2) \iff (x_1 : x_2) = (y_1 : y_2) = (z_1 : z_2),$$

если допустить отношение $(0 : 0)$, которое считать равным любому отношению и просто выбрасывать из цепочки равенств?

2. а) Через две различные точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ проходит единственная проективная прямая $\{a_1 : a_2 : a_3\}$. Какая?

б) Вопрос, двойственный вопросу в пункте **а)** (и ответ на него).

3. а) Каков критерий того, что три точки $(x_1 : y_1 : z_1)$, $(x_2 : y_2 : z_2)$, $(x_3 : y_3 : z_3)$ в $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ лежат на одной проективной прямой?

б) Вопрос, двойственный вопросу в пункте **а)** (и ответ на него).

Задачи для затравки

1. Пират зарыл клад на острове среди ста деревьев и указал, как его искать: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, ..., наконец, повернуть к сотому дереву и пройти сотую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько ям придётся выкопать, чтобы гарантированно найти клад?

2. Теорема Чевы. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (такие отрезки называются *чевианами*) тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \tag{1}$$

3. Теорема Менелая. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки C_1 и A_1, а на продолжении стороны AC за точку C — точка B_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда (1).

4. Теорема Ван-Обеля. Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что

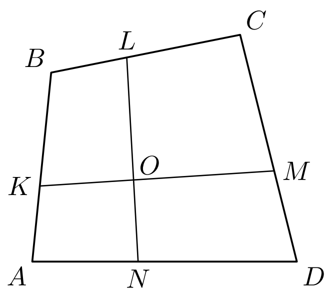
$$\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Хорошо известна *теорема Вариньона:* середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. Вот её обобщение и одно из его любопытных приложений.

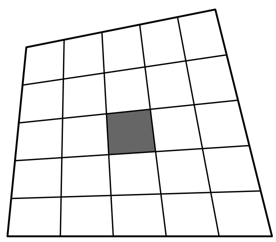
5. На рисунке $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Докажите, что

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DM}{MC} = \frac{AN}{ND} = \frac{BL}{LC} = k \implies \frac{KO}{OM} = \frac{NO}{OL} = k.$$

(В теореме Вариньона $k = 1$.)



6. Каждая из сторон выпуклого четырёхугольника разделена на пять равных частей и соответствующие точки противоположных сторон соединены (см. чертёж). Докажите, что площадь среднего (заштрихованного) четырёхугольника в 25 раз меньше площади исходного.



7. На сторонах BC и CD паралеллограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $BK : KC = CL : LD$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AKL лежит на диагонали BD.

Центр масс

Центром масс системы точек $A_1, \ldots, A_n$ с массами $m_1, \ldots, m_n > 0$ соответственно называется такая точка M, что $m_1\overrightarrow{MA_1} + \ldots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}$. Введём обозначение $M = \mathrm{C}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ m_1 & \ldots & m_n \end{pmatrix}$.

Теорема. Для любой системы точек с положительными массами центр масс существует и единствен.

Правило рычага. $\mathrm{C}\begin{pmatrix} A & B \\ m_A & m_B \end{pmatrix}$ — такая точка C на отрезке AB, что $AC : CB = m_B : m_A$.

Теорема о группировке масс. Если в некоторой системе заменить часть точек на их центр масс и поместить туда массу, равную сумме масс исходных точек, то центр масс всей системы не изменится:

$$\boxed{\mathrm{C}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n & B_1 & \ldots & B_k \\ m_1 & \ldots & m_n & p_1 & \ldots & p_k \end{pmatrix} = \mathrm{C}\begin{pmatrix} \mathrm{C}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_n \\ m_1 & \ldots & m_n \end{pmatrix} & B_1 & \ldots & B_k \\ m_1 + \ldots + m_n & p_1 & \ldots & p_k \end{pmatrix}}$$

Линейные комбинации точек и барицентрические координаты

Пусть $A_0, \ldots, A_n$ — точки (допустим, в $\mathbb{R}^N$) и $k_0, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$. Выберем какую-нибудь точку O и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OB} = \sum_i k_1\overrightarrow{OA_i}$. Если точка B получается одна и та же для любой точки O, то можно написать $B = \sum_i k_i A_i$ и сказать, что B — линейная комбинация точек $A_0, \ldots, A_n$ с коэффициентами $k_0, \ldots, k_n$.

Контрольные вопросы. 0. Можно говорить о полусумме точек A и B (это середина отрезка AB), но о сумме — нельзя.

1. Критерий $(*)$ (условие на $k_0, \ldots, k_n$) определённости линейной комбинации любых $n+1$ точек.

2. $$\boxed{\mathrm{C}\begin{pmatrix} A_0 & \ldots & A_n \\ m_0 & \ldots & m_n \end{pmatrix} = \frac{m_0A_0 + \ldots + m_nA_n}{m_0 + \ldots + m_n}}$$

3. Для произвольных точек $A_0, \ldots, A_n$ опишите множество $\{k_0A_0 + \ldots + k_nA_n \mid (*)\}$.

4. Какому условию должны удовлетворять точки $A_0, \ldots, A_n$, чтобы во всякой их корректной линейной комбинации $\sum_i k_iA_i$ коэффициенты $k_0, \ldots, k_n$ определялись однозначно?

5. Предположим, что точки $A_0, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^N$ таковы, что для всякой точки $B \in \mathbb{R}^N$ существует единственный такой набор чисел $(k_0, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, что $(*)$ и $B = \sum_i k_iA_i$. Это возможно тогда и только тогда, когда

В этом случае числа $k_0, \ldots, k_n$ называются **барицентрическими координатами** точки B относительно *аффинно независимой системы точек* $A_0, \ldots, A_n$.

