

Структурная теория матриц

О.В. Маркова (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

2024/2025

Версия от 9 октября 2024г.

1 Напоминание и предварительные сведения

Определение 1.1. *Ассоциативное кольцо с единицей* — это множество R с заданными на нём операциями сложения « $+$ » и умножения « $\cdot$ » так, что

1. R — абелева группа по сложению,
2. R — моноид (полугруппа с единицей 1) по умножению,
3. выполнены две аксиомы дистрибутивности:

$$\forall a, b, c \in R: c(a + b) = ca + cb \ \& \ (a + b)c = ac + bc.$$

Определение 1.2. *Тело* — кольцо с $1 \neq 0$, в котором всякий ненулевой элемент обратим. *Поле* — коммутативное тело.

Определение 1.3. Поле $\mathbb{F}$ называется *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен положительной степени над $\mathbb{F}$ имеет хотя бы один корень в $\mathbb{F}$.

Определение 1.4. Непустое множество V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством* над полем $\mathbb{F}$, если заданы операции сложения $+: V \times V \rightarrow V$ и умножения $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ скаляров из $\mathbb{F}$ на векторы из V такие, что выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall u, v, w \in V, (u + v) + w = u + (v + w)$ (*ассоциативность сложения векторов*);
2. $\forall u, v \in V, u + v = v + u$ (*коммутативность сложения*);
3. существует вектор 0 такой, что $v + 0 = 0 + v = v \ \forall v \in V$, (*существование нейтрального по сложению элемента*);

4. для любого $v \in V$ существует вектор $-v$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = 0$ (существование обратного по сложению, или противоположного элемента);
5. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall v, w \in V, \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ (дистрибутивность умножения числа на вектор);
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall v \in V, (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (дистрибутивность умножения вектора на число);
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall v \in V, \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (ассоциативность умножения вектора на число);
8. $\forall v \in V, 1 \cdot v = v$ (нейтральность числа 1 по умножению).

(Напомним, что выполнение аксиом 1–4 определяет, что $(V, +)$ является абелевой группой.)

Определение 1.5. Базис векторного пространства — упорядоченная линейно независимая система векторов, через которую выражается (в виде линейной комбинации) произвольный вектор пространства. Число векторов в базисе определено однозначно и называется *размерностью* пространства V , обозначается $\dim V$.

Предложение 1.6. Если V — конечномерное пространство и $V_1, V_2, \dots$ последовательность его подпространств такая, что $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_k \subseteq \dots$, иными словами, последовательность вложенных подпространств, то существует номер $N \in \mathbb{N}$, что с этого шага все пространства в цепочке совпадают, т.е. $V_N = V_{N+1} = \dots$. Если дополнительно известно, что до шага N цепочка была строго возрастающей, т.е. $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_N$, то

$$N \leq \dim V_N - \dim V_1 + 1 \leq \dim V + 1.$$

Доказательство. Здесь используется конечномерность пространства и монотонность функции размерности для вложенных пространств: $V_k \subset V_{k+1}$ тогда и только тогда, когда $\dim V_k < \dim V_{k+1}$. Имеем неубывающую ограниченную последовательность натуральных чисел $d_k = \dim V_k$, $d_k \leq \dim V$ для всех k . Для неё существует номер $N \in \mathbb{N}$, что последовательность становится константной $d_N = d_{N+1} = \dots$. Равенство размерностей влечёт равенство самих вложенных пространств.

Если известно строгое возрастание, то $\dim V_k - \dim V_{k-1} \geq 1$ при $2 \leq k \leq N$ и получаем оценку

$$\dim V_N - \dim V_1 = \sum_{k=2}^N (\dim V_k - \dim V_{k-1}) \geq \sum_{k=2}^N 1 = N - 1,$$

эквивалентно,

$$N \leq \dim V_N - \dim V_1 + 1.$$

Дополнительно мы знаем, что $\dim V_N \leq \dim V$, $\dim V_1 \geq 0$, откуда $N \leq \dim V + 1$. $\square$

2 Основные числовые характеристики матричных подалгебр. Теорема Бернсайда о матричных алгебрах и её следствия о блочной структуре и возможных размерностях собственных подалгебр алгебры матриц над алгебраическими замкнутыми полями.

Определение 2.1. Алгебра $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ — это кольцо со структурой векторного пространства над $\mathbb{F}$, причём выполнено $(ab)\alpha = a(b\alpha) = (a\alpha)b$ для $a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

Пример 2.2. Примеры алгебр: алгебра матриц $M_n(\mathbb{F})$, $\mathcal{L}(V)$ — алгебра линейных операторов на векторном пространстве V .

Поскольку алгебра является векторным пространством, одной из основных числовых характеристик алгебры является размерность $\dim \mathcal{A}$.

Определение 2.3. Пусть подмножество $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{A}$ содержит её единицу и само является алгеброй относительно тех же операций. Тогда $\mathcal{B}$ будем называть *подалгеброй* алгебры $\mathcal{A}$.

Можно, конечно, рассматривать и подалгебры без единицы, например, нулевую. Случаи, когда наличие единицы не предполагается, будем отдельно оговаривать.

Определение 2.4. Назовём подпространство U арифметического пространства $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n *инвариантным относительно подалгебры* $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, если $Au \in U$ для любых $A \in \mathcal{A}$, $u \in U$. Подалгебру $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ назовём *неприводимой*, если в $\mathbb{F}^n$ не содержится ненулевых собственных подпространств инвариантных относительно $\mathcal{A}$.

Для всякого ненулевого вектора $v \in \mathbb{F}^n$ множество векторов $\mathcal{A}v = \{Av | A \in \mathcal{A}\}$ является подпространством $\mathbb{F}^n$, инвариантным относительно $\mathcal{A}$ (непосредственно видно из определения $\mathcal{A}v$). Заметим также, что $v \in \mathcal{A}v$, поскольку $\mathcal{A}$ содержит единичную матрицу, поэтому подпространство $\mathcal{A}v$ ненулевое.

Определение 2.5. Назовём вектор $x \in \mathbb{F}^n$ *циклическим для подалгебры* $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x = \mathbb{F}^n$.

Через A^T обозначим транспонированную матрицу.

Предложение 2.6. Пусть $\mathcal{A}$ — ненулевая неприводимая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда
1. любой ненулевой вектор $x \in \mathbb{F}^n$ является циклическим для подалгебры $\mathcal{A}$;
2. аналогичное утверждение выполнено для векторов-строк: для любой ненулевой строки x^T , $x \in \mathbb{F}^n$, множество векторов-строк $x^T \mathcal{A} = \{x^T A | A \in \mathcal{A}\}$ совпадает со всем арифметическим пространством строк $\mathbb{F}^n$.

Доказательство. Утверждение пункта 1 непосредственно вытекает из двух предыдущих определений.

Докажем утверждение 2 от противного. Пусть для некоторой строки подпространство $U = x^T \mathcal{A}$ — собственное. Тогда $\dim U = k < n$. Рассмотрим подпространство $U^\perp \subset \mathbb{F}^n$ всех столбцов v , для которых $Uv = 0$ (т.е. $uv = 0$ для любой строки $u \in U$). По теореме о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений имеем $\dim U^\perp = n - \dim U = n - k > 0$. Таким образом, $U^\perp$ — собственное ненулевое подпространство пространства $\mathbb{F}^n$. При этом $U^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Действительно, если $v \in U^\perp$, $u \in U$, $A \in \mathcal{A}$, то $u(Av) = (uA)v = u'v$, где $u' \in U$, поэтому $u'v = 0$ и $Av \in U^\perp$. Противоречие с неприводимостью алгебры $\mathcal{A}$. $\square$

Теорема 2.7 (Теорема Бернсайда). Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $n \geq 2$. Тогда единственная ненулевая неприводимая подалгебра алгебры $M_n(\mathbb{F})$ — это вся алгебра $M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — ненулевая неприводимая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$.

I. Покажем, что $\mathcal{A}$ содержит матрицу ранга 1. Для этого рассмотрим ненулевую матрицу $A_0 \in \mathcal{A}$ минимального ранга и докажем, что $\text{rk } A_0 = 1$. Предположим противное: $\text{rk } A_0 \geq 2$. Тогда найдутся такие векторы $u, v \in \mathbb{F}^n$, что множество их образов $\{A_0u, A_0v\}$ линейно независимо. Вектор A_0u является циклическим для $\mathcal{A}$, поэтому найдётся матрица $A \in \mathcal{A}$, для которой $AA_0u = v$. Отсюда, $A_0v = A_0AA_0u$ и множество $\{A_0u, A_0AA_0u\}$ линейно независимо. Подпространство $A_0\mathbb{F}^n$ ненулевое и является инвариантным относительно A_0 (инвариантность образа линейного оператора), значит также оно инвариантно относительно всех матриц вида A_0B , $B \in M_n(\mathbb{F})$, в частности, относительно A_0A . В случае алгебраически замкнутых полей, в ненулевом инвариантном подпространстве относительно матрицы содержится ненулевой собственный вектор для этой матрицы, т.е. для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{F}$ ограничение матрицы (линейного оператора) $A_0A - \lambda E$ на пространство $A_0\mathbb{F}^n$ является вырожденной матрицей. В силу замкнутости алгебры относительно операций суммы и произведения, имеем $A_1 = (A_0A - \lambda E)A_0 \in \mathcal{A}$. Матрица A_1 ненулевая, поскольку $A_1u = A_0AA_0u - \lambda A_0u = A_0v - \lambda A_0u \neq 0$ в силу линейной независимости множества векторов $\{A_0u, A_0v\}$. С другой стороны, $A_1 = A_0(AA_0 - \lambda E)$, поэтому образ A_1 (пространство $A_1\mathbb{F}^n$) содержится в образе A_0 . Причём это включение строгое, в силу вырожденности ограничения $A_0A - \lambda E$ на пространство $A_0\mathbb{F}^n$. Для рангов это означает, что $0 \neq \text{rk } A_1 < \text{rk } A_0$. Противоречие с выбором матрицы A_0 .

II. Теперь покажем, что с помощью операций в алгебре из одной матрицы ранга 1 в неприводимой алгебре можно получить все матричные единицы. Зафиксируем индексы $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и будем строить матричную единицу $E_{i,j}$. Матрица A_0 ненулевая. Возьмём любой её ненулевой столбец, пусть это k -ый столбец a_k .

