Свойства графа, определенного множеством нулей многочлена

Максаев А.М.[1,2], *Промыслов В.В.*[1,3]
1 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия

В 2008 году Д. Андерсон и А. Бадави (см. [1]) ввели понятие регулярного графа кольца R с единицей. Для кольца квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$ в качестве вершин регулярного графа рассматривается множество $GL_n(\mathbb{F})$ всех невырожденных матриц, и две невырожденные матрицы A и B соединяются ребром, если их сумма $A+B$ вырождена. Обозначим этот граф через $\Gamma_n(\mathbb{F})$.

В статье [2] 2009 года математиками С. Акбари, М. Джамаали и С. Сеед Факхари было установлено, что если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, то кликовое число регулярного графа конечно:

$$\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k!\binom{n}{k}^2 - n! + 1.$$

Таким образом, размеры полных подграфов в $\Gamma_n(\mathbb{F})$ ограничены — в частности, $\Gamma_n(\mathbb{F})$ не содержит бесконечных полных подграфов. В связи с этим, тот же коллектив авторов поставил вопрос о том, является ли конечным хроматическое число графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$ (см. [3]).

В 2015 году Истван Томон (см. [4]) дал отрицательный ответ на этот вопрос, доказав, что при $n > 1$ для любого алгебраически замкнутого поля $\overline{\mathbb{F}}$ характеристики $p > 2$ выполнено:

$$\chi(\Gamma_n(\overline{\mathbb{F}})) = \infty.$$

Однако вопрос остался открытым для полей характеристики 0, в частности, для $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

При попытках исследования этого вопроса авторы рассмотрели обобщение графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$, зависящее от произвольного многочлена $p(x)$ от n переменных над $\mathbb{F}$ (здесь и далее мы полагаем, что $\mathbb{F}$ — поле с характеристикой, отличной от 2).

Определение 1. Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Обозначим через $V(p)$ множество нулей многочлена $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. множество $\{x \in \mathbb{F}^n \mid p(x) = 0\}$. *Регулярным* графом многочлена p называется

[2] *E-mail: artmak95@mail.ru*
[3] *E-mail: valentin.promyslov@gmail.com*;

граф $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ с множеством вершин $\mathbb{F}^n \setminus V(p)$ такой, что две произвольные различные точки $x, y \in \mathbb{F}^n \setminus V(p)$ соединены ребром, если и только если $p(\frac{x+y}{2}) = 0$ (то есть середина отрезка, соединяющего x и y, является нулем многочлена).

Регулярный граф кольца квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$ является графом $\Gamma_{\det(X)}(\mathbb{F}^{n^2})$, где $\det(X)$ — многочлен от n^2 переменных, образующих матрицу X.

По аналогии с теоремой 1 статьи [2], авторы установили следующую теорему о конечности кликового числа регулярного графа произвольного многочлена.

Теорема 2. Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — произвольный многочлен степени $k \geqslant 0$. Тогда $\omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^n))$ конечно и выполнена оценка $\omega(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) \leqslant \binom{n+k}{k}$.

Авторы также исследовали иные алгебраические и комбинаторные свойства регулярных графов многочлена, из которых хочется отметить следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — однородный многочлен и пусть $|\mathbb{F}| > 2\deg p$ (в частности, $\mathbb{F}$ может быть бесконечным). Тогда $\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ связен $\iff$ $\dim\langle V(p)\rangle = n$. Более того, этом случае $\operatorname{diam}(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)) \leqslant 2n$.

Для регулярного графа кольца квадратных матриц предыдущую теорему можно усилить.

Утверждение 4. Если $n \neq 1$, то $\Gamma_n(\mathbb{F})$ связен. Более того, диаметр этого графа равен 2.

Основной вопрос. Конечно или бесконечно число $\chi(\Gamma_p(\mathbb{F}^n)$ (в зависимости от многочлена p и поля $\mathbb{F}$)?

Данный вопрос оказывается сложным даже для многочленов второй степени — например, для многочлена $x^2 + y^2 - 1$, задающего окружность на евклидовой плоскости.

Гипотеза 5. $\chi(\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{R}^2)) < \infty$.

Впрочем, если данная гипотеза неверна, то следующее утверждение поможет разрешить исходный вопрос, заданный С. Акбари, М. Джамаали и С. Сеед Факхари.

Утверждение 6. Если $\chi(\Gamma_{x^2+y^2-1}(\mathbb{F}^2)) = \infty$, то $\chi(\Gamma_n(\mathbb{F})) = \infty$.

Благодарности

Авторы доклада выражают глубокую благодарность и признательность своим научным руководителям Александру Эмилевичу Гутерману и Александру Васильевичу Михалёву.

Источники и литература

[1] D.F. Anderson, A. Badawi, The total graph of a commutative ring, J. Algebra 320 (2008) 2706–2719.

[2] S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari, The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite, Linear Algebra and its Applications 431 (2009) 1715–1718.

[3] P. Cameron, Research problems from the BCC22, Discrete Math 311 (2011) 1074–1083.

[4] I. Tomon, On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras, Linear Algebra and its Applications 475 (2015) 154–162.