Равносильно: $(k_0, \ldots, \widehat{k_i}, \ldots, k_n)$ — набор координат вектора $\overrightarrow{A_iB}$ в базисе $(\overrightarrow{A_iA_0}, \ldots, \widehat{\overrightarrow{A_iA_i}}, \ldots, \overrightarrow{A_iA_n})$.

Операторы в эрмитовых пространствах

Далее V — эрмитово пространство, т. е. линейное пространство над $\mathbb{C}$ с фиксированным эрмитовым скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

Замечание-затравка. 1) В линейных пространствах (без скалярного произведения) особенно просто устроены диагонализируемые операторы, т. е. такие, для которых существует базис из собственных векторов.

2) В евклидовых и эрмитовых пространствах удобно работать в ортонормированном базисе.

3) При рассмотрении операторов в евклидовых и эрмитовых пространствах особый интерес представляют операторы, которые ***диагонализируются в некотором ортонормированном базисе.*** Ставится задача описать класс таких операторов.

1. Докажите, что если A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в *ортонормированном* базисе, то $A^* = \overline{A^t}$ — матрица оператора $\mathcal{A}^*$ в том же базисе. Верно ли утверждение для произвольного базиса?

Оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ называется

- эрмитовым или самосопряжённым, если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ (в евклидовом случае говорят «самосопряжённый»);
- косоэрмитовым, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ (в евклидовом случае говорят «кососимметрический»);
- унитарным, если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$ (аналог ортогонального оператора в евклидовом пространстве).

2. Пусть $\dim V = 1$. Во что превращаются понятия сопряжённого оператора к данному, самосопряжённого, косоэрмитова и унитарного оператора?

3. Обобщите утверждение $\big(\forall z \in \mathbb{C}\ \exists! x, y \in \mathbb{R}\ z = x + iy\big)$ на операторы: докажите, что всякий оператор однозначно представляется в виде $\mathcal{A} + i\mathcal{B}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — самосопряжённые операторы.

4. Обобщите на операторы: **а)** $\forall x \in \mathbb{R}\ \left|\dfrac{x+i}{x-i}\right| = 1$; **б)** $\forall z \in \mathbb{C}\ \left(|z| = 1 \neq z \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ z = \dfrac{x+i}{x-i}\right)$.

5. Верны ли утверждения: **а)** если $\mathcal{A}v = \lambda v$, то $\mathcal{A}^* v = \overline{\lambda} v$; **б)** $\operatorname{Sp}(\mathcal{A}^*) = \overline{\operatorname{Sp}\mathcal{A}}$?

6. Теорема. Эрмитовы операторы — в точности те, что диагонализируются в некотором ортонормированном базисе и имеют вещественный спектр.

Шаг 0. Эрмитовость указанных очевидна: если $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и все $\lambda_k \in \mathbb{R}$, то $A^* = A$.

Шаг 1. Если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, то $\operatorname{Sp}\mathcal{A} \subset \mathcal{R}$. Почему?

Шаг 2. Если u — собственный вектор для $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, то $\langle u \rangle^\perp$ — инвариантно относительно $\mathcal{A}$ (почему?) и можно перейти к оператору $\mathcal{A}|_{\langle u \rangle^\perp}$.

7. Теорема. Пусть $\mathcal{A}$ — оператор одного из трёх типов: $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$.

а) Докажите импликацию $\big(\mathcal{A}U \subseteq U \implies \mathcal{A}^* U^\perp \subseteq U^\perp\big)$ для любого подпространства $U \subseteq W$.

б) Докажите, что $\boxed{\textbf{оператор } \mathcal{A} \textbf{ диагонализируем в некотором ортонормированном базисе.}}$

в) Докажите, что $\operatorname{Sp}\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ в случае $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, $\operatorname{Sp}\mathcal{A} \subset i\mathbb{R}$ в случае $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$ и $\operatorname{Sp}\mathcal{A} \subset \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ в случае $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$.

Определим положительный (неотрицательный) оператор как такой эрмитов оператор $\mathcal{A}$, что квадратичная функция $V \ni v \mapsto (\mathcal{A}v, v)$ положительна (неотрицательна), т. е. $\forall v \in V \setminus \{0\}\ (\mathcal{A}v, v) > 0$ $(\forall v \in V\ \ (\mathcal{A}v, v) \geqslant 0)$.

8. Пусть $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. **а)** Тогда $\begin{cases} \mathcal{A} \text{ положителен} & \iff \operatorname{Sp}\mathcal{A} \subset (0, \infty) \iff \exists \mathcal{B} \in \mathrm{GL}(V)\ \mathcal{B}^2 = \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \text{ неотрицателен} & \iff \operatorname{Sp}\mathcal{A} \subset [0, \infty) \iff \exists \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)\ \mathcal{B}^2 = \mathcal{A}. \end{cases}$

б) Для каждого неотрицательного эрмитова оператора $\mathcal{A}$ определите однозначно оператор $\sqrt{\mathcal{A}}$.

9. Для всякого оператора $\mathcal{A}$ операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ неотрицательны (и положительны $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ невырожден). Оператор $\mathcal{A}$, для которого $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$, называется *нормальным.*

Всё готово для аналога тригонометрической формы комплексного числа — *полярного разложения.*

10. а) Всякий оператор $\mathcal{A}$ можно представить в виде $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{U}$, а также в виде $\mathcal{U}'\mathcal{C}'$, где $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ — неотрицательные операторы, а $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ — унитарные операторы. При этом операторы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ определены однозначно всегда, а операторы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ — только для невырожденного оператора $\mathcal{A}$.

