

Группа 109 (2016/17). Материалы к семинарам по линейной алгебре.

Линейным отображением векторного пространства V над полем $\mathbb{F}$ в векторное пространство W над тем же полем $\mathbb{F}$ называется отображение $\varphi : V \rightarrow W$, удовлетворяющее условию линейности

$$\varphi(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \varphi(\mathbf{x}) + \beta \varphi(\mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Отдельно можно рассматривать свойство аддитивности отображения:

$$\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

и свойство однородности:

$$\varphi(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \varphi(\mathbf{x})$$

для всех $\mathbf{x} \in V$ и $\alpha \in \mathbb{F}$.

Вопросы.

1. Приведите примеры отображений:

- а) неаддитивных и неоднородных; б) аддитивных и неоднородных; в) неаддитивных и однородных.

Задачи.

- Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ — два базиса в линейном пространстве V , обозначим через C матрицу перехода от $\{e_i\}$ к $\{e'_i\}$. Пусть $e^1, \dots, e^n$ и $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n$ — дуальные к $\{e_i\}$ и $\{e'_i\}$, соответственно, базисы V^* . Обозначим через D матрицу перехода от $\{e^i\}$ к $\{\tilde{e}^i\}$. Докажите, что $D = (C^T)^{-1} (= (C^{-1})^T)$.
- В трёхмерном линейном пространстве дана линейная функция $f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = 4x_1 - 6x_2 + 3x_3$. Найти координаты функции f относительно базиса, дуального к базису $e'_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3, e'_2 = 2e_1 + e_2 - 2e_3, e'_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$.
- Пусть линейное отображение $\varphi : V \rightarrow W$ в базисах (e_1, e_2, e_3) пространства V и (f_1, f_2) пространства W имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу отображения φ в базисах $(e_2 + 3e_3, e_1 + e_2 + 3e_3, 2e_3)$ и $(2f_1 + f_2, 5f_1 + 3f_2)$.
- Пусть оператор $\mathcal{A}$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_7$ пространства $\mathbb{C}^7$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -11 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -18 & 2 & 5 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -13 & 5 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 16 & 6 & -9 & -29 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- а) Найдите жорданову нормальную форму матрицы оператора $\mathcal{A}$;
б) Найдите базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид, найденный в пункте а);
в) Установите, подобна ли матрица A матрице

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -9 & -8 & -10 & -9 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -6 & -11 & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{21}{2} & 11 & 16 & \frac{41}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 11 & 1 & 0 \\ 11 & 33 & 28 & 32 & 19 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Пусть оператор $\mathcal{A}$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_{10}$ пространства $\mathbb{C}^{10}$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -5 & -32 & -6 & 3 \\ -11 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & -5 & -32 & -6 & 3 \\ -18 & 2 & 3 & 0 & 8 & 0 & -10 & -64 & -12 & 6 \\ -9 & 1 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & -34 & -6 & 3 \\ -9 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -6 & -32 & -6 & 3 \\ -13 & 5 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- а) Найдите жорданову нормальную форму матрицы оператора $\mathcal{A}$;
- б) Найдите базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид, найденный в пункте а);
- в) Найдите минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$;
- г) Найдите $A^{23} + 2A^{22} + A^{21}$.