Группа 111 (2017/18). Материалы к семинарам по линейной алгебре.

Задачи.

1. Пусть оператор $\mathcal{A}$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_7$ пространства $\mathbb{C}^7$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -11 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -18 & 2 & 5 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -13 & 5 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 16 & 6 & -9 & -29 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите жорданову нормальную форму матрицы оператора $\mathcal{A}$;

б) Найдите базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид, найденный в пункте а);
в) Установите, подобна ли матрица A матрице

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -9 & -8 & -10 & -9 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -6 & -11 & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & \frac{21}{2} & 11 & 16 & \frac{41}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -3 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 6 & 11 & 1 & 0 \\ 11 & 33 & 28 & 32 & 19 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть оператор $\mathcal{A}$ в некотором базисе $e_1, \dots, e_{10}$ пространства $\mathbb{C}^{10}$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -5 & -32 & -6 & 3 \\ -11 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & -5 & -32 & -6 & 3 \\ -18 & 2 & 3 & 0 & 8 & 0 & -10 & -64 & -12 & 6 \\ -9 & 1 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & -34 & -6 & 3 \\ -9 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -6 & -32 & -6 & 3 \\ -13 & 5 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите жорданову нормальную форму матрицы оператора $\mathcal{A}$;

б) Найдите базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид, найденный в пункте а);

в) Найдите минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$;

г) Найдите $A^{23} + 2A^{22} + A^{21}$.

3. Решите уравнение $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Пусть линейный оператор в базисе $e_1, \dots, e_n$ имеет матрицу $J_n(\lambda)$ (одна жорданова клетка). Докажите, что все его нетривиальные инвариантные подпространства имеют вид $\langle e_1, e_2, \dots, e_j \rangle$, где $j = 1, \dots, n$.

5. Пусть линейный оператор в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_{n-m}(\lambda) \end{pmatrix}$ (две жордановых клетки с одним собственным числома). Опишите инвариантные пространства данного оператора.

6. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на $\mathbb{C}^n$ и известно разбиение пространства в прямую сумму корневых пространств данного оператора, т.е. $\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_k)$. Докажите, что любое инвариантное пространство U оператора $\mathcal{A}$ представляется в виде прямой суммы $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, где U_t — проекция U на $V(\lambda_t)$ (под проекцией одного пространство на другое понимается множество проекций всех векторов: $\mathrm{pr}_W(U) = \{\mathrm{pr}_W(u) | u \in U\}$). Указание: используйте, что $f(\mathcal{A})U \subseteq U$ для любого многочлена $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.