б) При этом $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \iff$? (условие на $\mathcal{A}$) $\iff \mathcal{C}\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{C}$ для всякого такого унитарного оператора $\mathcal{U}$, что $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{U}$.

Алгебро-геометрический словарик

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \text{ — унитарный оператор (изометрия)}\\
\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{S} \text{ — ортогональное отражение}\\
\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{P} \text{ — проектор}\\
\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{P} \text{ — ортопроектор}\\
\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \text{ — частичная изометрия}
\end{aligned}$$

11. Проектор. Следующие условия на оператор $\mathcal{P}$ равносильны:

(1) $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$;

(2) $\exists$ подпространства $U, W \subseteq V \begin{cases} V = U \oplus W \\ \mathcal{P}|_U = \mathrm{id}_U \\ \mathcal{P}|_W = 0; \end{cases}$

(3) оператор $\mathcal{P}$ диагонализируем и $\mathrm{Sp}(\mathcal{P}) \subseteq \{0, 1\}$.

12. Ортогональный проектор. Следующие условия на оператор $\mathcal{P}$ равносильны:

(1) $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} = \mathcal{P}^*$;

(2) $\exists$ подпространство $U \subseteq V \begin{cases} \mathcal{P}|_U = \mathrm{id}_U \\ \mathcal{P}|_{U^\perp} = 0; \end{cases}$

(3) оператор $\mathcal{P}$ диагонализируем в некотором ортонормированном базисе и $\mathrm{Sp}(\mathcal{P}) \subseteq \{0, 1\}$.

13. Ортогональное отражение. Следующие условия на оператор $\mathcal{S}$ равносильны:

(1) $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^*$;

(2) $\exists$ подпространство $U \subseteq V \begin{cases} \mathcal{S}|_U = \mathrm{id}_U \\ \mathcal{S}|_{U^\perp} = -\,\mathrm{id}_{U^\perp}; \end{cases}$

(3) оператор $\mathcal{S}$ диагонализируем в некотором ортонормированном базисе и $\mathrm{Sp}(\mathcal{S}) \subseteq \{-1, 1\}$.

14*. Частичная изометрия. Следующие условия на оператор $\mathcal{C}$ равносильны:

(1) $\mathcal{C}$ действует изометрично на ортогональном дополнении к своему ядру, т. е. $(\mathcal{C}x, \mathcal{C}y) = (x, y)$ для всех $x, y \in (\operatorname{Ker} \mathcal{C})^\perp$;

(2) $\mathcal{C}\mathcal{C}^*\mathcal{C} = \mathcal{C}$.

15*. Следующие условия на оператор $\mathcal{A}$ равносильны:

(1)

(2) оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем в некотором ортонормированном базисе;

(3)

(4)

(5)

(6)

Комплексификация вещественного пространства ${}_{\mathbb{R}}V$

— это комплексное пространство $V^{\mathbb{C}}$, состоящее из *формальных* сумм вида $u+iv$, где $u,v\in V$, которые складываются покомпонентно и умножаются на комплексные числа по правилу

$$(a+ib)(u+iv):=(au-bv)+i(av+bu),\ \text{где } a,b\in\mathbb{R},\ u,v\in V.$$

Векторы из V называются *вещественными векторами* в $V^{\mathbb{C}}$.
Координатный подход: $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^n$.

1. Пусть векторы $u,v\in V$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Докажите, что векторы
а) u,v; **б)** $u+iv,u-iv\in V^{\mathbb{C}}$ линейно независимы над $\mathbb{C}$.

2. Всякий базис пространства V является также базисом пространства $V^{\mathbb{C}}$. $\boxed{\dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})=\dim_{\mathbb{R}}V}$

3. Если $e_1,\ldots,e_n$ — базис в ${}_{\mathbb{C}}W$, то $e_1,\ldots,e_n,ie_1,\ldots,ie_n$ — базис в ${}_{\mathbb{R}}W$. $\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(V^{\mathbb{C}})=2\dim_{\mathbb{R}}V}$

Реакция операторов

Всякий оператор $\mathcal{A}\colon V\to V$ однозначно продолжается до оператора $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}}\to V^{\mathbb{C}}$ *от безысходности по принципу неизбежности:* $\boxed{\mathcal{A}^{\mathbb{C}}(u+iv):=\mathcal{A}u+i\mathcal{A}v,\ u,v\in V}$

4. Если $u+iv$ — собственный вектор для оператора $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ ($u,v\in V$), то подпространство $\langle u,v\rangle$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$. Таким образом,

$\boxed{\text{всякий оператор в вещественном пространстве имеет } \leqslant 2\text{-мерное инвариантное подпространство.}}$

5. Пусть в предположениях задачи **4** $\mathcal{A}(u+iv)=(a+ib)(u+iv)$, $a,b\in\mathbb{R}$.
а) Докажите, что если векторы u и v линейно зависимы, то они оба собственные для $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ и $b=0$.

В случае линейно независимых векторов u и v запишите матрицу ограничения оператора $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ на подпространство $\langle u,v\rangle$ в базисе **б)** u,v; **в)** $u+iv$, $u-iv$ (это базисы в силу задачи **1**).

Реакция скалярного произведения

Пусть теперь на V задано евклидово скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$.

6. Докажите, что это скалярное произведение однозначно продолжается до эрмитова скалярного произведения на $V^{\mathbb{C}}$.

7. Сформулируйте критерий ортогональности векторов $u+iv,u-iv\in V^{\mathbb{C}}$, где $u,v\in V$, в вещественных терминах.