В силу неприводимости в алгебре $\mathcal{A}$ есть матрица B для которой $Ba_k = e_i = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, 1 расположена на i -ом месте (использовали утверждение 1 предло-

жения 2.6). У матрицы BA_0 ненулевой k -ый столбец и $\text{rk } BA_0 \leq \text{rk } A_0 = 1$, значит, $\text{rk } BA_0 = 1$. Тогда все столбцы этой матрицы пропорциональны её k -му столбцу,

$$BA_0 = (\alpha_1 e_i, \alpha_2 e_i, \dots, \alpha_n e_i) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью утверждения 2 предложения 2.6, находим в алгебре $\mathcal{A}$ матрицу C такую, что $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)C = (0, 0, 1, \dots, 0) = e_j^T$. Тогда $BA_0 C = E_{i,j}$. Как известно, из матричных единиц с помощью линейных комбинаций получаются все матрицы, т.е. $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$. $\square$

Определение 2.8. Подмножество I алгебры $\mathcal{A}$ называется (*двусторонним*) *идеалом*, если оно является подпространством соответствующего векторного пространства алгебры $\mathcal{A}$ и выдерживает умножение на элементы алгебры, т.е. $ax, xa \in I$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $x \in I$.

Отметим, что всякий идеал является подалгеброй (но необязательно подалгеброй с единицей), а обратное неверно. Например, множество диагональных матриц является подалгеброй, но произведение диагональной и недиагональной матрицы не всегда будет диагональной матрицей.

Этот известный факт можно доказать непосредственно над любым полем, но мы отметим, что он также получается как следствие из теоремы Бернсайда.

Следствие 2.9. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $n \geq 2$. Тогда в алгебре $M_n(\mathbb{F})$ есть ровно два двусторонних идеала — 0 и $M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Доказательство предлагается в качестве упражнения в задачах к лекции. $\square$

Определение 2.10. Гомоморфизм $\mathbb{F}$ -алгебр — это отображение между $\mathbb{F}$ -алгебрами, которое одновременно является кольцевым гомоморфизмом и линейным отображением векторных пространств. Для алгебр с единицей мы предполагаем, что кольцевой гомоморфизм переводит единицу в единицу.

Изоморфизм = биективный гомоморфизм. *Аutomорфизм* = изоморфизм в себя.

Теорема 2.11. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $n \geq 2$. Тогда любой автоморфизм алгебры $M_n(\mathbb{F})$ является внутренним, т.е. для любого автоморфизма $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ найдётся обратимая матрица $S \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $\varphi(A) = SAS^{-1}$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Пусть $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ — некоторый автоморфизм. Как кольцевой гомоморфизм φ переводит идемпотенты в идемпотенты: если $A^2 = A$, то $(\varphi(A))^2 = \varphi(A^2) = \varphi(A)$. Возьмём идемпотентную матрицу A_1 ранга 1. Тогда

$$\dim \{A_1 B A_1 | B \in M_n(\mathbb{F})\} = 1$$

и поскольку φ является биективным линейным отображением векторных пространств, то $1 = \dim \varphi(\{A_1 B A_1 | B \in M_n(\mathbb{F})\}) = \dim \{\varphi(A_1) C \varphi(A_1) | C \in M_n(\mathbb{F})\}$. Следовательно, $\text{rk } \varphi(A_1) = 1$.

Идемпотентом ранга 1 является, например, матричная единица E_{11} . Она также является жордановой матрицей, поэтому любая идемпотентная матрица ранга 1 с ней сопряжена. В частности, $\varphi(E_{11}) = T^{-1} E_{11} T$. Без ограничения общности, в дальнейшем доказательстве вместо автоморфизма φ рассмотрим его композицию с сопряжением матрицей T . Для краткости, обозначим её снова за φ . В этом случае $\varphi(E_{11}) = E_{11}$.

Чтобы задать матрицу S , построим линейный оператор на $\mathbb{F}^n$, матрица которого и будет искомой. Зададим оператор σ правилом: для любой матрицы $B \in M_n(\mathbb{F})$ $\sigma(B e_1) = \varphi(B) e_1$, т.е. первый столбец матрицы B переводим в первый столбец $\varphi(B)$. Проверим корректность. Пусть $B e_1 = C e_1$. Тогда $(B - C) e_1 = 0$. Поскольку e_1 — единственный ненулевой столбец матрицы E_{11} , то $(B - C) E_{11} = O$. Применим к этому матричному равенству автоморфизм φ :

$$\varphi(B - C) \varphi(E_{11}) = \varphi(O) \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(B) - \varphi(C)) E_{11} = O \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(B) - \varphi(C)) e_1 = 0,$$

т.е. $\varphi(B) e_1 = \varphi(C) e_1$. Линейность σ очевидно следует по построению из линейности φ . Покажем, что σ является инъективным отображением. Действительно, пусть $\varphi(B) e_1 = 0$. Тогда $\varphi(B) E_{11} = O$, $\varphi(B E_{11}) = O$, и $B E_{11} = O$ в силу биективности φ . Таким образом, $B e_1 = 0$. Инъективный линейный оператор на конечномерном пространстве является биективным отображением.

Осталось показать, что сопряжение с помощью матрицы σ совпадает с действием автоморфизма φ . Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$ — произвольная матрица. Имеем

$$\sigma(A B e_1) = \varphi(A B) e_1 = \varphi(A) \varphi(B) e_1 = \varphi(A) \sigma(B e_1),$$

или в матричной форме

$$S A B e_1 = \varphi(A) S B e_1.$$

Когда B пробегает множество всех матриц, столбец $y = B e_1$ пробегает всё множество $\mathbb{F}^n$, т.е. $S A y = \varphi(A) S y$ для любого $y \in \mathbb{F}^n$, откуда

$$S A = \varphi(A) S,$$

или в итоге

$$\varphi(A) = SAS^{-1}.$$

□

Теорема 2.12. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Пусть $\mathcal{A}$ подалгебра с единицей в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда существует базис пространства $\mathbb{F}^n$, в котором любая матрица $A \in \mathcal{A}$ представляется в блочно-верхнетреугольном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ 0 & 0 & A_{33} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & A_{kk} \end{pmatrix},$$

где $A_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \dots, k$, $n_1 + \dots + n_k = n$, и множество $\{1, \dots, k\}$ есть объединение попарно непересекающихся множеств $J_1, J_2, \dots, J_l$, причем

1. $\{A_{ii} : A \in \mathcal{A}\} = M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \dots, k$;
2. если $i, j \in J_s$, то $A_{ii} = A_{jj}$ для всех $A \in \mathcal{A}$;
3. если $i \in J_r$, $j \in J_s$ и $r \neq s$, то $\{(A_{ii}, A_{jj}) : A \in \mathcal{A}\} = M_{n_i}(\mathbb{F}) \oplus M_{n_j}(\mathbb{F})$;
4. если $i \in J_s$, то существует такая матрица $A \in \mathcal{A}$, что $A_{ii} = E$ и $A_{jj} = 0$ для всех $j \notin J_s$.

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ — неприводимая подалгебра, то по теореме Бернсайдса 2.7 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$ и утверждение верно для $k = 1$ и $n_1 = n$.

Пусть у алгебры $\mathcal{A}$ есть ненулевые собственные инвариантные подпространств. Рассмотрим всевозможные цепочки вложенных подпространств вида $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = \mathbb{F}^n$, где все V_i инвариантны относительно алгебры $\mathcal{A}$. Согласно предложению 1.6 $m \leq n$ (начали нумерацию с 0), поэтому можно выбрать цепочку максимальной длины. Пусть $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = \mathbb{F}^n$ такова, что её длина максимальна. В конечномерном пространстве у любого подпространства есть дополнение, т.е. для каждого $i = 1, \dots, m$ существует подпространство $W_i \subseteq V_i$ такое, что $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$. Тогда $V = V_m = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$. Ввиду инвариантности всех пространств V_i относительно $\mathcal{A}$ и определения их дополнений W_i , в базисе пространства $\mathbb{F}^n$, являющегося объединением базисов пространств W_i , все матрицы из алгебры $\mathcal{A}$ имеют блочно-верхнетреугольный вид. Пусть также $n_i = \dim W_i$.

Для каждого индекса $i = 1, \dots, m$ определён линейный оператор проецирования $\mathbb{F}^n$ на W_i параллельно $\bigoplus_{j \neq i} W_j$, пусть $P_i \in M_n(\mathbb{F})$ его матрица в выбранном базисе. Имеем $P_i = \text{diag}(0, \dots, 0, E, 0, \dots, 0)$ и $P_1 + \dots + P_m = E$. Рассмотрим далее подалгебру $\mathcal{A}_i = \{P_i A|_{W_i} | A \in \mathcal{A}\} \subseteq M_{n_i}(\mathbb{F})$, т.е. $\mathcal{A}_i$ — ограничение алгебры $\mathcal{A}$ на подпространство

W_i . Такое ограничение будет алгеброй, поскольку V_{i-1} и V_i инварианты относительно $\mathcal{A}$.

Докажем утверждение 1. Алгебра $\mathcal{A}_i$ является неприводимой. Действительно, если бы имелось собственное ненулевое инвариантное подпространство $U_i \subset W_i$ для $\mathcal{A}_i$, то $V_{i-1} \oplus U_i$ было бы инвариантным подпространством для алгебры $\mathcal{A}$, лежащим строго между V_{i-1} и V_i , что противоречит максимальной длине цепочки $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = \mathbb{F}^n$. Тогда по теореме Бернсайда 2.7 $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$.

Для доказательства утверждений 2–4 будем рассматривать пары алгебр $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$ при $i \neq j$. Обозначим $A_{ii} = P_i A|_{W_i}$. Скажем, что алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ *независимы*, если в алгебре $\mathcal{A}$ есть такая матрица A , что $A_{ii} = E$, а $A_{jj} = O$. Это условие симметрично, т.к. если $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ независимы, то $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_i$ также независимы (с матрицей $E - A \in \mathcal{A}$). Иначе, назовём алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ *связанными*.

Пусть алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ связаны. Покажем, что в этом случае матрицы A_{ii} и A_{jj} одновременно нулевые или ненулевые. Допустим найдется матрица $A \in \mathcal{A}$ такая, что $A_{ii} \neq O$, но $A_{jj} = O$. Рассмотрим множество всех таких матриц $I = \{A_{ii} | A \in \mathcal{A} \text{ и } A_{jj} = O\}$. Заметим, что I является линейным подпространством и замкнуто относительно умножения на матрицы из $\mathcal{A}_i$ с любой стороны, т.е. является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$. Поскольку $I \neq 0$, то $I = M_{n_i}(\mathbb{F})$. Тогда I содержит единичную матрицу, а в этом случае алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ будут независимыми. Противоречие.

Пусть $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ связаны, и $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$ связаны. Предположим, что $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_k$ независимы. Тогда есть матрица $A \in \mathcal{A}$ такая, что $A_{ii} = E$, а $A_{kk} = O$. В силу связанности $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ имеем $A_{jj} \neq O$, противоречие с доказанным выше для связанных алгебр $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$.

