Граф взаимной строгой ортогональности Биркгофа-Джеймса алгебры $\mathbb{B}(H)$

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Жилина Светлана Александровна

Ортогональность Биркгофа-Джеймса – естественное продолжение понятия ортогональности в гильбертовом пространстве на произвольное нормированное пространство X над полем $\mathbb{F}$. Она определяется следующим образом ([6]):

Элемент $x \in X$ *ортогонален в смысле Биркгофа-Джеймса* элементу $y \in X$, если $\|x + y\lambda\| \geq \|x\|$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Обозначение: $x \perp_{BJ} y$.

Понятие строгой ортогональности Биркгофа-Джеймса для произвольной C^*-алгебры $\mathcal{A}$ было введено в работе [2]. Она учитывает не только линейную, но и алгебраическую структуру $\mathcal{A}$.

Элемент $a \in \mathcal{A}$ *строго ортогонален в смысле Биркгофа-Джеймса* элементу $b \in \mathcal{A}$, если $\|a + bc\| \geq \|a\|$ для всех $c \in \mathcal{A}$. Обозначение: $a \perp^s_{BJ} b$.

В работах [2 - 4] изучены различные свойства этих ортогональностей. В частности, как показано в [4], строгая ортогональность Биркгофа-Джеймса симметрична только при $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$. Таким образом, имеет смысл ввести следующее определение:

Элементы $a, b \in \mathcal{A}$ *взаимно строго ортогональны в смысле Биркгофа-Джеймса*, если $a \perp^s_{BJ} b$ and $b \perp^s_{BJ} a$. Обозначение: $a \perp\!\!\!\perp^s_{BJ} b$.

Понятие графа ортогональности ассоциативной алгебры было впервые введено в работе [5]. Ниже приведено определение графа ортогональности произвольной C^*-алгебры $\mathcal{A}$, порождённого отношением $\perp\!\!\!\perp^s_{BJ}$.

Графом $\Gamma(\mathcal{A})$ *взаимной строгой ортогональности Биркгофа-Джеймса* называют граф, множество вершин которого – $V(\Gamma(\mathcal{A})) = \{[a] = \mathbb{C}^* a \mid a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}\}$, причём вершины $[a], [b] \in V(\Gamma(\mathcal{A}))$ соединены ребром, если и только если $a \perp\!\!\!\perp^s_{BJ} b$. Мы отождествляем вершины с их представителями, то есть вместо $[a]$ пишем a.

Можно проверить, что $\Gamma(\mathcal{A})$ не содержит петель, а любой обратимый справа элемент является изолированной вершиной. Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ – множество ненулевых необратимых справа элементов $\mathcal{A}$. Обозначим за $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathcal{A})$ подграф $\Gamma(\mathcal{A})$ на множестве вершин $\mathcal{S}$.

Целью данной работы является изучение компонент связности $\Gamma(\mathbb{B}(H))$, где $\mathbb{B}(H)$ – алгебра непрерывных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве H. Основной результат представлен в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $2 \leq \dim H \leq \infty$.

(1) Изолированные вершины в $\Gamma(\mathbb{B}(H))$ *– это в точности обратимые справа операторы.*

(2) Если $\dim H = 2$, *то* $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{B}(H))$ *несвязен, а множества вершин его компонент связности принимают вид*

$$\mathcal{S}_x = \{A \in \mathbb{B}(H) : \operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{x\} \text{ или } \operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{x\}^\perp\}$$

для ненулевых $x \in H$. *Диаметр каждой компоненты равен* 2.

(3) Если $\dim H = 3$, *то* $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{B}(H))$ *связен, и его диаметр равен* 4.

(4) Если $4 \leq \dim H \leq \infty$, *то* $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{B}(H))$ *связен, и его диаметр равен* 3.

В доказательстве теоремы используется критерий строгой ортогональности элементов $\mathbb{B}(H)$, см. [2, предложение 2.8]. Кроме того, для доказательства бесконечномерного случая применяются следующие две леммы.

Лемма 2. *Пусть* (e_k) *и* (f_k) *– две ортонормированные последовательности в* H*. Тогда существуют такие подпоследовательности* $(e_{k_l})_l$ *и* $(f_{k_j})_j$*, что*

$$e_{k_1} = e_1, \quad f_{k_1} = f_1 \quad \text{и} \quad \lim_{l\to\infty} P_{V_f}(e_{k_l}) = 0,$$

где P_{V_f} *– ортогональная проекция на* $V_f = \overline{\operatorname{span}\{f_{k_j} : j \in \mathbb{N}\}}$.

Лемма 3. *Пусть* $\dim H = \infty$*,* $A \in \mathbb{B}(H)$ *необратим справа. Тогда существует ортонормированная последовательность* $(f_j) \subset H$*, удовлетворяющая следующему свойству: если* $(f_{j_m})_m$ *– такая подпоследовательность* (f_j)*, что* $f_{j_1} = f_1$*, то для ортогональной проекции* P *на подпространство* $\overline{\operatorname{span}\{f_{j_m} : m \in \mathbb{N}\}}$ *будет выполнено* $A \perp^s_{BJ} P$.

Доклад основан на работе [1].

Источники и литература

1. Lj. Arambašić, A. E. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. A. Zhilina, *Orthograph related to mutual strong Birkhoff–James orthogonality in* C^**-algebras*, Preprint.

2. Lj. Arambašić, R. Rajić, *A strong version of the Birkhoff–James orthogonality in Hilbert* C^**-modules*, Ann. Funct. Anal. **5**, 1 (2014), 109–120.

3. Lj. Arambašić and R. Rajić, *On three concepts of orthogonality in Hilbert* C^**-modules*, Linear Multilinear A. **63**, 7 (2015), 1485–1500.

4. Lj. Arambašić, R. Rajić, *On symmetry of the (strong) Birkhoff–James orthogonality in Hilbert* C^**-modules*, Ann. Funct. Anal. **7**, 1 (2016), 17–23.

5. Б.Р. Бахадлы, А.Э. Гутерман, О.В. Маркова, *Графы, определенные ортогональностью*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **428** (2014), 49–80; Англ. перевод опубликован в J. Math. Sci. (N. Y.) **207**, 5 (2015), 698–717.

6. R.C. James, *Inner products in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 559–566.