8. Докажите, что для любого оператора $\mathcal{A}\colon V\to V$ $\boxed{(\mathcal{A}^*)^{\mathbb{C}}=(\mathcal{A}^{\mathbb{C}})^*}$ и поэтому

$\mathcal{A}$ самосопряжён $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ эрмитов, $\mathcal{A}$ кососимметричен $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ косоэрмитов, $\mathcal{A}$ ортогонален $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ унитарен.

Применение: строение операторов в евклидовых пространствах

9. Пусть V — евклидово пространство и $\mathcal{A}\colon V\to V$ — оператор одного из трёх типов: $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^{-1}$. Докажите, что в V существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид:

а) $\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ в случае $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}$;

б) $\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},0,\ldots,0\right\}$ в случае $\mathcal{A}^*=-\mathcal{A}$;

в) $\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}\cos\varphi_1&-\sin\varphi_1\\\sin\varphi_1&\cos\varphi_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\cos\varphi_k&-\sin\varphi_k\\\sin\varphi_k&\cos\varphi_k\end{pmatrix},\pm1,\ldots,\pm1\right\}$ в случае $\mathcal{A}^*=\mathcal{A}^{-1}$.

Структурная теорема о нормальных операторах

Теорема. Следующие условия на оператор $\mathcal{A}$ в конечномерном эрмитовом пространстве V равносильны:

(1) $\mathcal{A}$ — нормальный оператор, т. е. по определению $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$;
(2) оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем в некотором ортонормированном базисе;
(3) $\|\mathcal{A}x\| = \|\mathcal{A}^*x\|$ для всех $x \in V$;
(4) существуют неотрицательный оператор $\mathcal{C}$ и унитарный оператор $\mathcal{U}$, для которых $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{C}$;
(4)$'$ если $\mathcal{C}$ — неотрицательный оператор, $\mathcal{U}$ — унитарный оператор и $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{U}$, то $\mathcal{A} = \mathcal{U}\mathcal{C}$;
(5) $\mathcal{A}^* = f(\mathcal{A})$ для некоторого многочлена $f(t) \in \mathbb{C}[t]$;
(6) каждый собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ является также собственным для оператора $\mathcal{A}^*$.

1. Докажите теорему.

2. Выведите из теоремы следствия о строении эрмитовых, косоэрмитовых и унитарных операторах в конечномерных эрмитовых пространствах.

3. Найдите наиболее простой вид нормального оператора в ортонормированном базисе на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$.

4. Сформулируйте и докажите полный аналог теоремы о строении нормальных операторов в конечномерных евклидовых пространствах (т. е. замените каждое условие (1)–(6) подходящим евклидовым аналогом).

Указание: задание перестаёт быть творческим, если использовать «($\mathbb{R} \to \mathbb{C}$)-лифт» (комплексификацию евклидова пространства). Обратите внимание, что нормальные операторы в евклидовых пространствах вовсе не обязаны диагонализироваться (пример?), но тем не менее условие (2) имеет естественный вещественный аналог (см. задачу 3).

5. Следствия о строении самосопряжённых, кососимметрических и ортогональных операторов можно вывести из задачи 4, можно вывести из соответствующих комплексных аналогов (задача 2), а можно провести непосредственное доказательство в каждом из трёх случаев, ни на что не ссылаясь. Выберите любой путь.

Приведение квадратичной функции к главным осям

Теорема 1. Всякая квадратичная функция в евклидовом пространстве размерности n принимает в подходящем ортонормированном базисе вид $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$; при этом числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ определены однозначно с точностью до перестановки. Такой вид называется *каноническим,* а векторы соответствующего базиса — *главными осями* для данной функции (оси определены, вообще говоря, не однозначно).

Переформулировка. Для любой симметричной матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ существует такая ортогональная матрица C, что матрица $C^t AC$ диагональна, при этом на диагонали обязательно стоят собственные числа матрицы A:

$$\boxed{A = A^t \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Sp}\, A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \implies \exists C \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})\ C^t AC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}$$

$\triangleleft$ Оператор $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с матрицей A в стандартном базисе самосопряжён, а потому диагонализируем в некотором ортонормированном базисе, т. е. $\exists C \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})\colon C^t AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} = \mathrm{Sp}\,\mathcal{A}$ (матрица C ортогональна как матрица перехода между ортонормированными базисами). $\triangleright$

Приведение пары форм к диагональному виду

Теорема 2. Пусть $\mathcal{Q}, \mathcal{B}\colon V \to \mathbb{R}$ — квадратичные функции в векторном пространстве V размерности n, причём $\mathcal{Q}$ положительно определена. Тогда существует такой базис, в котором функция $\mathcal{Q}$ принимает вид $x_1^2 + \ldots + x_n^2$, а функция $\mathcal{B}$ принимает вид $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$.

Переформулировка. Пусть Q и B — симметричные матрицы в $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, причём $X^t QX > 0$ для всех $X \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})\backslash 0$. Тогда существует такая матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, что $C^t QC = E$, а матрица $C^t BC$ диагональна.

$\triangleleft$ Функция $\mathcal{Q}$ задаёт скалярное произведение в пространстве V. Далее применяем теорему 1. $\triangleright$

Замечание. Равенство $C^t QC = E$ означает, что столбцы (а также строки) матрицы C образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения, задаваемого матрицей Q.

Собственные значения и векторы пары форм

Пусть даны симметричные матрицы $Q, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, причём Q положительно определена.

Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *собственным значением пары форм* (Q, B), если $|B - \lambda Q| = 0$.

Вектор $v \in V \setminus 0$ называется *собственным вектором пары формы* (Q, B), отвечающим значению λ, если $(B - \lambda Q)v = 0$.