Тогда множества $\{J_s\}$ составляем таким образом, что i и j попадают в одно множество J_l , если и только если $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ связаны — в качестве J_1 берём все индексы алгебр, связанных с $\mathcal{A}_1$, если J_1 не покрывает все множество индексов, повторяем процесс для какого-то $i_2 \notin J_1$ и т.д.

Утверждение 4 получается из определения независимых алгебр: при $i \in J_s$ умножаем матрицы с E в i -ом блоке и O в j -ом блоке по всем $j \notin J_s$. Также из этого определения следует утверждение 2: множество пар $(A_{ii}, A_{jj}) \subseteq M_{n_i}(\mathbb{F}) \oplus M_{n_j}(\mathbb{F})$ и из условия независимости содержит пары (E, O) и (O, E) , далее применяем утверждение 1 и свойство замкнутости алгебры относительно умножения на ее элементы.

Определим отображение $\varphi : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$ правилом $\varphi(A_{ii}) = A_{jj}$. Докажем, что отображение φ задано корректно. Действительно, пусть $A \neq B \in \mathcal{A}$, $A_{ii} = B_{ii}$. Тогда $(A - B)_{ii} = O$. И по доказанному свойству $(A - B)_{jj} = O$ и $A_{jj} = B_{jj}$. Это же рассуждение доказывает инъективность отображения φ . По построению видно, что φ является сюръективным гомоморфизмом алгебр, а значит, и изоморфизмом. Изоморфизм алгебр влечёт равенство их размерностей, а поскольку $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$ и $\mathcal{A}_j = M_{n_j}(\mathbb{F})$, то $n_i = n_j$. Таким образом, алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ можно отождествить, при этом φ будет автоморфизмом матричной алгебры $M_{n_i}(\mathbb{F})$. По теореме 2.11 тогда

найдётся обратимая матрица $S \in M_{n_i}(\mathbb{F})$, что $A_{ii} = S^{-1}A_{jj}S$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

Фиксируем множество J_s . Пусть i_s — его минимальный элемент. Тогда пусть $j \in J_s$, $j \neq i_s$. Пусть S определённая выше матрица, соответствующая индексам i_s и j . Тогда построим её до обратимой матрицы $T \in M_n(\mathbb{F})$: $T = \text{diag}(E, E, \dots, S, E, \dots, E)$, S расположена на j -ом месте. Тогда в алгебре $T^{-1}\mathcal{A}T$ все матрицы останутся блочно-треугольными и при этом $A_{i_s, i_s} = A_{jj}$. Далее берём композицию таких T по всем $j \in J_s$, $j \neq i_s$. Получаем утверждение 3. $\square$

Следствие 2.13. Если $\mathcal{A}$ — собственная подалгебра алгебры $M_n(\mathbb{F})$, то $\dim \mathcal{A} \leq n^2 - n + 1$.

Доказательство. Если в блочном представлении алгебры $\mathcal{A}$ 3 и более диагональных блока, то подалгебра с двумя блоками $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ является собственной подалгеброй в $M_{n_1+n_2}(\mathbb{F})$, поэтому её размерность не максимальная. Остаётся случай двублочной алгебры.

В случае двух блоков для достижения максимума размерности нужно минимизировать выражение $k(n-k)$, $1 \leq k \leq n-1$. Минимум достигается при $k=1$. $\square$

Задачи к лекции 1.

Задача 1. Докажите, что ненулевой двусторонний идеал матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ является неприводимой подалгеброй (здесь наличие единицы в подалгебре не предполагаем).

Задача 2. Приведите пример собственной ненулевой неприводимой подалгебры в а) $M_2(\mathbb{R})$, б) $M_4(\mathbb{R})$.

Задача 3. Покажите, что в алгебре $M_3(\mathbb{C})$ есть подалгебры всех размерностей от 1 до 7.

Задача 4. Покажите, что в алгебре $M_4(\mathbb{C})$ есть подалгебры всех размерностей от 1 до 13.

Задача 5. Есть ли в алгебре $M_5(\mathbb{C})$ подалгебра, содержащая единичную матрицу, размерности 20?

Задача 6. Назовём матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$ *полумагической*, если есть такое число $S = S(A) \in \mathbb{C}$, что $\sum_{i=1}^n a_{ij} = S(A)$ для всех $j = 1, \dots, n$ и $\sum_{j=1}^n a_{ij} = S(A)$ для всех $i = 1, \dots, n$ (все строчные и столбцовые суммы элементов матрицы равны между собой). Проверьте, что множество полумагических матриц является подалгеброй алгебры $M_n(\mathbb{C})$ и определите её блочный вид в смысле теоремы 2.12.

3 Треугольные матричные подалгебры. Одновременная триангулируемость семейств матриц и порождённых ими алгебр. Теорема МакКоя (критерий триангулируемости).

Подалгебру всех верхнетреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$ обозначим за $T_n(\mathbb{F})$.

Определение 3.1. Множество матриц $\{A_i | i \in I\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ называется *триангулируемым*, если существует обратимая матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $C^{-1}A_iC \in T_n(\mathbb{F})$ для всех $i \in I$. Эквивалентным образом говорят, что матрицы $A_i \in M_n(\mathbb{F})$, $i \in I$, *одновременно триангулируемы*, если триангулируемо множество $\{A_i | i \in I\}$.

Рассмотрим линейное пространство V над полем $\mathbb{F}$ и его подпространство N .

Определение 3.2. *Факторпространством* V/N называется факторгруппа абелевой группы V по подгруппе N , т.е. множество смежных классов $[x] = x + N$ с операцией сложения и операцией умножения на число, заданной правилом: $\lambda[x] = [\lambda x]$.

Пусть на пространстве V задан линейный оператор A и подпространство N инвариантно относительно A . Тогда ему можно сопоставить линейный оператор $\tilde{A}$ на факторпространстве V/N , полагая $\tilde{A}[x] = [Ax]$ (определение корректно в силу инвариантности N). Для краткости назовём $\tilde{A}$ фактором оператора A .

Определение 3.3. Рассмотрим семейство линейных операторов $\mathcal{B} \subset L(V)$. Пусть $N \subset M \subseteq V$ — подпространства инвариантные относительно $\mathcal{B}$. Семейством факторов семейства $\mathcal{B}$ относительно $\{M, N\}$ называется множество всех факторов $\tilde{B}$ на факторпространстве M/N . Будем говорить, что некоторое свойство *наследуется факторами*, если любое семейство факторов семейства, обладающего данным свойством, также им обладает.

Пример такого свойства: коммутативность.

Лемма 3.4 (Лемма о триангулируемости). Пусть P — набор свойств, каждое из которых наследуется факторами. Пусть $\dim V \geq 2$. Если любое семейство операторов на V , обладающее свойствами P , приводимо (обладает собственным ненулевым инвариантным подпространством), то любое семейство операторов на V , обладающее свойствами P , триангулируемо.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство операторов, обладающее свойствами P . Выберем цепочку инвариантных подпространств $M_0 = \{0\} \subset M_1 \subset \dots \subset M_m = V$ относительно $\mathcal{B}$ максимальной длины (см. предложение 1.6 и доказательство теоремы 2.12).

Допустим, что для некоторого k $\dim M_k/M_{k-1} > 1$. Тогда по предположению семейство факторов семейства $\mathcal{B}$ относительно $\{M_k, M_{k-1}\}$ обладает общим инвариантным подпространством L . Но в этом случае множество $\{x \in M_k \mid [x] \in L\}$ будет инвариантным подпространством относительно $\mathcal{B}$, лежащим строго между M_{k-1} и M_k . Противоречие с максимальностью цепочки.

Тогда как в доказательстве теоремы 2.12, рассмотрим дополнения подпространств M_{k-1} до M_k , их размерности равны 1, а значит в блочнотреугольном виде матриц все блоки будут иметь размер 1, т.е. матрицы будут треугольными. $\square$

Теорема 3.5. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Любое семейство коммутирующих операторов триангулируемо.

Доказательство. Воспользуемся леммой о триангулируемости 3.4. Свойство коммутативности наследуется факторами, поэтому достаточно проверить, что у коммутативного семейства операторов на пространстве размерности большей 1 есть нетривиальное инвариантное подпространство.

Пусть $\mathcal{B}$ — семейство коммутирующих операторов на пространстве V . Если все линейные операторы скалярные, то относительно них инвариантно любое подпространство. Пусть теперь $B \in \mathcal{B}$ — нескаларный. В силу алгебраической замкнутости поля у B есть собственное число λ и собственное подпространство $M \subset V$. Тогда для любых $C \in \mathcal{B}$ и $x \in M$, имеем $BCx = CBx = \lambda Cx$, $Cx \in M$, M инвариантно относительно $\mathcal{B}$. $\square$

Через $\sigma(A)$ обозначим спектр = множество всех собственных значений матрицы (оператора) A .

Поскольку у любой треугольной матрицы собственными числами являются диагональные элементы, а диагональными элементами суммы(произведения) треугольных матриц являются суммы(произведения) диагональных элементов исходных матриц, то для триангулируемого семейства $\{A_1, \dots, A_k\}$ и многочлена $p(x_1, \dots, x_k)$ от коммутирующих переменных верно, что

$$\sigma(p(A_1, \dots, A_k)) \subset p(\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_k)), \quad (1)$$

где $p(\sigma(A_1), \dots, \sigma(A_k))$ обозначает множество всех значений $p(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_j \in \sigma(A_j)$.

Определение 3.6. *Внешнее добавление единицы:* если $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}_0$ — подпространство в $\mathcal{A}$, замкнутое относительно умножения, но $1_{\mathcal{A}} \notin \mathcal{A}_0$ ($\mathcal{A}_0$ — подалгебра без единицы), то $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \oplus \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$ с естественным умножением $(A + \alpha 1_{\mathcal{A}})(B + \beta 1_{\mathcal{A}}) = AB + \alpha B + \beta A + \alpha\beta 1_{\mathcal{A}}$ для $A, B \in \mathcal{A}_0$ будет подалгеброй с единицей, содержащей в себе алгебру $\mathcal{A}_0$ и $\dim \mathcal{A}_1 = \dim \mathcal{A}_0 + 1$.

Теорема 3.7. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Любая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$, состоящая из нильпотентных операторов (это алгебра без единицы), триангулируема.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ алгебра, в которой все матрицы нильпотентны. Пусть $N \subset M$ — инвариантные пространства относительно $\mathcal{A}$. Если $A \in \mathcal{A}$ и $A^k = 0$, то $\tilde{A}^k = 0$ и семейство факторов $\mathcal{A}$ относительно M/N тоже состоит из нильпотентных матриц.

