Неотрицательные образующие матричных алгебр с точностью до подобия

Колегов Никита Антонович

Научный руководитель: Маркова Ольга Викторовна

Пусть $M_n(\mathbb{R})$ — алгебра вещественных $n \times n$ матриц, частично упорядоченная стандартным образом: $A \geq O \Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} : a_{ij} \geq 0$. Подалгебра $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{R})$ называется неотрицательно (положительно) порожденной с точностью до подобия, если $\exists C \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $C^{-1}\mathcal{A}C$ порождается некоторыми своими неотрицательными (положительными) матрицами.

Исследование данных алгебр интересно в контексте следущих проблем. Во-первых, поиск критерия, показывающего, когда заданная матрица подобна некоторой неотрицательной. Важным частным случаем является так называемая обратная спектральная задача для неотрицательных матриц [2]. Во-вторых, это проблема описания алгебр, порожденных неотрицательными матрицами (см., например, [1, 3]).

На докладе будут представлены следующие новые результаты. Сначала критерий того, когда алгебра порождается положительными матрицами с точностью до подобия.

Теорема 1. *Рассмотрим матричную алгебру $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{R})$, $E_n \in \mathcal{A}$. Следующие условия эквивалентны.*

1. *$\mathcal{A}$ положительно порождена с точностью до подобия.*

2. *$\mathcal{A}$ содержит идемпотентную матрицу ранга 1.*

3. *Существует $C \in M_n(\mathbb{R})$, такая что алгебра $\widehat{\mathcal{A}} = C^{-1}\mathcal{A}C$ имеет один из следующих типов.*

   (a) $\widehat{\mathcal{A}} = M_n(\mathbb{R})$.

   (b) $\widehat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} M_k(\mathbb{R}) & * \\ O & \mathcal{B} \end{pmatrix}$, $E_{11} \in \widehat{\mathcal{A}}$.

   (c) $\widehat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathcal{B} & * \\ O & M_k(\mathbb{R}) \end{pmatrix}$, $E_{ll} \in \widehat{\mathcal{A}}$, $l = n - k + 1$.

   (d) $\widehat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & * & * \\ O & M_k(\mathbb{R}) & * \\ O & O & \mathcal{B}_2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_1 \subseteq M_p(\mathbb{R})$, $E_{ll} \in \widehat{\mathcal{A}}$, $l = p + 1$.

Будет рассмотрено применение этого критерия к простым, полупростым и коммутативным матричным алгебрам.

Также получен ряд результатов, касающихся неотрицательно порожденных матричных алгебр с точностью до подобия.

Теорема 2. *Рассмотрим матричные алгебры $\mathcal{A} \subseteq M_{k_1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} \subseteq M_{k_2}(\mathbb{R})$, $E_{k_1} \in \mathcal{A}$, $E_{k_2} \in \mathcal{B}$. Пусть хотя бы одна из них обладает (минимальной)* *неотрицательной или положительной порождающей системой с точностью до подобия. Тогда алгебра $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ имеет образующие с такими же свойствами.*

В качестве следствий можно получить ряд достаточных условий неотрицательной порожденности с точностью до подобия.

Следствие 1. *Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\sigma(A) \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$. Тогда централизатор $C(A)$ является неотрицательно порожденной алгеброй с точностью до подобия.*

Следствие 2. *Рассмотрим матричную алгебру $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{R})$, $E_n \in \mathcal{A}$. Пусть центр $\mathcal{A}$ содержит матрицу, обладающую вещественным собственным значением геометрической кратности* 1. *Тогда $\mathcal{A}$ неотрицательно порождена с точностью до подобия.*

Кроме того, было рассмотрено обобщение вещественной обратной спектральной задачи на случай однопорожденных алгебр.

Задача 1. *Найти условия на $\Lambda \in \mathbb{C}^n$, при которых существуют матрица B и множество $\Phi \subseteq M_n(\mathbb{R})$ такие, что* 1) $\forall A \in \Phi : A \geq O$ $(A > O)$, 2) $\langle B \rangle_{Alg} = \langle \Phi \rangle_{Alg}$, 3) Λ *представляет спектр B с учетом алгебраических кратностей.*

Будет представлено решение этой задачи для случая $|\Phi| = 1$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Марковой О.В. за полезные обсуждения и внимание к работе. Исследования поддержаны фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант №19-8-2-33-1.

Источники и литература

1) Drnovšek R. On algebras generated by positive operators. // Positivity., 2018. Vol. 22. pp. 815-828.

2) Egleston P. D., Lenker T. D., Narayan S. K. The nonnegative inverse eigenvalue problem // Linear Algebra Appl., 2004. Vol. 379. pp. 475–490.

3) Kandić M., Šivic K. On the dimension of the algebra generated by two positive semi-commuting matrices. // Linear Algebra Appl., 2017. Vol. 512. pp. 136–161.

4) Minc H. Linear Transformations on Nonnegative Matrices. // Linear Algebra Appl., 1974. Vol. 9. pp. 149-153.