Теорема 3. В обозначениях теоремы 2 и её переформулировки: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения пары форм (Q, B), столбцы матрицы C — собственные векторы пары форм (Q, B), образующие ортонормированный базис относительно скалярного произведения, задаваемого матрицей Q.

$\triangleleft$ Обозначив $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, имеем $C^t QC = E$, $C^t BC = D$. Тогда для всех $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$|B - \lambda Q| = 0 \iff |C^t(B - \lambda Q)C| = |D - \lambda E| = 0 \iff \lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

Далее i-й столбец $\widehat{C_i}$ матрицы C — собственный вектор, отвечающий значению λ_i:

$$0 = (\widehat{D - \lambda_i E})_i = \left(C^t(\widehat{B - \lambda Q})C\right)_i = C^t(B - \lambda Q)\widehat{C_i} \implies (B - \lambda Q)\widehat{C_i}. \quad \triangleright$$

I вариант

1. При каждом $a \in \mathbb{R}$ найдите сигнатуру квадратичной формы с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ такова, что $AA^t = A^tA$. Следует ли отсюда, что для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ матрица **а)** $C^{-1}AC$; **б)** C^tAC является диагональной?

3. Для каждой из следующих матриц и четырёх типов операторов ответьте на вопрос: „Если про оператор в евклидовом пространстве известно, что в некотором базисе он задаётся матрицей ..., то является ли он ...?“ — для этого запишите в ячейках таблицы номера пунктов.

Тип оператора	Точно да	Точно нет	Не ясно
Самосопряжённый			
Кососимметрический			
Ортогональный			
Нормальный			

а) (2); **б)** (0); **в)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; **д)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; **ж)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную функцию к главным осям:

$$x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

II вариант

1. Найдите все $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых квадратичная форма с матрицей $\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ отрицательно определена.

2. Для всякой ли матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ найдётся такая матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, что матрица **а)** $C^{-1}AA^tC$; **б)** C^tAA^tC диагональна?

3. Для каждой из следующих матриц и четырёх типов операторов ответьте на вопрос: „Если про оператор в эрмитовом пространстве известно, что в некотором базисе он задаётся матрицей ..., то является ли он ...?“ — для этого запишите в ячейках таблицы номера пунктов.

Тип оператора	Точно да	Точно нет	Не ясно
Эрмитов			
Косоэрмитов			
Унитарный			
Нормальный			

а) (i); **б)** (-1); **в)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **д)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; **е)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; **ж)** $\begin{pmatrix} -i & 5 \\ -2 & i \end{pmatrix}$.

4. Найдите ортогональное преобразование, приводящее квадратичную функцию к главным осям:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Алгебра кватернионов

В пространстве $\mathbb{R}^4$ отождествим вектор вида $(a,0,0,0)$ с числом $a \in \mathbb{R}$, а также обозначим

$$i = (0,1,0,0), \quad j = (0,0,1,0), \quad k = (0,0,0,1).$$

Элементы $1, i, j, k$ называются *базисными кватернионами.* Вот их таблица умножения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Это умножение распространяется по линейности (дистрибутивности) на всё пространство $\mathbb{R}^4$, которое таким образом превращается в алгебру над $\mathbb{R}$. Она называется *алгеброй кватернионов* и обозначается буквой $\mathbb{H}$ в честь открывшего её в 1843 году ирландского математика Гамильтона (Hamilton).

1. Докажите, что **а)** эта алгебра ассоциативна и **б)** каждый её ненулевой элемент обратим. Тем самым, $\mathbb{H}$ является *телом.* (В частности, в $\mathbb{H}$ нет делителей нуля.)

2. Пусть кватернионы $1, q_1, q_2$ линейно независимы. Докажите, что кватернионы $1, q_1, q_2, q_1q_2$ тоже линейно независимы.

3. Решите в $\mathbb{H}$ уравнения **а)** $x^2 = 1$; **б)** $x^2 = -1$.

4. Найдите все такие $q \in \mathbb{H}$, что **а)** $qi = iq$; **б)** $qi = -iq$.

5. Ясно, что $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}$ — подалгебры в $\mathbb{H}$, изоморфные алгебре $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Существуют ли другие подалгебры в $\mathbb{H}$, изоморфные $\mathbb{C}$?

6. Означает ли тождество $a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j$, что $\mathbb{H}$ — алгебра над полем $\mathbb{C}$?

Для кватерниона $q = a + bi + cj + dk$ определим сопряжённый кватернион $\overline{q} := a - bi - cj - dk$.

7. Верно ли, что $\overline{q_1q_2} = \overline{q_1}\,\overline{q_2}$ для всех $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$?

8. Найдите все такие $q \in \mathbb{H}$, что **а)** $\overline{q} = q$; **б)** $\overline{q} = q^{-1}$; **в)** $\overline{q} = -q$.

9*. Теорема Лагранжа. Всякое натуральное число представимо в виде суммы четырёх полных квадратов. (Покажите, что теорему достаточно доказать только для простых чисел.)

Алгебра кватернионов

В пространстве $\mathbb{R}^4$ отождествим вектор вида $(a,0,0,0)$ с числом $a \in \mathbb{R}$, а также обозначим

$$i = (0,1,0,0), \quad j = (0,0,1,0), \quad k = (0,0,0,1).$$

Элементы $1, i, j, k$ называются *базисными кватернионами.* Вот их таблица умножения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j.$$

Это умножение распространяется по линейности (дистрибутивности) на всё пространство $\mathbb{R}^4$, которое таким образом превращается в алгебру над $\mathbb{R}$. Она называется *алгеброй кватернионов* и обозначается буквой $\mathbb{H}$ в честь открывшего её в 1843 году ирландского математика Гамильтона (Hamilton).