В алгебре $\mathcal{A}_1$ с добавленной единицей все матрицы будут вида “нильпотентная плюс скалярная”. Заметим, что на пространстве размерности хотя бы 2 не все матрицы имеют такой вид (например, E_{11} не такая), поэтому по теореме Бернсайда алгебра $\mathcal{A}_1$ будет приводима, и её инвариантное пространство будет инвариантным относительно $\mathcal{A}$. Следовательно, все факторалгебры алгебры $\mathcal{A}$ на факторпространствах размерности 2 и выше — приводимы и применима лемма о триангулируемости. $\square$

Теорема 3.8. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Подалгебра $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ триангулируема тогда и только тогда, когда все матрицы-коммутаторы $AB - BA$, $A, B \in \mathcal{A}$ нильпотентны.

Доказательство. “ $\Rightarrow$ ” Пусть $\mathcal{A}$ — триангулируема и $A, B \in \mathcal{A}$. Тогда согласно соотношению (1) собственные числа матрицы $AB - BA$ имеют вид $\alpha\beta - \beta\alpha$, $\alpha \in \sigma(A)$, $\beta \in \sigma(B)$. В поле $\mathbb{F}$ $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$, значит, $\sigma(AB - BA) = \{0\}$ и матрица $AB - BA$ нильпотентна.

“ $\Leftarrow$ ” Если $n \geq 2$, то в алгебре $M_n(\mathbb{F})$ есть матрицы, коммутаторы которых ненильпотентны. Например, для $n = 2$ можно взять $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(AB - BA)^2 = -E$. Для $n \geq 3$ дополняем рассмотренные матрицы нулями.

Свойство, что коммутаторы всех матриц нулевые, наследуется факторами. Поэтому, все факторалгебры алгебры $\mathcal{A}$ на факторпространствах размерности 2 и выше должны быть собственными подалгебрами, они приводимы по теореме Бернсайда и применима лемма о триангулируемости. $\square$

Определение 3.9. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *конечнопорожденной*, если все её элементы могут быть представлены в виде конечных линейных комбинаций (с коэффициентами из $\mathbb{F}$) конечных произведений некоторого конечного множества её элементов, называемого *системой порождающих*. Легко видеть, что любая конечномерная алгебра порождается своим базисом, т.е. является конечнопорожденной.

Теорема 3.10 (теорема Маккоя). Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулируемы тогда и только тогда, когда матрица $p(A, B)(AB - BA)$ нильпотентна для любого многочлена $p(x, y)$ от некоммутирующих переменных.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая матрицами A, B

“ $\Rightarrow$ ” Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулируемы. Тогда согласно соотношению (1) собственные числа матрицы $p(A, B)(AB - BA)$ имеют вид $p(\alpha, \beta)(\alpha\beta -$

$\beta\alpha$), $\alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)$. В поле $\mathbb{F}$ $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$, значит, $\sigma(p(A, B)(AB - BA)) = \{0\}$ и матрица $p(A, B)(AB - BA)$ нильпотентна.

“ $\Leftarrow$ ” По лемме о триангулируемости достаточно проверить, что при $n \geq 2$ алгебра $\mathcal{A}$ является приводимой. Если $AB = BA$, то утверждение следует из доказательства теоремы 3.5. Пусть $AB - BA \neq O$. Выберем такой вектор $x \in \mathbb{F}^n$, что $(AB - BA)x \neq 0$. Для ненулевого вектора $(AB - BA)x$ всегда найдётся матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $C(AB - BA)x = x$. Если бы алгебра $\mathcal{A}$ была неприводима, то по теореме Бернсайда $A = M_n(\mathbb{F})$ и $C \in \mathcal{A}$. Но с другой стороны, по построению элементы алгебры $\mathcal{A}$ представляются как линейные комбинации произведений матриц A, B , т.е. $C = p(A, B)$ для некоторого многочлена от некоммутирующих переменных. Из условия $p(A, B)(AB - BA)x = x$ тогда следует, что матрица $p(A, B)(AB - BA)$ ненильпотентна. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

Следствие 3.11. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Если $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и $AB = O$, то матрицы A и B одновременно триангулируемы.

Доказательство. Условие $AB = O$ влечёт $(p(A, B)(AB - BA))^2 = O$. $\square$

Аналогичный критерий справедлив и для произвольного семейства матриц.

Теорема 3.12. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Множество $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ триангулируемо тогда и только тогда, когда матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})$ нильпотентна для любых значений индекса $m \in \mathbb{Z}_+$ и матриц $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}} \in \mathcal{A}$.

Доказательство. “ $\Rightarrow$ ” Пусть семейство $\mathcal{A}$ триангулируемо. Тогда согласно соотношению (1) $\sigma(A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})) = \{0\}$ и матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})$ нильпотентна.

“ $\Leftarrow$ ” По лемме о триангулируемости достаточно проверить, что при $n \geq 2$ множество $\mathcal{A}$ является приводимым. Для коммутативного семейства утверждение следует из доказательства теоремы 3.5. Пусть теперь в $\mathcal{A}$ есть некоммутирующие матрицы A и B . По условию для любых значений индекса $m \in \mathbb{Z}_+$ и матриц $A_{i_1}, \dots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}} \in \mathcal{A}$ матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(AB - BA)$ нильпотентна, в частности, является матрицей с нулевым следом. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B}$, порождённую семейством $\mathcal{A}$. Поскольку след является линейной функцией, то матрица $C(AB - BA)$ будет с нулевым следом для всякой матрицы $C \in \mathcal{B}$. Отсюда по теореме Бернсайда получаем, что $\mathcal{B}$ приводима, поскольку в полной матричной алгебре можно найти такую матрицу D , что $\text{tr}(D(AB - BA)) \neq 0$. $\square$

Дополнение к лекции 2:

Теорема 3.13 (теорема Лаффи). Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Если $\text{rk}(AB - BA) = 1$, то A и B одновременно триангулируемы.

Доказательство. По лемме о триангулируемости достаточно показать наличие общего инвариантного подпространства для A и B при $n \geq 2$.

Возьмём собственное число $\lambda \in \sigma(B)$. Ядро и образ $B - \lambda E$ ненулевые инвариантные подпространства для B . Покажем, что по крайней мере одно из них инвариантно относительно A .

По условию образ $AB - BA$ имеет размерность 1, значит, порождается некоторым вектором $y \in \mathbb{F}^n$.

Пусть $\ker(B - \lambda E)$ не инвариантно относительно A . Это означает, что найдётся такой вектор $x \in \mathbb{F}^n$, что $(B - \lambda E)x = 0$, а $(B - \lambda E)Ax \neq 0$. Имеем

$$A(B - \lambda E)x - (B - \lambda E)Ax = (AB - BA)x = \beta y \neq 0.$$

Отсюда $(B - \lambda E)Ax = \gamma y \neq 0$ и y принадлежит образу $(B - \lambda E)$. Тогда для произвольного вектора $z \in \mathbb{F}^n$ получаем

$$A(B - \lambda E)z = (B - \lambda E)Az + \delta y,$$

откуда любой вектор $A(B - \lambda E)z$ попадает в образ $B - \lambda E$ и образ $B - \lambda E$ инвариантен относительно A . $\square$

Задачи к лекции 2.

Задача 1. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Покажите, что подалгебра $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ триангулируема тогда и только тогда, когда любая пара матриц из $\mathcal{A}$ триангулируема.

Задача 2. К доказательству теоремы 3.12: поясните, почему для ненулевой матрицы C с нулевым следом всегда найдется такая матрица $D \in M_n(\mathbb{F})$, что $\text{tr}(DC) \neq 0$.

Задача 3. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $n \geq 2$ и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Найдите критерий того, что матрицы A и A^T одновременно триангулируемы.

Задача 4. Докажите следующее уточнение теоремы Маккоя 3.10: Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулируемы тогда и только тогда, когда матрица $w(A, B)(AB - BA)$ нильпотентна для любого **одночлена** $w(x, y)$ от некоммутирующих переменных.

Задача 5. Проверьте, является ли триангулируемой пара матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $A \in M_n(\mathbb{F})$ треугольная матрица и пара матриц A, B триангулизуема. Верно ли, что можно подобрать преобразование, приводящее матрицы к треугольному виду, так, чтобы матрица A осталась неизменной?

4 Централизатор матрицы, его размерность. Теорема о втором централизаторе.

Определение 4.1. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Если $AB = BA$, то говорят, что матрицы A и B *перестановочны*.

Определение 4.2. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$. Множество всех матриц, перестановочных с A , называют *централизатором* матрицы A . Обозначим его $\mathcal{C}(A)$.

Аналогично, централизатор $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ подмножества $\mathcal{X} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — это пересечение централизаторов всех элементов множества $\mathcal{X}$, т.е. матрицы, перестановочные со всеми матрицами из $\mathcal{X}$.

Замечание 4.3. Заметим, что для любых матриц $B, C \in \mathcal{C}(A)$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ верно, что

$$\begin{aligned} A \cdot BC &= (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = BC \cdot A, \\ (\alpha B + \beta C)A &= A(\alpha B + \beta C), \end{aligned}$$

централизатор замкнут относительно линейных комбинаций и произведений, т.е. является подалгеброй алгебры матриц. При этом любая матрица A перестановочна с собой и единичной матрицей, следовательно, $\mathbb{F}[A] \subseteq \mathcal{C}(A)$.

Для размерности централизатора отсюда следует оценка, что $\dim \mathcal{C}(A) \geq \deg \mu_A(t)$ ($\mu_A(t)$ — минимальный многочлен матрицы A). Далее мы покажем, что эту оценку можно улучшить до $\dim \mathcal{C}(A) \geq n$ и опишем матрицы, для которых выполнено равенство $\dim \mathcal{C}(A) = n$.

Также если $AB = BA$, то $C^{-1}ACC^{-1}BC = C^{-1}ABC = C^{-1}BAC = C^{-1}BCC^{-1}AC$, и централизаторы подобных матриц тоже сопряжены той же матрицей C . Соответственно, задачу вычисления размерности достаточно решить для одной из матриц, подобных данной, выберем для этого жорданову матрицу.

Обозначение 4.4. Через $M_{k,l}(\mathbb{F})$ обозначим пространство прямоугольных $k \times l$ матриц над полем $\mathbb{F}$. Пусть $m = \min\{k, l\}$.

