АННОТАЦИЯ ДОКЛАДА:

О СВОЙСТВАХ РЕШЕТКИ ω-ВЕЕРНЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Максаков Серафим Павлович
аспирант, физико-математический факультет БГУ имени И. Г. Петровского
Брянск, Россия, msp222@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Классом групп называется совокупность групп, которая с каждой своей группой содержит все группы, ей изоморфные. Среди классов групп важное место занимают формации — классы, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, введенные в рассмотрение В. Гашюцем в 1963 году [1]. Формациями являются, например, классы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{S}$ соответственно всех абелевых, нильпотентных, сверхразрешимых, разрешимых групп. В теории формаций большую роль играют функциональные методы. В [1] с помощью функций-спутников были построены локальные формации, являющиеся наиболее изученными в настоящее время (см., например, [2, 3]). В 1984 году Л.А. Шеметков, обобщая понятие локальной формации, ввел в рассмотрение понятие ω-локальной формации [4], где ω — непустое множество простых чисел. В 1999 году В.А. Ведерниковым был предложен новый подход к изучению классов групп, основанный на использовании, наряду с функциями-спутниками, еще одной функции — направления. На этом пути были построены ω-веерные формации [5], представляющие целый спектр новых видов формаций, одним из которых являются упомянутые выше ω-локальные формации.

Для изучения классов групп широко используются методы теории решеток. Важные результаты о решеточных свойствах локальных и ω-локальных формаций и классов Фиттинга получены А.Н. Скибой, Н.Н. Воробьевым, В.Г. Сафоновым, Н.Г. Жевновой и др. (см., например, [6, 7]). О.В. Камозиной установлены свойства решетки ω-веерных классов Фиттинга (см., например, [8]). В настоящее время актуальной является задача исследования решеточных свойств ω-веерных формаций групп. Решению данной задачи посвящено проведенное исследование. В теореме 1 доказано, что множество $\Theta_{\omega\delta}$ всех ω-веерных формаций конечных групп образует полную решетку. В теореме 2 получено свойство $\omega\delta$-индуктивности решетки $\Theta_{\mathfrak{E}}$ всех формаций конечных групп. Центральным результатом является теорема 3, в которой установлена модулярность решетки $\Theta_{\omega\delta}$.

Используемая терминология для групп и классов групп стандартна (см., например, [3]), определения и обозначения для ω-веерных формаций можно найти в [5], определения общей теории решеток взяты из [9], используемые определения решеточных свойств формаций содержатся в [6]. Приведем некоторые из них. Через $\mathfrak{E}$ обозначается класс всех конечных групп; ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел; $\mathfrak{E}_\omega$ — класс всех ω-групп; $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω-подгруппа группы G. Функция $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ формации групп $\}$, где $f(\omega') \neq \varnothing$, называется ωF-функцией (здесь символ ω' обозначает элемент, не принадлежащий ω); функция $\delta : \mathbb{P} \to \{$ непустые формации Фиттинга $\}$ называется $\mathbb{P}FR$-функцией. Формация $\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$ называется ω-веерной формацией с направлением δ (коротко, $\omega\delta$-веерной формацией) и с ω-спутником f, обозначается $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ [5]. Направление δ называется bp-направлением, если δ — b-направление, т.е. $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$; и δ — p-направление, т.е. $\mathfrak{E}_{p'}\delta(p) = \delta(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Через δ_0 обозначается направление ω-полной формации, т.е. $\delta_0(p) = \mathfrak{E}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$; δ_1 — направление ω-локальной формации, т.е. $\delta_1(p) = \mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$; δ_3 — направление ω-центральной формации, т.е. $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$ [5].

Решеткой называется частично упорядоченное множество Θ, в котором любые два элемента x и y имеют точную нижнюю грань, обозначаемую $x \wedge_\Theta y$, и точную верхнюю грань, обозначаемую $x \vee_\Theta y$ [9]. Пусть Θ — непустое множество формаций, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — Θ-формации (т.е. $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta$). Точную нижнюю и точную верхнюю грани формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ определяют соответственно следующим образом: $\mathfrak{F}_1 \wedge_\Theta \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1 \vee_\Theta \mathfrak{F}_2 = \Theta form(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ — Θ-формация, порожденная множеством $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ [6]. Совокупность формаций Θ называется полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности Θ-формаций является Θ-формацией и существует $\mathfrak{M} \in \Theta$ такая, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$ для любой формации $\mathfrak{F} \in \Theta$ [6]. Через $\Theta_{\omega\delta}$ обозначим множество всех $\omega\delta$-веерных формаций.

Теорема 1. *Пусть δ — $\mathbb{P}FR$-функция, $\delta_0 \leq \delta$. Тогда множество $\Theta_{\omega\delta}$ является полной решеткой формаций.*

Следуя [6], полную решетку формаций Θ назовем $\omega\delta$-индуктивной, если для любого набора $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ $\omega\delta$-веерных формаций, обладающих хотя бы одним Θ-значным ω-спутником, и для всякого набора $\{f_i \mid i \in I\}$, где f_i — внутренний Θ-значный ω-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место равенство: $\vee_{\Theta_{\omega\delta}}{}_{i \in I}(\mathfrak{F}_i) = \omega F(\vee_{\Theta_{i\in I}} f_i, \delta)$. Через $\Theta_{\mathfrak{E}}$ обозначим совокупность всех формаций конечных групп. Отметим, что $\Theta_{\mathfrak{E}}$ является полной решеткой формаций.

Теорема 2. *Пусть δ — $\mathfrak{b}p$-направление, удовлетворяющее условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда $\Theta_{\mathfrak{E}}$ является $\omega\delta$-индуктивной решеткой.*

Следуя [9], решетку формаций Θ называют модулярной, если для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3 \in \Theta$ таких, что $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$, справедливо:

$$\mathfrak{F}_1 \wedge_\Theta (\mathfrak{F}_2 \vee_\Theta \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee_\Theta (\mathfrak{F}_1 \wedge_\Theta \mathfrak{F}_3) \text{ [6].}$$

Теорема 3. *Пусть δ — $\mathfrak{b}p$-направление, удовлетворяющее условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда $\Theta_{\omega\delta}$ является модулярной решеткой формаций.*

Пусть $\mathfrak{F}_2/_\Theta \mathfrak{F}_1 = \{\mathfrak{H} \in \Theta \mid \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2\}$, где $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta$, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ [6].

Следствие 1. *Пусть δ — $\mathfrak{b}p$-направление, удовлетворяющее условию $\delta_1 \leq \delta \leq \delta_3$. Тогда для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Theta_{\omega\delta}$ решетки $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\Theta_{\omega\delta}} \mathfrak{F}_2)/_{\Theta_{\omega\delta}}\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1/_{\Theta_{\omega\delta}}(\mathfrak{F}_1 \wedge_{\Theta_{\omega\delta}} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.*

Литература

1. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. V. 80, N 4. P. 300–305.

2. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. Наука, Москва, 1978.

3. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin – New Jork, 1992.

4. Шеметков Л. А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 2. С. 101–103.

5. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.

6. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Беларуская навука, Минск, 1997.

7. Воробьев Н. Н. Алгебра классов конечных групп. Витебский гос. университет им. П.М. Машерова, Витебск, 2012.

8. Камозина О. В. О неоднопорождённых ω-веерных классах Фиттинга конечных групп // Математические заметки, 2006. Т. 79, № 1. С. 396–408.

9. Биркгоф Г. Теория решеток. Наука, Москва, 1984.