1. Докажите, что **а)** эта алгебра ассоциативна и **б)** каждый её ненулевой элемент обратим. Тем самым, $\mathbb{H}$ является *телом.* (В частности, в $\mathbb{H}$ нет делителей нуля.)

2. Пусть кватернионы $1, q_1, q_2$ линейно независимы. Докажите, что кватернионы $1, q_1, q_2, q_1q_2$ тоже линейно независимы.

3. Решите в $\mathbb{H}$ уравнения **а)** $x^2 = 1$; **б)** $x^2 = -1$.

4. Найдите все такие $q \in \mathbb{H}$, что **а)** $qi = iq$; **б)** $qi = -iq$.

5. Ясно, что $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R}$ — подалгебры в $\mathbb{H}$, изоморфные алгебре $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Существуют ли другие подалгебры в $\mathbb{H}$, изоморфные $\mathbb{C}$?

6. Означает ли тождество $a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j$, что $\mathbb{H}$ — алгебра над полем $\mathbb{C}$?

Для кватерниона $q = a + bi + cj + dk$ определим сопряжённый кватернион $\overline{q} := a - bi - cj - dk$.

7. Верно ли, что $\overline{q_1q_2} = \overline{q_1}\,\overline{q_2}$ для всех $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$?

8. Найдите все такие $q \in \mathbb{H}$, что **а)** $\overline{q} = q$; **б)** $\overline{q} = q^{-1}$; **в)** $\overline{q} = -q$.

9*. Теорема Лагранжа. Всякое натуральное число представимо в виде суммы четырёх полных квадратов. (Покажите, что теорему достаточно доказать только для простых чисел.)

Геометрия кватернионов

Комплексные числа помогают описать движения на плоскости, а кватернионы — в трёхмерном пространстве.

10. Перемножьте кватернионы $q_1 = a_1 + v_1$ и $q_2 = a_2 + v_2$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ и $v_1, v_2 \in \langle i, j, k \rangle$, в терминах скалярного и векторного произведений векторов v_1, v_2 (и скаляров a_1, a_2). Пример (частный случай):

$$\boxed{[i, j] = k}$$

11. Покажите, что всякий кватернион нормы 1 представляется в виде $\cos\varphi + v \sin\varphi$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ и v — чисто мнимый кватернион нормы 1.

Рассмотрим отображения *сопряжения* с помощью заданного кватерниона $z \neq 0$:

$$C_z \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad q \mapsto zqz^{-1}.$$

12. Пусть $|z| = 1$. Покажите, что C_z — движение в $\mathbb{R}^4$, а также (и это главное!) и в $\mathbb{R}^3 = \langle i, j, k \rangle$.

13. Опишите геометрически движение C_z в пространстве $\langle i, j, k \rangle$ для **а)** $z = i$; **б)** $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$; **в)** $\cos\varphi + v \sin\varphi$, где v — чисто мнимый кватернион нормы 1.

14. Найдите композиции вращений в $\mathbb{R}^3$ относительно осей l_1 и l_2 на углы φ_1 и φ_2 соответственно (уточнив выбранные направления осей и поворотов): **а)** $l_1 = (1:1:1)$, $\varphi_1 = 2\pi/3$ и $l_2 = (1:0:0)$, $\varphi_2 = \pi/2$; **б)** $l_1 = (1:0:2)$, $\varphi_1 = \pi/3$ и $l_2 = (-3:1:0)$, $\varphi_2 = \pi/4$.

15. Матричная реализация кватернионов. Покажите, что матрицы вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ образуют подалгебру в $\mathbb{R}$-алгебре $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, изоморфную $\mathbb{R}$-алгебре $\mathbb{H}$, причём изоморфизм доставляет отображение

$$q = a + bi + cj + dk \mapsto A(q) = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}.$$

Геометрия кватернионов

Комплексные числа помогают описать движения на плоскости, а кватернионы — в трёхмерном пространстве.

10. Перемножьте кватернионы $q_1 = a_1 + v_1$ и $q_2 = a_2 + v_2$, где $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ и $v_1, v_2 \in \langle i, j, k \rangle$, в терминах скалярного и векторного произведений векторов v_1, v_2 (и скаляров a_1, a_2). Пример (частный случай):

$$\boxed{[i, j] = k}$$

11. Покажите, что всякий кватернион нормы (длины) 1 представляется в виде $\cos\varphi + v \sin\varphi$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ и v — чисто мнимый кватернион нормы 1.

Рассмотрим отображения *сопряжения* с помощью заданного кватерниона $z \neq 0$:

$$C_z \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad q \mapsto zqz^{-1}.$$

12. Пусть $|z| = 1$. Покажите, что C_z — движение в $\mathbb{R}^4$, а также (и это главное!) и в $\mathbb{R}^3 = \langle i, j, k \rangle$.

13. Опишите геометрически движение C_z в пространстве $\langle i, j, k \rangle$ для **а)** $z = i$; **б)** $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$; **в)** $\cos\varphi + v \sin\varphi$, где v — чисто мнимый кватернион нормы 1.

14. Найдите композиции вращений в $\mathbb{R}^3$ относительно осей l_1 и l_2 на углы φ_1 и φ_2 соответственно (уточнив выбранные направления осей и поворотов): **а)** $l_1 = (1:1:1)$, $\varphi_1 = 2\pi/3$ и $l_2 = (1:0:0)$, $\varphi_2 = \pi/2$; **б)** $l_1 = (1:0:2)$, $\varphi_1 = \pi/3$ и $l_2 = (-3:1:0)$, $\varphi_2 = \pi/4$.