При $k < l$. Для чисел $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{F}$ положим

$$T(y_1, \dots, y_m) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & \dots & y_{m-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, при $k \geq l$ для чисел $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{F}$ положим

$$T(y_1, \dots, y_m) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ 0 & y_1 & \ddots & y_{m-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & y_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 4.5. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$ жорданова матрица вида $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где $A_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ — жорданова клетка (числа λ_i могут совпадать). Рассмотрим матрицу $X \in \mathcal{C}(A)$. Разобьём X на m^2 блоков X_{kl} размеров $n_k \times n_l$ в соответствии с блочным разбиением A . Тогда

1. $X_{rr} = T(y_{r,r;1}, \dots, y_{r,r;n_r})$;
2. если $\lambda_r = \lambda_s$, то либо $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \dots, y_{r,s;n_r})$ и $X_{sr} = T(y_{s,r;1}, \dots, y_{s,r;n_r})$, либо $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \dots, y_{r,s;n_s})$ и $X_{sr} = T(y_{s,r;1}, \dots, y_{s,r;n_s})$ в зависимости от соотношения n_r и n_s ;
2. если $\lambda_r \neq \lambda_s$, то $X_{rs} = O$ и $X_{sr} = O$.

Доказательство. Из условия $AX = XA$ получаем уравнения на юлоки:

$$A_r X_{rs} = X_{rs} A_s$$

for all $r, s \in \{1, \dots, m\}$.

Для фиксированных $r, s \in \{1, \dots, m\}$ матрица X_{rs} определяется одним уравнением

$$A_r X_{rs} = X_{rs} A_s. \quad (2)$$

Упростим обозначения: $(X_{rs})_{ij} = y_{ij}$, $i = 1, \dots, n_r, j = 1, \dots, n_s$.

Если расписать уравнение (2) поэлементно, получим

$$\lambda_r y_{ij} + y_{i+1,j} = \lambda_s y_{ij} + y_{i,j-1}, \text{ если } i \neq n_r, j \neq 1, \quad (3)$$

$$\lambda_r y_{n_r,j} = \lambda_s y_{n_r,j} + y_{n_r,j-1}, \text{ если } j \neq 1, \quad (4)$$

$$\lambda_r y_{i,1} + y_{i+1,1} = \lambda_s y_{i,1}, \text{ если } i \neq n_r, \quad (5)$$

$$\lambda_r y_{n_r,1} = \lambda_s y_{n_r,1}. \quad (6)$$

1. $s = r$.

Поскольку если $AX = XA$, то $(A - \lambda_r E)X = X(A - \lambda_r E)$, поэтому можно считать, что $\lambda_r = 0$. Последовательно используя (4), получим, что $y_{n_r,1} = 0, y_{n_r,2} = 0, \dots, y_{n_r,n_r-1} =$

0. Последовательно используя (5), далее получаем, что $y_{n_r,1} = 0, y_{n_r-1,1} = 0, \dots, y_{2,1} = 0$. В конце используя (3), находим, что

$$y_{i+1,j} = y_{i,j-1},$$

следовательно, X_{rr} — верхнетреугольная матрицы вида, указанного в пункте 1.

2. Пусть $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ и $\lambda_r = \lambda_s$. Последовательно применяя (4), находим $y_{n_r,1} = 0, y_{n_r,2} = 0, \dots, y_{n_r,n_r-1} = 0$. Затем последовательно применяя (5), находим $y_{n_r,1} = 0, y_{n_r-1,1} = 0, \dots, y_{2,1} = 0$. В заключении применяем (3), имеем

$$y_{i+1,j} = y_{i,j-1},$$

откуда X_{rs} является прямоугольной верхнетреугольной матрицей $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \dots, y_{r,s;n_r})$, либо $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \dots, y_{r,s;n_s})$ в зависимости от размера. Меняя r, s местами получаем аналогичный вывод для X_{sr} .

3. Пусть $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ и $\lambda_r \neq \omega \lambda_s$. Тогда из уравнения (6) выводим $(\lambda_r - \lambda_s)y_{n_r,1} = 0$, значит, $y_{n_r,1} = 0$. Затем последовательно применяя (4), получаем $y_{n_r,2} = 0, y_{n_r,3} = 0, \dots, y_{n_r,n_r} = 0$. Далее, используя (5), получаем $y_{n_r-1,1} = 0, y_{n_r-2,1} = 0, \dots, y_{1,1} = 0$. И в конце с помощью (3) начиная с $n_r - 1$ -ой строки и 2-го столбца, окончательно делаем вывод

$$X_{rs} = 0.$$

□

Определение 4.6. Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если её минимальный многочлен совпадает с характеристическим. В терминах жордановой нормальной формы это условие означает, что каждому собственному числу соответствует одна жорданова клетка.

Следствие 4.7. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\dim \mathcal{C}(A) \geq n$, более того, равенство $\dim \mathcal{C}(A) = n$ выполнено тогда и только тогда, когда матрица A — циклическая.

Доказательство. Считаем размерность централизатора в предположении, что матрица A приведена к ЖНФ. Посчитаем размерность пространства D , порождённого блочно-диагональными матрицами из централизатора. Поскольку коэффициенты диагональных блоков X_{rr} матрицы X в предложении 4.5 находятся независимо для блоков, то $\dim D = \sum_{i=1}^m \dim \langle T(y_{r,r;1}, \dots, y_{r,r;n_r}) | y_{r,r;1}, \dots, y_{r,r;n_r} \in \mathbb{F} \rangle = \sum_{i=1}^m n_r = n$. Таким образом, поскольку $D \subseteq \mathcal{C}(A)$, то $\dim \mathcal{C}(A) \geq n$. Последнее неравенство обращается в равенство, когда все внедиагональные блоки нулевые. Согласно пунктам 2 и 3 предложения 4.5 это выполнено тогда и только тогда, когда у разных жордановых клеток собственные числа различны, т.е. как раз для циклической матрицы A . □

Следствие 4.8. Циклические матрицы — это в точности такие матрицы, для которых $\mathcal{C}(A) = \mathbb{F}[A]$.

Доказательство. Согласно предыдущему следствию, $\dim \mathcal{C}(A) \geq n$. С другой стороны, по теореме Гамильтона–Кэли $\dim \mathbb{F}[A] = \deg \mu_A(t) \leq n$, поэтому совпадение этих алгебр возможно если и только если, $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathbb{F}[A] = n$. Снова применяем следствие 4.7. $\square$

Следствие 4.9. $\mathcal{C}(A) = M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $A = \lambda E$.

Доказательство. Согласно предложению 4.5 если у матрицы A есть хотя бы 2 различных собственных числа λ_r и λ_s , то в централизаторе у всех матриц будут нулевые блоки X_{rs} , поэтому он не может быть пространством всех матриц.

Пусть у A есть ровно одно собственное число λ . Если $A \neq \lambda E$, то в ЖНФ A есть клетка размера не меньше 2. Пусть клетки в ЖНФ A упорядочены по убыванию размеров. Тогда $n_1 \geq 2$ и $n_1 \geq n_2$. Тогда размерность проекции централизатора на блок размера $n_1 + n_2$ будет равна: $n_1 + n_2 + 2n_2 < n_1^2 + n_2 + 2n_1n_2 \leq n_1^2 + n_2^2 + 2n_1n_2 = (n_1 + n_2)^2$, значит опять размерность меньше размерности пространства всех матриц. $\square$

Далее рассмотрим последующие централизаторы. Например, двойной централизатор $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ — множество всех матриц, которые коммутируют со всеми матрицами, коммутирующими с A .

В общем случае для любого подмножества $\mathcal{X}$: $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{X})$, а теорема о двойном централизаторе дает условия когда это включение обращается в равенство. Заметим, что λE коммутируют со всеми матрицами, а степени матрицы A коммутируют с матрицами из централизатора A , поэтому всегда $\mathbb{F}[A] \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$. Поэтому в матричном случае, конечно, не говорят о равенстве $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ и $\{A\}$, но о совпадении $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ с $\mathbb{F}[A]$.

Теорема 4.10. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = \mathbb{F}[A]$, т.е. любая матрица C коммутирующая со всеми матрицами, коммутирующими с A , представляется в виде многочлена от A .

Доказательство. Как и в предложении Достаточно доказать теорему в предположении, что $A \in M_n(\mathbb{F})$ — жорданова матрица. Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где $A_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ — жорданова клетка (числа λ_i могут совпадать). Любую матрицу $X \in M_n(\mathbb{F})$ на m^2 блоков X_{kl} размеров $n_k \times n_l$ в соответствии с блочным разбиением A .

Заметим, что первый централизатор $\mathcal{C}(A)$ содержит диагональные матрицы

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \text{diag}(\alpha_1 E_{n_1}, \dots, \alpha_m E_{n_m}).$$

Следовательно, $CD(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)C$. Поскольку соотношение выполнено для всех α_i и матрицы $D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ являются жордановыми, для каждой пары

$r, s, r \neq s$ применяя предложение 4.5 для $\alpha_r \neq \alpha_s$, заключаем, что C — блочно-диагональная матрица.

Также верно, что $AC = CA$, поэтому диагональные блоки матрицы C имеют вид $C_{rr} = T(c_{r,1}, \dots, c_{r,n_r})$.

Пусть теперь $X \in \mathcal{C}(A)$ — блочная матрица, определенная в предложении 4.5. Из уравнения $CX = XC$ поблочно получаем

$$C_{rr}X_{rs} = X_{rs}C_{ss}. \quad (7)$$

Если у клеток A_r и A_s собственные числа λ_r и λ_s различны, то $X_{rs} = O$ и это соотношение тривиально. Пусть $\lambda_r = \lambda_s$. Выберем порядок чисел r, s так, чтобы $n_r \leq n_s$.

$$\begin{pmatrix} c_{r,1} & c_{r,2} & \dots & c_{r,n_r} \\ 0 & c_{r,1} & \dots & c_{r,n_r-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{r,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \dots & y_{r,s;n_r} \\ 0 & 0 & 0 & y_{r,s;1} & \dots & y_{r,s;n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{r,s;1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & \dots & y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \dots & y_{r,s;n_r} \\ 0 & 0 & 0 & y_{r,s;1} & \dots & y_{r,s;n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{r,s;1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{s,1} & c_{s,2} & \dots & c_{s,n_s} \\ 0 & c_{s,1} & \dots & c_{s,n_s-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{s,1} \end{pmatrix}$$

Умножая первую строку на последний столбец получаем уравнение:

$$c_{r,1}y_{r,s;n_r} + c_{r,2}y_{r,s;n_r-2} + \dots + c_{r,n_r}y_{r,s;1} = c_{s,n_r}y_{r,s;1} + c_{s,n_r-1}y_{r,s;2} + \dots + c_{s,1}y_{r,s;n_r}.$$

Поскольку это уравнение должно быть выполнено для всех $y_{r,s;1}, y_{r,s;2}, \dots, y_{r,s;n_r} \in \mathbb{F}$, то подставляя $y_{r,s;n_r-i+1} = 1$, а остальные нули, получаем $c_{r,i} = c_{s,i}$ для всех $i = 1, \dots, n_r$. Эти соотношения полностью определяют структуру матрицы C . Осталось показать, что алгебра $\mathbb{F}[A]$ состоит в точности из всех матриц такого вида.

