Достижимые значения длин квадратичных алгебр

Кудрявцев Дмитрий Константинович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: kdk97@rambler.ru
Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Систематическое изучение длины алгебры как ее фундаментального инварианта началось в конце 20 века с работ [1, 2], где изучаются свойства длины для ассоциативных, в том числе матричных, алгебр. В частности, работа [2] рассматривает связь длины с размерностью алгебры и максимальной степенью минимальных многочленов для ее элементов. Изучение подобной связи для неассоциативного случая начато в работе [3].

Рассмотрим конечномерную не обязательно ассоциативную алгебру A с единицей над полем $\mathbb{F}$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечный набор ее элементов. *Словом длины k* для этой системы называется произведение $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$ с некоторым заданным порядком выполнения умножений, где $i_m \in \{1, \ldots, n\}$.

Обозначим через $L^k(S)$ линейную оболочку над $\mathbb{F}$ всех слов длины не более k. Говорят, что система элементов $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *порождает алгебру A*, если существует k, такое что $L^k(S)$ совпадает с алгеброй A. Самое маленькое такое k называется *длиной* данной системы.

Длиной алгебры A называется максимальная длина среди порождающих систем алгебры A.

Алгебра A с единицей называется *квадратичной*, если для любого $a \in A$ верно, что $1, a, a^2$ линейно зависимы над $\mathbb{F}$. Важным частным случаем квадратичных алгебр являются локально-комплексные алгебры, подробно описанные в работе [4].

Обозначим последовательность чисел Фибоначчи через $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, \ldots$.

Разработанный автором доклада общий метод оценки длин алгебр строится на понятии *характеристической последовательности*. Теорема ниже, доказанная в работе [5], является результатом приложения этого метода.

Определение. Рассмотрим алгебру A над полем $\mathbb{F}$ размерности $\dim A = n$ и ее порождающее множество S. Под характеристической последовательностью S в A мы понимаем неубывающую целочисленную последовательность $(m_0, m_1, \ldots, m_N)$, построенную следующим образом:

1. $m_0 = 0$.
2. Для $s_1 = \dim \mathrm{L}_1(S) - 1$, мы полагаем $m_1 = \ldots = m_{s_1} = 1$.
3. Если $m_0, \ldots, m_r$ уже построены, а множества $\mathrm{L}_1(S), \ldots \mathrm{L}_{k-1}(S)$ уже рассмотрены, то мы индуктивно продолжаем процесс следующим образом: для $s_k = \dim \mathrm{L}_k(S) - \dim \mathrm{L}_{k-1}(S)$ положим $m_{r+1} = \ldots = m_{r+s_k} = k$.

Теорема. Пусть $M = (m_0, \dots, m_{n-1})$, где $n \geq 2$ - конечная целочисленная последовательность, удовлетворяющая следующим условиям.

(i) $m_0 = 0$.

(ii) Существует такой индекс $k_1,\ 1 \leq k_1 \leq n-1$, что $m_1 = \ldots = m_{k_1} = 1$ и при $k_1 < n-1$ верно $m_{k_1+1} > 1$.

(iii) Последовательность $(m_0, \dots, m_{n-1})$ не убывает.

(iv) Если $k_1 < n-1$, то существуют функции $t_1(k)$ и $t_2(k)$, отображающие $\{k_1+1, \dots, n-1\}$ в $\{1, \dots, n-1\}$, и удовлетворяющие двум свойствам:

  a. Для всех k, $k_1 < k < n$, выполнено равенство $m_{t_1(k)} + m_{t_2(k)} = m_k$ и неравенства $t_1(k) < t_2(k) < k$,

  b. Для всех пар $h_1, h_2,\ k_1 < h_1 < h_2 < n$, выполнено по крайней мере одно из неравенств $t_1(h_1) < t_1(h_2)$ или $t_2(h_1) < t_2(h_2)$.

Тогда существует квадратичная алгебра A над произвольным полем $\mathbb{F}$ с порождающим множеством S для которой выполнено

1. $\dim A = n$.
2. Характеристическая последовательность S совпадает с $(m_0, \dots, m_{n-1})$.
3. Длина A равна m_{n-1}.

Более того, для любой квадратичной алгебры и произвольного порождающего множества оной, характеристическая последовательность этого множества удовлетворяет свойствам (i)-(iv).

Утверждения ниже являются фокусом доклада и итогом использования общей теоремы для разрешения вопроса достижимости значений длины квадратичных алгебр фиксированной размерности.

Утверждение 1. Для квадратичной неассоциативной алгебры A размерности n реализуются все значения длины, лежащие между F_{n-2} и F_{n-1}, имеющие две единицы в фибоначчиевой системе исчисления.

Утверждение 2. Для квадратичной неассоциативной алгебры A размерности n реализуются все значения длины, лежащие между F_{n-2} и F_{n-1}, имеющие три единицы в фибоначчиевой системе исчисления и сегмент "1001".

Источники и литература

1. Paz, A. An application of the Cayley-Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables, Linear Multilinear Algebra, 1984, Vol.15, pp. 161-170

2. Papacena, C.J. An Upper Bound for the Length of a Finite-Dimensional Algebra, Journal of Algebra, 1997, Vol. 197, pp. 535-545

3. Guterman, A. E., Kudryavtsev, D. K. Upper bounds for the length of non-associative algebras, Journal of Algebra, 2020, Vol. 544, pp. 483-497

4. Bresar, M., Semrl, P., Spenko, S. On locally complex algebras and low-dimensional Cayley-Dickson algebras, Journal of Algebra, 2011, Vol. 327, pp. 107-125

5. Guterman, A. E., Kudryavtsev, D. K. Length function and characteristic sequences of quadratic algebras, preprint