15. Матричная реализация кватернионов. Покажите, что матрицы вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ образуют подалгебру в $\mathbb{R}$-алгебре $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, изоморфную $\mathbb{R}$-алгебре $\mathbb{H}$, причём изоморфизм доставляет отображение

$$q = a + bi + cj + dk \mapsto A(q) = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}.$$

Экспонента матрицы 1×1

1. Последовательность $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ сходится (возрастает и ограничена сверху), $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

2. Второй замечательный предел: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1}$ $\implies$ $\boxed{(e^x)'=e^x}$ $\implies$ $\forall k\in\mathbb{N}_0\ (e^x)^{(k)}|_{x=0}=1$

$$\implies \forall k\in\mathbb{N}_0\ \ e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+o(x^k),\ x\to 0.$$

Отсюда ещё не следует *аналитичность* экспоненты:

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ \ e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}$$

3. Чтобы доказать аналитичность, достаточно оценить остаточный член $r_n(x) := e^x-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$ и показать, что *при каждом фиксированном* $x\in\mathbb{R}$ он стремится к нулю при $n\to\infty$. Используя формулу Ньютона—Лейбница и интегрируя по частям, получим

$$e^x-1=\int_0^x e^t dt=\int_0^x e^t d(t-x)=e^t(t-x)|_0^x+\int_0^x e^t(x-t)d(t-x)=x-\frac{1}{2}\int_0^x e^t d(t-x)^2=$$
$$=x-\frac{1}{2}e^t(t-x)^2|_0^x+\frac{1}{2}\int_0^x e^t(t-x)^2 d(t-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}\int_0^x e^t d(t-x)^3=\ldots=$$
$$=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\ldots+\frac{x^n}{n!}+\underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^x e^t(x-t)^n dt}_{r_n(x)} \implies$$

$$\implies |r_n(x)|\leqslant\frac{\max\{e^x,1\}|x|}{n!}\cdot\underbrace{\left|\int_0^x (t-x)^n dt\right|}_{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}\to 0,\ n\to\infty \text{ для каждого } x\in\mathbb{R}\ \ (\text{т. к. } \tfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0).$$

4. Теперь естественно положить по определению $e^z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!}$ для $z\in\mathbb{C}$ (ряд, очевидно, сходится абсолютно). Тогда надо проверить основное свойство экспоненты $\boxed{e^{z+w}=e^z\cdot e^w}$

5. Альтернативный подход: аналогично пунктам 2, 3 доказываем аналитичность функций $\cos,\sin\colon\mathbb{R}\to\to\mathbb{R}$ (используя первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin x/x=1$) и также продолжаем их на $\mathbb{C}$ разложениями Тейлора

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!},\qquad \sin z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

На этом пути Л. Эйлер получил свою знаменитую формулу

$$\boxed{e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)}$$

Отсюда также следуют тождества

$$\cos z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^z-e^{-z}}{2i}.$$

Эти формулы можно было бы принять за определение $e^z,\cos z,\sin z$ для $z\in\mathbb{C}$.

Экспонента матрицы и линейного оператора (общий случай)

Пространство $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (и изоморфное ему пространство $\mathcal{L}(V)$, где V — n-мерное пространство над $\mathbb{C}$) конечномерно ($\dim \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = n^2$), а потому все нормы в нём эквивалентны и, в частности, определяют одну и ту же сходимость (см. ниже). Пусть $\|\cdot\|\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ — любая норма (например, максимум модулей элементов матрицы).

- Последовательность матриц A_m сходится к матрице $A \overset{\text{def}}{\iff} \|A_m - A\| \to 0$ при $m \to \infty$ (не важно, какая именно норма выбрана).
- $\sum_{k=0}^{\infty} A_k = S\ (\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})) \overset{\text{def}}{\iff} \sum_{k=0}^{m} A_k \to S,\ m \to \infty$.
- Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ матриц сходится абсолютно $\overset{\text{def}}{\iff}$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\|A_k\|$ сходится.
- Абсолютно сходящийся ряд сходится, причём $\|\sum_{k=0}^{\infty} A_k\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|A_k\|$

  $\lhd$ Проверим критерий Коши: $\left\|\sum_{k=m_1}^{m_2} A_k\right\| \to 0$ при $m_1, m_2 \to \infty$. Это следует из оценки

$$\left\|\sum_{k=m_1}^{m_2} A_k\right\| \leqslant \sum_{k=m_1}^{m_2} \|A_k\| \leqslant \sum_{k=m_1}^{\infty} \|A_k\| \to 0.$$

  Из тех же неравенств следует требуемое (берём $m_1 = 0$ и устремляем $m_2 \to \infty$). $\rhd$

Теперь всё готово, чтобы дать определение экспоненты матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\boxed{e^A = \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}}$$

Разобранный на обороте случай $n = 1$ (п. 3) позволяет утверждать, что ряд сходится абсолютно.

Для вычисления экспоненты матрицы используется её жорданова форма и следующие утверждения:

- $e^{C^{-1}AC} = C^{-1}e^A C$;
- $e^{\mathrm{diag}(A_1,\ldots,A_d)} = \mathrm{diag}(e^{A_1}, \ldots, e^{A_d})$;
- $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$;
- $e^N = 1 + N + \dfrac{N^2}{2!} + \ldots + \dfrac{N^{n-1}}{(n-1)!}$, если $N^n = 0$.

1. Докажите, что $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$.

2. Вычислите $\exp\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Докажите, что $|e^A| = e^{\mathrm{tr}\, A}$.

4. Докажите, что если $A = A^* \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, то $e^{iA} \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.