Сперва рассмотрим случай, когда $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \lambda$. Пусть без ограничения общности $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$. Рассмотрим матрицы $B_j = (A - \lambda E)^j \in \mathbb{F}[A]$, $j = 0, \dots, n_1 - 1$. Они составляют базис алгебры $\mathbb{F}[A]$, поскольку линейно независимы по построению (диагональ единиц смещается на одну позицию вверх на каждом шаге) и их количество совпадает с размерностью $\mathbb{F}[A]$ ($\dim \mathbb{F}[A] = \deg \mu_A(t) = n_1$ — максимальный размер жордановой клетки). Тогда

$$C = \sum_{j=0}^{n_1-1} c_{1,j} B_j \in \mathbb{F}[A].$$

Пусть теперь у матрицы A есть $k \geq 2$ собственных чисел. Расположим жордановы клетки A таким образом, чтобы все одинаковые собственные числа стояли

рядом, $A = J_1 \oplus \dots \oplus J_k$, в жордановой матрице J_i собраны все клетки с λ_k . Тогда $\mu_A(t) = \prod_{i=1}^k \mu_{J_i}(t)$. Положим $f_l(t) = \prod_{i=1, i \neq l}^k \mu_{J_i}(t)$. Тогда $f_l(J_q) = 0$ при $q \neq l$ и $f_l(J_l)$ является обратимой матрицей, поскольку среди корней $f_l(t)$ нет λ_l . Тогда у матриц $(A - \lambda_l E)^j f_l(A)$, j проходит значения от 0 до максимального размера жордановой клетки для λ_l без единицы, вне l -го диагонального блока стоят 0, а в l -ом блоке стоит базис алгебры $\mathbb{F}[J_l]$, т.к. $f_l(J_l)$ обратима. Значит утверждение верно и в этом случае. □

Задачи к лекции 3.

Задача 1. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$ — матрица ранга 1. а) Найдите явный вид централизатора A в жордановой форме. б) Вычислите $\dim \mathcal{C}(A)$.

Задача 2. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Найдите максимальную размерность централизатора нескаларной матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Задача 3. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Покажите, что $\mathcal{C}(A)$ является коммутативной подалгеброй тогда и только тогда, когда A — циклическая матрица.

Задача 4. Найдите централизатор матрицы $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Используя теорему о двойном централизаторе найдите а) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)))$, б) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))))$.

Задача 6. Найдите, для каких комплексных матриц $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^2)$.

5 Коммутативные матричные подалгебры. Теорема Шура (верхняя граница размерности коммутативной алгебры). Описание алгебр максимальной размерности. Построение максимальной по включению коммутативной алгебры размерности, меньшей порядка матриц.

5.1 Лекция 4.

Из теоремы о триангулируемости коммутативного семейства матриц для коммутативной подалгебры $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ следует оценка размерности $\dim \mathcal{A} < \frac{n(n+1)}{2}$. Покажем, что точная верхняя граница размерности, действительно, является квадратичной функцией от порядка матриц.

Теорема 5.1 (Теорема Шура). Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Если $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, то $\dim \mathcal{A} \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$.

Для доказательства теоремы Шура подробнее остановимся на структуре (и возможном блочном строении) коммутативных алгебр.

Определение 5.2. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — подалгебра (без единицы) состоящая из нильпотентных матриц (нильпотентная алгебра). По теореме 3.7 она триангулируема. Отметим, что произведение любых n верхне-нильтреугольных матриц равно нулю. Поэтому произведение любых n матриц из $\mathcal{A}$ также равно нулю. *Индексом нильпотентности* или *классом* алгебры $\mathcal{A}$ назовём наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$, что произведение любых k матриц алгебры $\mathcal{A}$ равно нулю.

Пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная подалгебра класса k , $2 \leq k \leq n$. Из $k \geq 2$ в частности следует, что $\mathcal{A} \neq 0$. Рассмотрим пространство $U_1 = \mathcal{A}\mathbb{F}^n$. Тогда $U \neq 0$ и при этом $U \neq \mathbb{F}^n$, поскольку иначе $\mathcal{A}^k\mathbb{F}^n = \mathcal{A}^{k-1}\mathbb{F}^n \neq 0$ и одновременно $\mathcal{A}^k\mathbb{F}^n = 0$, противоречие. Далее имеем цепочку вложенных подпространств $\mathbb{F}^n \supset U_1 \supset U_2 = \mathcal{A}U_1 = \mathcal{A}^2\mathbb{F}^n \supset \dots \supset U_{k-1} = \mathcal{A}^{k-1}\mathbb{F}^n \supset \{0\}$. И если для этой цепочки построить дополняющие пространства W_i как в теореме 2.12 и взять объединение их базисов, то получим, что в этом базисе все матрицы из $\mathcal{A}$ имеют блочно-нильтреугольный вид

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ O_{n_2, n_1} & O_{n_2} & \dots & A_{2k} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ O_{n_k, n_1} & O_{n_k, n_2} & \dots & O_{n_k} \end{pmatrix},$$

где $O_{p,q}$ — нулевая матрица размера $p \times q$, $A_{p,q}$ — какая-то матрица размера $n_p \times n_q$.

Для алгебр класса 2 этого представления достаточно, чтобы доказать теорему Шура.

Лемма 5.3. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная подалгебра класса 2. Тогда $\mathcal{A}$ — коммутативна и $\dim \mathcal{A} \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Доказательство. Поскольку произведение любых двух матриц $A, B \in \mathcal{A}$ равно нулю, то $AB = O = BA$ и алгебра коммутативна.

Максимальная размерность $\mathcal{A}$ равна максимуму выражения $k(n-k)$, $k = 1, \dots, n-1$. Максимум функции $x(n-x)$ достигается при $x = \frac{n}{2}$ и равен $\frac{n^2}{4}$, но поскольку мы рассматриваем целые значения k , то $\dim \mathcal{A} \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. $\square$

В общем случае, при $k \geq 3$ блочный-нильтреугольный вид есть и у некоммутативных алгебр, поэтому для оценивания размерности коммутативных алгебр нужны дополнительные рассуждения.

Теорема 5.4. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная коммутативная подалгебра класса $k \geq 2$. Тогда $\dim \mathcal{A} \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Доказательство. Как и ранее, рассмотрим пространство $U_1 = \mathcal{A}\mathbb{F}^n$. Далее рассмотрим факторпространство $\mathbb{F}^n/U_1$, пусть $[x_1] = x_1 + U_1, \dots, [x_m] = x_m + U_1$ — его базис. Положим $V = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \subseteq \mathbb{F}^n$. Каждой матрице $A \in \mathcal{A}$ можно сопоставить линейное отображение $\theta(A) : V \rightarrow U_1$, так, что на базисе V оно задано правилом $\theta(A)(x_i) = Ax_i$, а далее продолжаем по линейности. Заметим, что θ по построению является линейным отображением пространства $\mathcal{A}$ в пространство линейных отображений $\mathcal{L}(V, U_1)$. Докажем его инъективность. Пусть $\theta(A) = O$. Тогда $Ax_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. Добавим к подалгебре $\mathcal{A}$ единичную матрицу, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \langle E \rangle$. Покажем, что $\mathcal{A}_1 V = \mathbb{F}^n$. Обозначим $W = \mathcal{A}_1 V$. Поскольку $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$, то W — инвариантно относительно $\mathcal{A}$. $\dim V = m = n - \dim U_1$, поскольку $x_1, \dots, x_m$ линейно независимы по модулю U_1 , в частности они просто линейно независимы. Тогда если $u_1, \dots, u_{n-m}$ — базис U_1 , то $x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_{n-m}$ — базис $\mathbb{F}^n$. Значит, $V + \mathcal{A}\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^n$, $\mathcal{A}_1 V + \mathcal{A}_1 U_1 = \mathcal{A}_1 \mathbb{F}^n$, $\mathcal{A}_1 V + U_1 = \mathbb{F}^n$, $W + \mathcal{A}\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^n$. Поскольку W инвариантно относительно $\mathcal{A}$, в последнем равенстве можно перейти к факторпространству и факторам алгебры $\mathcal{A}$, т.е. $\tilde{\mathcal{A}}\mathbb{F}^n/W = \mathbb{F}^n/W$. Но как мы уже упоминали на второй лекции, факторы нильпотентных операторов нильпотентны, и если факторпространство ненулевое, то последнее равенство приводится к такому же противоречию, что и $\mathcal{A}\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^n$. Факторпространство нулевое, если $W = \mathcal{A}_1 V = \mathbb{F}^n$.

Тогда любой вектор $v \in \mathbb{F}^n$ представляется в виде $A_1 x_1 + \dots + A_m x_m$, $A_i \in \mathcal{A}_1$, откуда с использованием коммутативности алгебры получаем, что $Av = A(A_1 x_1 + \dots + A_m x_m) = A_1 Ax_1 + \dots + A_m Ax_m = 0$.

Таким образом, максимальная размерность $\mathcal{A}$ не превосходит максимальной размерности пространства $\mathcal{L}(V, U_1)$, которая равна максимуму выражения $m(n - m)$, $m = 1, \dots, n - 1$. Из доказанного в предыдущей лемме получаем $\dim \mathcal{A} \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. $\square$

Лемма 5.5. Рассмотрим функцию $S(n) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$. Тогда $S(n + m) \geq S(n) + S(m)$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $n = m = 1$, либо $\{n, m\} = \{1, 2\}$.

Доказательство. Имеем $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, поэтому $S(2) = S(1) + S(1)$. Пусть $n \geq m$ и хотя бы одно из них больше 1. Тогда

$$\begin{aligned} S(n+m) &= \left\lfloor \frac{n^2 + m^2 + 2mn}{4} \right\rfloor + 1 \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor + 1 = S(n) + \left\lfloor \frac{m^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor \geq \\ &\geq S(n) + \left\lfloor \frac{m^2}{4} \right\rfloor + 1 = S(n) + S(m), \end{aligned}$$

причём последнее неравенство превращается в равенство только если $\left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor = 1$. Значит, когда $n \geq m \geq 2$ оно строгое. Остаются случаи $m = 1$, $n = 2, 3$. Если $S(3) = 3$, $S(4) = 5$, поэтому $S(3) = S(2) + S(1)$, а $S(4) > S(3) + S(2)$. $\square$

Доказательство теоремы Шура. Проведем доказательство индукцией по n . Для $n = 1$ есть только одномерная ненулевая подалгебра, поэтому утверждение верно.

