*Конференция «Ломоносов 2020»*

Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

# Инволюции полной линейной группы порядка 2 над кольцом без кручения ранга 1

**Научный руководитель — Тимошенко Егор Александрович**

***Гайдак Виолетта Александровна***

*Аспирант*

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Механико-математический факультет, Томск, Россия

*E-mail: stef.germ94@mail.ru*

Одним из важных классов абелевых групп без кручения являются вполне разложимые группы. Себельдиным [1] был решён вопрос об определяемости вполне разложимой группы её кольцом эндоморфизмов. Впоследствии появился цикл работ Вильданова [2, 3, 4], посвящённый вопросам определяемости вполне разложимой группы конечного ранга её группой автоморфизмов. Большинство полученных в этом цикле результатов было доказано в предположении, что все рассматриваемые вполне разложимые группы 2-делимы. Первым шагом к снятию требования 2-делимости вполне разложимой группы является получение критерия сопряжённости инволюций полной линейной группы $GL_2$ над произвольным подкольцом поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Как обычно, обозначаем через $GL_2(R)$ группу обратимых $(2\times 2)$-матриц с элементами из $R$ (здесь и далее $R$ есть подкольцо поля $\mathbb{Q}$). Ясно, что множество $ML_2(R) \subset GL_2(R)$ всех матриц с определителем $\pm 1$ является подгруппой в $GL_2(R)$. Непосредственно проверяется, что множество всех нецентральных инволюций каждой из групп $GL_2(R)$ и $ML_2(R)$ совпадает с множеством матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b, c \in R \text{ и } a^2 + bc = 1. \tag{1}$$

Для инволюций $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ введём обозначения $J$ и $I$ соответственно.

**Теорема 1.** *Всякая инволюция $A$ вида* (1)*, для которой $b, c \in 2R$, сопряжена с $J$ в $ML_2(R)$.*

В работе Вильданова [2] отмечался следующий факт: если $2R = R$, то все нецентральные инволюции группы $GL_2(R)$ сопряжены в этой группе с $J$ (а значит, и между собой). Из теоремы 1 следует, что данный факт остаётся верным и в том случае, когда речь идёт о сопряжённости инволюций в группе $ML_2(R)$.

Справедливо также

**Следствие 2.** *Пусть* $2R \neq R$. *Для инволюции* $A$ *вида* (1) *эквивалентны условия*:

1) *матрицы* $A$ *и* $J$ *сопряжены в* $GL_2(R)$;

2) *матрицы* $A$ *и* $J$ *сопряжены в* $ML_2(R)$;

3) $b, c \in 2R$.

**Теорема 3.** *Всякая инволюция* $A$ *вида* (1), *для которой* $b \notin 2R$ *или* $c \notin 2R$, *сопряжена с* $I$ *в* $ML_2(R)$.

**Следствие 4.** *Пусть* $2R \neq R$. *Для инволюции* $A$ *вида* (1) *эквивалентны условия*:

1) *матрицы* $A$ *и* $I$ *сопряжены в* $GL_2(R)$;

2) *матрицы* $A$ *и* $I$ *сопряжены в* $ML_2(R)$;

3) $b \notin 2R$ *или* $c \notin 2R$.

Таким образом, если $2R \neq R$, то всякая нецентральная инволюция с элементами из $R$ сопряжена в $GL_2(R)$ и в $ML_2(R)$ ровно с одной из инволюций $J$ и $I$.

**Теорема 5.** *Если* $C$ *и* $D$ – *инволюции группы* $GL_2(R)$ *и* $CD = -DC$, *то найдётся внутренний автоморфизм этой группы, переводящий двухэлементное множество* $\{C, D\}$ *в множество* $\{J, I\}$.

Утверждение теоремы 5 перестанет быть верным, если заменить в нём группу $GL_2(R)$ её подгруппой $ML_2(R)$: можно указать подкольцо $R$ поля $\mathbb{Q}$ и антикоммутирующие инволюции $C$ и $D$ из $ML_2(R)$, для которых не существует внутреннего автоморфизма группы $ML_2(R)$, переводящего $\{C, D\}$ в множество $\{J, I\}$.

**Пример.** Пусть $pR = R \neq 2R$ (здесь $p$ – простое число, $R \subset \mathbb{Q}$). Тогда

$$D = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1/p & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

– антикоммутирующие инволюции группы $ML_2(R)$, но никакой внутренний автоморфизм этой группы не переводит пару $\{J, D\}$ в пару $\{J, I\}$.

# Список литературы


[1] Себельдин А.М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Мат. заметки. 1972. Том 11, № 4. С. 403-408.

[2] Вильданов В.К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 3(1). С. 174-177.

[3] Vildanov V.K. Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2014. Vol. 197, No. 5. P. 590-594.

[4] Vildanov V.K. On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group // J. Math. Sci. (New York). 2018. Vol. 230, No. 3. P. 372-376.