5. Логарифм матрицы. Докажите, что уравнение $e^X = A$ в множестве $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ может иметь решение X только в случае $|A| \neq 0$. Имеет ли оно решение в этом случае? (Начните со случая $n = 1$.)

I вариант

1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — операторы в конечномерном эрмитовом пространстве, причём $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. Докажите, что $\mathcal{A}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}$.

2. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}[x]$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Для каждого многочлена $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ найдите оператор, сопряжённый оператору

$$\mathcal{A}_P f = \int_0^1 P(x,y)f(y)\,dy.$$

3. После семинара по линейной алгебре на доске осталась частично стёртая матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha & * \\ \sin\alpha\cos\beta & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

а) Заполните пропуски любым способом функциями от α и β так, чтобы полученная матрица была ортогональной для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

б) Найдите канонический вид матрицы, найденной в пункте **а)**.

4. Найдите такие матрицы C и U, что

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = UC,$$

что C — симметричная положительно определённая матрица, U — ортогональная матрица.

5. Пусть P_1 и P_2 — две плоскости в аффинном пространстве A над $\mathbb{R}$, причём $\langle P_1 \cup P_2 \rangle = A$, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ найдите геометрическое место точек $\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$, где a_i пробегает P_i, $i = 1, 2$.

6. Докажите, что отображение $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ является движением, и опишите его геометрически, если

$$Df = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(O) = (1,0,-1).$$

II вариант

1. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор в конечномерном эрмитовом пространстве, $f, g \in \mathbb{C}[x]$, $(f,g) = 1$. Докажите, что ядро $\operatorname{Ker}(fg)(\mathcal{A})$ есть ортогональная прямая сумма ядер $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$ и $\operatorname{Ker} g(\mathcal{A})$.

2. Пусть $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ — эрмитово пространство со скалярным произведением $(A,B) = \operatorname{tr}(A\overline{B}^t)$. Для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ определим оператор $\mathcal{L}_A\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $X \mapsto AX$. **а)** Найдите оператор, сопряжённый оператору $\mathcal{L}_A$. **б)** Найдите все матрицы A, для которых оператор $\mathcal{L}_A$ является унитарным.

3. Найдите хотя бы одну симметричную матрицу X, для которой $X^2 = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}$.

4. Найдите такие матрицы C и U, что

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = CU,$$

что C — симметричная положительно определённая матрица, U — ортогональная матрица.

5. Пусть $P_1 = a_1 + L_1$ и $P_2 = a_2 + L_2$ — скрещивающиеся плоскости в аффинном пространстве A. Докажите, что для каждой точки $b \notin P_1 \cup P_2$ существует не более одной прямой, проходящей через b и пересекающей P_1 и P_2, причём такая прямая существует тогда и только тогда, когда $b \in \langle P_1 \cup P_2 \rangle$, $\overline{a_1 b}, \overline{a_2 b} \notin L_1 + L_2$.

6. Докажите, что отображение $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ является движением, и опишите его геометрически, если

$$Df = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(O) = (-3,1,2).$$

I вариант

1. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в $\mathbb{R}^3$, e^1, e^2, e^3 — дуальный базис в $(\mathbb{R}^3)^*$. Определим тензоры Вычислите значение тензора $\mathrm{Alt}\big((\mathrm{Alt}(e_1 \otimes e_2 \otimes e_2)) \otimes e_3\big)$ на четвёрке ковекторов $(e^1 + 2e^3,\ -2e^2,\ 3e^1, e^2 - e^3)$.

2. Является ли тензор с координатами $t^{ij}_k = \delta_{ij}\delta_{jk}$ разложимым?

3. Скалярное произведение задано матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Проведите опускание и подъём индексов у тензора $(e^1 + e^2) \otimes (e_3 + e_4) - (e^1 + e^3) \otimes e_3$.

4. Найдите жорданову форму матрицы $\Lambda^2(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

II вариант

1. Пусть e_1, e_2, e_3 — базис в $\mathbb{R}^3$, e^1, e^2, e^3 — дуальный базис в $(\mathbb{R}^3)^*$. Определим тензоры Вычислите значение тензора $\mathrm{Sym}\big(e_1 \otimes (\mathrm{Sym}(e_2 \otimes e_2 \otimes e_3)\big)$ на четвёрке векторов $(-2e_2,\ 3e_1 + e^2,\ e_2 + e_3, e^1 - e^3)$.

2. Является ли тензор с координатами $t^i_{jk} = \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{k1}$ разложимым?

3. Скалярное произведение задано матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Проведите опускание и подъём индексов у тензора с координатами $t^i_j = i\delta_{ij}$.

4. Найдите жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I вариант

1. Выпишите все возможные жордановы формы матрицы $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, если известно, что $A^{2015} = A^t$.

2. Пусть оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем и U — его инвариантное подпространство. Докажите, что оператор $\mathcal{A}|_U$ диагонализируем.

3. При каждом $n \in \mathbb{N}$ найдите $\min\{\dim \mathrm{Cent}\, A \mid A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\}$.

4. Найдите канонический базис и матрицу в нём ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

II вариант

1. Выпишите все возможные жордановы формы матрицы $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, если известно, что $A^{100} = -A^t$.

2. Докажите, что всякое инвариантное подпространство любого оператора в $\mathbb{C}^n$ равно сумме своих пересечений с корневыми подпространствами этого оператора.

3. Докажите, что для любого оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ число $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств конечно в точности тогда, когда $\mathrm{Cent}(\mathcal{A}) = \mathbb{C}[\mathcal{A}]$ (т. е. с $\mathcal{A}$ коммутируют только многочлены от $\mathcal{A}$).

4. Найдите канонический базис и матрицу в нём ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.