Шаг индукции. Если у любой матрицы A из алгебры $\mathcal{A}$ ровно одно собственное значение λ_A , то $A - \lambda_A E$ — нильпотентная, и поэтому $\mathcal{A} = \langle E \rangle \oplus \mathcal{A}_0$, где $\mathcal{A}_0$ — нильпотентная коммутативная подалгебра. Тогда по теореме 5.4 $\dim \mathcal{A} = 1 + \dim \mathcal{A}_0 \leq 1 + \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Пусть теперь у матрицы A есть $k \geq 2$ собственных чисел. Расположим жордановы клетки A таким образом, чтобы все одинаковые собственные числа стояли рядом, $A = J_1 \oplus \dots \oplus J_k$, в жордановой матрице J_i собраны все клетки с λ_k . Тогда $\mu_A(t) = \prod_{i=1}^k \mu_{J_i}(t)$. Положим $f_1(t) = \prod_{i=2}^k \mu_{J_i}(t)$. Тогда $f_1(J_q) = O$ при $q \geq 2$ и $f_1(J_1)$ является обратимой матрицей. Тогда у матриц $(A - \lambda_1 E)^j f_1(A)$, j проходит значения от 0 до максимального размера жордановой клетки для λ_1 без единицы, вне 1-го диагонального блока стоят 0, а в 1-ом блоке стоит базис алгебры $\mathbb{F}[J_1]$, т.к. $f_1(J_1)$ обратима. Размер матрицы J_1 обозначим за n_1 . Через базис алгебры $\mathbb{F}[J_1]$ выражается единичная матрица. Значит, в алгебре $\mathcal{A}$ есть матрица $E_1 = \text{diag}(E_{n_1}, O)$. Поскольку $\mathcal{A}$ коммутативна, то $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(E_1)$ и из предложения 4.5 получаем, что все матрицы в $\mathcal{A}$ имеют блочно-диагональный вид. Следовательно, $\mathcal{A} = \text{diag}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, $\mathcal{B}$ — коммутативная подалгебра в $M_{n_1}(\mathbb{F})$, $\mathcal{C}$ — коммутативная подалгебра в $M_{n-n_1}(\mathbb{F})$. Тогда $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} + \dim \mathcal{C}$ и по предположению индукции, $\dim \mathcal{B} \leq S(n_1)$, $\dim \mathcal{C} \leq S(n - n_1)$ и по лемме 5.5 $\dim \mathcal{A} \leq S(n)$. $\square$

Из леммы 5.5 следует, что блочно-диагональная алгебра будет иметь максимальную размерность только для $n = 2, 3$. Эти случаи рассмотрим отдельно.

Лемма 5.6. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра. Тогда

1. при $n = 2$ $\dim \mathcal{A} = S(2) = 2$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена либо с алгеброй диагональных матриц, либо с алгеброй матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$; 2. при $n = 3$ $\dim \mathcal{A} = S(3) = 3$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена либо с алгеброй диагональных матриц $D_3(\mathbb{F})$, либо с алгеброй матриц вида $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$; либо $\mathcal{A} = \langle E \rangle \oplus \mathcal{A}_0$, где $\mathcal{A}_0$ — нильпотентная коммутативная подалгебра, $\mathcal{A}_0$ имеет класс 2 или 3, и сопряжена с одной из алгебр, состоящих из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Доказательство. 1. Пусть $n = 2$. Если в алгебре есть матрицы с двумя собственными числами, получаем сумму двух блоков размера один, т.е. алгебру диагональных матриц $D_2(\mathbb{F})$. Иначе, из значения размерности следует, что в алгебре есть нескаллярная матрица с одним собственным числом, она подобна E_{12} (в $M_2(\mathbb{F})$ это циклическая матрица), значит, $\mathcal{A} = \mathbb{F}[E_{12}]$ — второй вариант алгебры.

2. Пусть $n = 3$. Если в $\mathcal{A}$ есть матрица с тремя различными собственными числами, что она подобна диагональной циклической матрице D , и при переходе к жорданову базису $\mathcal{A} = \mathcal{C}(D) = D_3(\mathbb{F})$. Если у матриц из $\mathcal{A}$ максимум два различных собственных числа, то она разбивается в сумму блоков размеров 2 и 1, в блоке порядка 2 у всех матриц одно собственное число кратности 2, получаем алгебру матриц

вида $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Пусть теперь у всех матриц из $\mathcal{A}$ ровно одно собственное число.

Тогда $\mathcal{A} = \langle E \rangle \oplus \mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0$ — нильпотентная. Утверждение про алгебры класса 2 будет доказано далее в общем случае $n \geq 2$. Пусть $\mathcal{A}_0$ имеет класс 3 и приведена к треугольному виду. По условию существуют $A, B \in \mathcal{A}_0$, $AB \neq O$. У этой матрицы ненулевой элемент может быть только на позиции $(1, 3)$. Имеем $(AB)_{13} = a_{12}b_{23} \neq 0$ и также совпадает с $b_{12}a_{23}$ в силу коммутативности. Это означает, что $a_{12}a_{23} \neq 0$. Тогда A — циклическая матрица, подобная $J_3(0)$. Значит, $\mathcal{A}$ подобна $\mathbb{F}[J_3(0)]$, которая

состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, □

При $n \geq 4$ максимальную размерность имеют только алгебры, полученные присоединением единичной матрицы к нильпотентной подалгебре.

Для них оценка достижима.

Пример 5.7 (Алгебра Шура). Пусть $n = k + m$, $k, m \in \mathbb{N}$ и $|k - m| \leq 1$. Рассмотрим следующую коммутативную подалгебру $\mathcal{A}_S \subseteq M_n(\mathbb{F})$:

$$\mathcal{A}_S = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} xE_k & Z \\ \hline 0 & xE_m \end{array} \right) \mid x \in \mathbb{F}, Z \in M_{k,m}(\mathbb{F}) \right\}$$

Ее размерность $\dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}_S) = 1 + km = \lfloor n^2/4 \rfloor + 1$ является максимально возможной для коммутативной подалгебры матричной алгебры, следовательно, $\mathcal{A}_S$ — максимальная коммутативная подалгебра $M_n(\mathbb{F})$.

Гипотеза 5.8 (гипотеза Густафсона). Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная коммутативная подалгебра класса $k \geq 2$. Тогда $\dim \mathcal{A} \leq \left\lfloor \frac{(n-k+2)^2}{4} \right\rfloor + k - 2$.

Эта гипотеза доказана для некоторых классов нильпотентности, но в общем случае остается открытой. В предположении, что она верна, на алгебрах классов нильпотентности $k \geq 3$ а максимум размерности не достигается.

Рассмотрим дополнительно структуру алгебр класса 2.

Теорема 5.9. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $n \geq 2$. Тогда в $M_n(\mathbb{F})$ существует $n - 1$ различная с точностью до сопряжения максимальная по включению коммутативная нильпотентная подалгебра класса 2.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная подалгебра класса 2. Как показано выше, есть базис в котором все матрицы из $\mathcal{A}$ имеют блочно-нильтреугольный вид

$$A = \begin{pmatrix} O_m & A_{12} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m} \end{pmatrix},$$

где A_{12} — какая-то матрица размера $m \times (n - m)$. Все матрицы A_{12} , $A \in \mathcal{A}$ образуют подпространство U в пространстве прямоугольных матриц $M_{m,n-m}(\mathbb{F})$. Заметим, что если подпространство собственное, то алгебру можно вложить в большую, добавив матрицы, у которых блоки A_{12} лежат в дополнении U до $M_{m,n-m}(\mathbb{F})$.

Пусть теперь в нашей алгебре блок размера $m \times (n - m)$ имеет максимальную размерность.

Пусть $B \in M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная матрица и $B \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Разобьём B на блоки: $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$. Тогда $AB = \begin{pmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m} \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} O_m & B_{11}A_{12} \\ O_{n-m,m} & B_{21}A_{12} \end{pmatrix}$. Если $A_{12}B_{21} = O_m$ для всех $A_{12} \in M_{m,n-m}(\mathbb{F})$, то $B_{21} = O_{n-m,m}$. Из условия нильпотентности B при $B_{21} = O$ матрицы B_{11} и B_{22} тоже нильпотентны. Имеем $A_{12}B_{22} = B_{11}A_{12}$

для всех $A_{12} \in M_{m,n-m}(\mathbb{F})$. Последовательная подстановка $E_{1,j}$, $j = 1, \dots, n-m$ показывает, что $B_{22} = O$. Тогда подстановка матричных единиц вместо A_{12} в уравнение $B_{11}A_{12} = O$ даст $B_{11} = O$. Т.е. $B = \begin{pmatrix} O & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$.

Если $t \neq m, n-m$, то $t(n-t) \neq m(n-m)$, поэтому алгебры с блоками разных размеров имеют разные размерности, значит не только не сопряжены, но и вообще не изоморфны.

Остаётся случай $t = n-m$. Алгебры будут изоморфны, но докажем, что не сопряжены. От противного. Пусть без ограничения общности $m > t$ и $T \in M_n(\mathbb{F})$ — обратимая матрица.

$$T \begin{pmatrix} O_m & A_{12} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m} \end{pmatrix} = (O_{n,m} \quad B_{n,n-m}),$$

$$\begin{pmatrix} O_{n-m} & B_{12} \\ O_{m,n-m} & O_m \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} C_{n-m,n} \\ O_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Из равенства таких матриц, получаем, что $T \begin{pmatrix} O_m & A_{12} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{n-m,m} & C_{n-m,n-m} \\ O_{m,m} & O_{m,n-m} \end{pmatrix}$.

Поскольку $m > n-m$ полученное пространство имеет размерность $(n-m)^2 < m(n-m)$, т.е. умножение всех матриц пространства размерности $m(n-m)$ слева на обратимую матрицу T уменьшило размерность пространства до $(n-m)^2$. Это невозможно в силу обратимости T .

□

Задачи к лекции 4.

Задача 1. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Покажите, что коммутативная алгебра $\mathbb{F}[A]$ является максимальной по включению тогда и только тогда, когда A — циклическая матрица.

Задача 2. Докажите следующее свойство функции Шура $S(n)$: $S(n) \leq S(n-1) + \frac{n}{2}$ для всех $n \geq 2$.

Задача 3. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \geq 2$. Докажите, что в коммутативной нильпотентной подалгебре $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ класса n найдется матрица A такая, что $A^{n-1} \neq O$.

Задача 4. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \geq 2$. Докажите, что с точностью до сопряженности в $M_n(\mathbb{F})$ есть ровно одна нильпотентная коммутативная подалгебра класса n и она максимально по включению.

Задача 5. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \geq 4$. Покажите (на примере), что в коммутативной нильпотентной подалгебре $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ класса $k < n$ не всегда найдется матрица A такая, что $A^{k-1} \neq O$.

5.2 Лекция 5.

