ТОПОЛОГИЧЕСКИ ПЕРВИЧНЫЙ РАДИКАЛ КОЛЕЦ

В.В. Тензина
viktoria.tenzina@math.msu.ru

УДК 512.556, 512.552.12, 512.552.12, 512.552.2

В данной работе определяется топологически первичный радикал. Рассматриваются различные свойства этого радикала и как он соотносится с другими наднильпотентными радикалами. В частности, он строго больше топологического радикала Бэра, не совпадает с пересечением всех замкнутых первичных идеалов, лежит в топологическом радикале Джекобсона, является специальным радикалом, но при этом может содержать единицу.

Ключевые слова: топологические кольца, первичные кольца

В теории дискретних колец очень большое значение имеет понятие первичного идеала. Каждое первичное кольцо не содержит никаких ненулевых нильпотентных идеалов, но существуют первичные кольца, содержащие Σ-нильпотентные идеалы (идеал I топологического кольца R называется Σ-нильпотентным, если для любой окрестности нуля V найдётся натуральное n такое, что $I^n \subseteq V$).

Определение. *Будем говорить, что топологическое кольцо R топологически первично справа (слева), если для любого ненулевого идеала A кольца R найдется окрестность нуля V в R такая, что для любого идеала B справедливо, что V не содержит идеал AB (BA).*

Лемма 1. *Топологически первичное справа (слева) кольцо не содержит Σ-нильпотентных идеалов.*

Предложение 1. *Кольцо R топологически первично слева (справа) тогда и только тогда, когда оно первично и существует окрестность нуля V в R, не содержащая никакого ненулевого двустороннего идеала.*

Последнее утверждение характеризует топологически первичные кольца и показывает, что топологическая первичность слева и справа совпадают. Назовём такие кольца просто *топологически первичными.*

Заметим, что существуют первичные кольца, не являющиеся топологически первичными.

Естественно определить *топологически первичный идеал*, как замкнутый первичный идеал, фактор по которому с индуцированной топологией обладает окрестностью нуля, не содержащей никакого ненулевого идеала, то есть является топологически первичным кольцом. Очевидно, что каждый топологически первичный идеал является замкнутым первичным идеалом.

Для топологического кольца R определим идеал $top\mathcal{B}(R)$ как пересечение всех топологически первичных идеалов. Назовём такой идеал *топологически первичным радикалом.* Далее будет показано, что это действительно радикал в классе всех топологических колец.

Предложение 2. *Пусть R — кольцо с системой окрестностей из идеалов, тогда идеал $top\mathcal{B}(R)$ замкнут и является пересечением множества всех открытых первичных идеалов.*

Последнее утверждение обобщает тот факт, что топологически первичный радикал совпадает с первичным радикалом в классе дискретных колец.

В работе [1] для каждого топологического кольца R определяется топологически первичный квазирадикал $\mu(R)$ как пересечение всех замкнутых идеалов кольца R. Ясно, что $top\mathcal{B}(R) \supseteq \mu(R)$. Строится пример, показывающий, что $top\mathcal{B}(R) \neq \mu(R)$

В статье [2] введено понятие топологического радикала Бэра как нижнего радикала (одно из определений $\mathcal{L}(R)$ как пересечение всех замкнутых идеалов, не содержащих Σ-нильпотентных идеалов).

В работе [3] определяется топологически примитивное кольцо, как кольцо, обладающее точным топологически неприводимым левым модулем (здесь и далее все модули левые), то есть модулем без собственных замкнутых подмодулей. Там же для всякого топологического кольца

Тензина Виктория Васильевна, к.ф.-м.н., в.н.с., МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет (Москва, Россия)

R определяется топологический радикал Джекобсона $top\, J(R)$, как множество всех элементов кольца, аннулирующих всякий топологически неприводимый модуль над этим же кольцом.

Лемма 2. *Топологически примитивное кольцо топологически первично.*

Теорема 1. *Для любого топологического кольца выполняется:*

$$\mathcal{L}(R) \subseteq top\, \mathcal{B}(R) \subseteq top\, J(R)$$

В работе строится кольцо R, показывающее, что $\mathcal{L}(R) \neq top\, \mathcal{B}(R)$.

Пусть R — топологическое кольцо. Согласно работе [2] последовательность $b_1, b_2, \ldots$ элементов кольца R называется *m-последовательностью*, если для любого натурального i выполняется $b_{i+1} \in (b_i)^2_R$. Последовательность $b_1, b_2, \ldots$ называется *исчезающей*, если для любой окрестности V нуля из R существует такое натуральное число n, что $b_n \in V$. В этой же работе [2] через $\mathfrak{M}(R)$ обозначено множество всех таких элементов $b \in R$, что любая m-последовательность, начинающаяся с b, является исчезающей. Доказывается, что множество $\mathfrak{M}(R)$ является идеалом. Далее автор, во-первых, показывает, что если R — кольцо с полной системой идеальных окрестностей нуля, то $\mathcal{L}(R) \subseteq \mathfrak{M}(R)$, а, во-вторых, приводит пример, когда равенство не достигается в том же самом классе колец. Для топологически первичного радикала справедливо равенство.

Теорема 2. *Пусть R — кольцо с системой окрестностей из идеалов, тогда $top\, \mathcal{B}(R) = \mathfrak{M}(R)$.*

Определение[4]. *Множество $\mathcal{P}$ топологических колец класса $\mathcal{K}$ называется специальным классом топологических колец, если выполняются следующие условия:*

1) Любое кольцо из $\mathcal{P}$ первично.

2) Если $R \in \mathcal{P}$ и A — идеал топологического кольца R, то $A \in \mathcal{P}$.

3) Если $A \in \mathcal{P}$ и A — идеал топологического кольца $R \in \mathcal{K}$, тогда фактор-кольцо $R/\{r \in R : r \cdot A = A \cdot r = \{0\}\} \in \mathcal{P}$.

4) Пусть $R \in \mathcal{P}$ и $\bar{R} \in \mathcal{K}$. Если топологическое кольцо R — открытый изоморфный образ топологического кольца R, то $\bar{R} \in \mathcal{P}$.

Теорема 3. *Множество всех топологически первичных колец является специальным классом колец.*

Следствие. *В классе всех топологических колец свойство кольца R совпадать с $top\, \mathcal{B}(R)$ является радикальным свойством.*

Из специальности радикала $top\, \mathcal{B}(R)$ следует, что этот радикал наследственен. Заметим, что топологический радикал Бэра таковым не является. Из существования кольца с единицей, радикального в смысле топологического радикала Бэра следует, что тологически первичный радикал также может содержать единицу.

Литература

1. *Базигаран Б. Главацкий С.Т. Михалёв А.В.* Топологический первичный квазирадикал // Фундамент. и прикл. матем., **10**:3 (2004), 11-22.

2. *Арнаутов В.И* Топологический радикал Бэра и разложение кольца // Сибирский математический журнал., **5**:6 (1964) 1209-1227.

3. *Главацкий С.Т. Михалёв А.В. Тензина В.В.* Топологический радикал Джекобсона колец, часть I // Фундамент. и прикл. матем., **16**:8 (2010), 49-68.

4. *Водинчар М.И.* Наследственные и специальные радикалы в топологических кольцах // Математические исследования, **4**:2 (1969), 29-50.