При исследовании максимальных по включению коммутативных алгебр интересен также вопрос минимальной возможной размерности. Известна нижняя оценка Лаффи асимптотики $n^{\frac{2}{3}}$.

Теорема 5.10. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — максимальная по включению нильпотентная коммутативная подалгебра класса $k \geq 2$, $\mathcal{A}_1 = \langle E \rangle \oplus \mathcal{A}$. Тогда $\dim \mathcal{A}_1 \geq (2n)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $V_0 = \ker \mathcal{A}$, т.е. все такие $x \in \mathbb{F}^n$, что $\mathcal{A}x = 0$. Пусть $t = \dim V_0$. Тогда взяв базис $\mathbb{F}^n$, в котором первые t векторов составляют базис V_0 , получим следующий блочный вид для матриц из $\mathcal{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} O_t & A_{12} \\ O_{n-t,t} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть W — дополнение V_0 до $\mathbb{F}^n$, т.е. в данном базисе это столбцы $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$, $w \in \mathbb{F}^{n-t}$, и пусть $W_0 = \{w \in \mathbb{F}^{n-t} \mid A_{12}w = 0 \text{ для всех } A \in \mathcal{A}\}$. Заметим, что если $w \in W_0$, то и $A_{22}w \in W_0$ для всех $A \in \mathcal{A}$: действительно, для матрицы A^2 блок $(1, 2)$ — это $A_{12}A_{22}$, поэтому по определению W_0 имеем $A_{12}A_{22}w = 0$. Пусть $\mathcal{B} = \{A_{22} \mid A \in \mathcal{A}\}$. По определению $\mathcal{B}$ является коммутативной нильпотентной подалгеброй в M_{n-t} и пространство W_0 инвариантно относительно $\mathcal{B}$.

Докажем, что $W_0 = 0$. От противного, пусть $W_0 \neq 0$. По теореме 3.7 нильпотентная алгебра $\mathcal{B}$ триангулизуема на W_0 , т.е. найдется $y \neq 0, y \in W_0$, такой что $\mathcal{B}y = 0$ (первый вектор нового базиса). В этом случае

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12}y \\ A_{22}y \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in V_0$, противоречие. Положим $d_1 = \dim \{A_{12} \mid A \in \mathcal{A}\}$. Для каждой конкретной матрицы $A \in \mathcal{A}$ уравнение $A_{12}x = 0$, $x \in \mathbb{F}^{n-t}$ эквивалентно однородной системе из t линейных уравнений относительно $n-t$ неизвестных. Поскольку в совокупности по всем матрицам у таких систем общим является только нулевое решение, то $n-t \leq td_1$ (иначе обязательно будут свободные неизвестные и бесконечно много решений).

По построению, $\dim \mathcal{A}_1 \geq d_1 + 1$, значит, $\dim \mathcal{A}_1 \geq \frac{n}{k}$.

Теперь проведём аналогичные рассуждения для алгебры $\mathcal{B}$, с той разницей, что будем смотреть умножение на вектора-строки справа. Пусть $Y = \mathbb{F}^{n-t}$ — пространство всех строк длины $n-t$. По аналогии с V_0 рассматриваем $Y_0 = \{y \in Y \mid y\mathcal{B} = 0\}$,

$s = \dim Y$. Пусть $Y = U \oplus Y_0$, выбираем базис Y , построенный как объединение базисов U и Y_0 . В этом базисе матрицы $A_{22} \in \mathcal{B}$ примут вид

$$A_{22} = \begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} \\ O_{s, n-t-s} & O_s \end{pmatrix}.$$

Повторяя рассуждения про пространство решений системы уравнений, получаем оценку

$$\dim \mathcal{B} \geq \frac{n-t}{s} - 1.$$

Вспомним про условие максимальности алгебры, т.е. $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. В построенном базисе матрицы алгебры $\mathcal{A}$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} O_t & B_{12} & B_{13} \\ O & B_{22} & B_{23} \\ O & O & O_s \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} O_t & O & Z \\ O & O & O \\ O & O & O_s \end{pmatrix}, \quad Z \in M_{t,s}(\mathbb{F}),$$

коммутируют со всеми матрицами $A \in \mathcal{A}$, следовательно, содержатся в $\mathcal{A}$. Отсюда

$$\dim \mathcal{A} \geq st + 1 + \dim \mathcal{B} \geq st + \frac{n-t}{s}.$$

Если $t \leq 2^{-\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}$, то из оценки $\dim \mathcal{A} \geq \frac{n}{t}$ получаем, что $\dim \mathcal{A} \geq (2n)^{\frac{2}{3}}$.

Пусть $t > 2^{-\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}$. Из оценки $\dim \mathcal{A} \geq st + 1 + \dim \mathcal{B} \geq st + \frac{n-t}{s}$ получаем, что

$$\dim \mathcal{A} \geq 2\{t(n-t)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Как мы показали ранее, функция $x(n-x)$ возрастает на отрезке $[0, \frac{n}{2}]$, поэтому

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{A} &\geq 2\{2^{-\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}(n - 2^{-\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}})\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= (2n)^{\frac{2}{3}}\{1 - (2n)^{-\frac{2}{3}}\}^{\frac{1}{2}} > (2n)^{\frac{2}{3}}\{1 - (2n)^{-\frac{2}{3}}\} = (2n)^{\frac{2}{3}} - 1. \end{aligned}$$

□

Теорема 5.11 (Теорема Лаффи, 1985). Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — максимальная по включению коммутативная подалгебра. Тогда $\dim \mathcal{A} \geq (2n)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Доказательство. Рассуждая как в доказательстве теоремы Шура, заметим, что если в $\mathcal{A}$ все матрицы имеют единственное собственное число, то $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию предыдущей теоремы 5.10 и $\dim \mathcal{A} \geq (2n)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Иначе, когда в $\mathcal{A}$ есть матрицы с несколькими собственными числами, то $\mathcal{A}$ сопряжена с блочно-диагональной алгеброй. Повторяя процесс для диагональных блоков, можем считать, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{B}_r$, где все алгебры $\mathcal{B}_i \subset M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \dots, r$ удовлетворяют условию предыдущей теоремы 5.10 и $\dim \mathcal{B}_i \geq (2n_i)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Для $n \leq 4$ используя описание алгебр из леммы 5.6 получаем оценку $\dim \mathcal{A} \geq n$.

Тогда последовательное применение неравенств

$$x + \{2(n-x)\}^{\frac{2}{3}} > (2n)^{\frac{2}{3}}, \quad 1 \leq x < n-4,$$

$$(2x)^{\frac{2}{3}} + \{2(n-x)\}^{\frac{2}{3}} > 1 + (2n)^{\frac{2}{3}}, \quad 4 \leq x \leq \frac{n}{2},$$

к размерностям блоков, доказывает оценку для размерности $\mathcal{A}$. □

Точность этой оценки неизвестна.

Рассмотрим отдельно в качестве примера, на котором удастся построить точные оценки и конкретные конструкции алгебр, нильпотентные алгебры класса 3.

Пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная подалгебра класса 3 такая, что алгебра $\mathcal{A}_1 = \langle E \rangle \oplus \mathcal{A}$ является максимальной по включению. Как мы показали на прошлой лекции, существует базис, в котором все матрицы из $\mathcal{A}$ принимают вид

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & A_{12} & A_{13} \\ O_{n_2, n_1} & O_{n_2} & A_{23} \\ O_{n_3, n_1} & O_{n_3, n_2} & O_{n_3} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & O & Z \\ O & O_{n_2} & O \\ O & O & O_{n_3} \end{pmatrix}, \quad Z \in M_{n_1, n_3}(\mathbb{F}),$$

коммутируют со всеми матрицами $A \in \mathcal{A}_1$, следовательно, содержатся в $\mathcal{A}_1$. Положим $d = \dim \mathcal{A} - n_1 n_3$. Тогда d — это размерность подпространства $\mathcal{A}_0$, соответствующего всем матрицам из $\mathcal{A}$ с $A_{13} = O$. Матрица вида

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & B & O \\ O_{n_2, n_1} & O_{n_2} & C \\ O_{n_3, n_1} & O_{n_3, n_2} & O_{n_3} \end{pmatrix}$$

лежит в $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, если и только если $BA_{23} = A_{12}C$ для всех $A \in \mathcal{A}_0$. Для каждой фиксированной матрицы $A \in \mathcal{A}_0$ это матричное уравнение эквивалентно однородной

системе из $n_1 n_3$ линейных уравнений на $n_1 n_2 + n_2 n_3$ неизвестных элементов матриц B и C . Объединяя уравнения по всем матрицам из базиса $\mathcal{A}_0$ получаем в совокупности $dn_1 n_3$ уравнений, значит размерность пространства решений не меньше $n_2(n_1 + n_3) - dn_1 n_3$. По условию на централизатор, все эти матрицы-решения содержатся в $\mathcal{A}_0$, откуда

$$\begin{aligned} n_2(n_1 + n_3) - dn_1 n_3 &\leq d, \\ d &\geq n_2 \frac{n_1 + n_3}{n_1 n_3 + 1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\dim \mathcal{A}_1 \geq n_2 \frac{n_1 + n_3}{n_1 n_3 + 1} + n_1 n_3 + 1.$$

По условию на размер матриц, $n_2 = n - (n_1 + n_3)$. Подберем n_1, n_3 , чтобы минимизировать правую часть вышеозначенного неравенства. Из симметричности, можно рассмотреть $n_1 = n_3 = m \geq 1$. Пусть $f(m) = \frac{2m(n - 2m)}{m^2 + 1} + m^2 + 1 = \frac{2mn}{m^2 + 1} + m^2 + \frac{4}{m^2 + 1} - 3$. Найдем нули производной $f'(x)$, $f'(x) = 2x - \frac{2n}{x^2 + 1} + \frac{4(n - 2x)}{(x^2 + 1)^2}$. Минимум выражения достигается для x , являющихся корнями $x^3 + 3x - n = 0$. В этом случае $f(m) = 3m^2 + 1$. В частности для корней уравнения $x^3 + 3x - n = 0$ имеем $m > n^{\frac{1}{3}} - n^{-\frac{1}{3}}$ и

$$\dim \mathcal{A}_1 \geq \left[3n^{\frac{2}{3}} - 4 \right],$$

т.к. $\dim \mathcal{A}_1 > 3(n^{\frac{1}{3}} - n^{-\frac{1}{3}})^2 + 1 > 3n^{\frac{2}{3}} - 5 \geq \left[3n^{\frac{2}{3}} - 5 \right]$.

Из этих оценок, в частности следует, что $\dim \mathcal{A}_1 \geq n$ для $n \leq 13$.

Основываясь на размерности централизатора и подобных малых примерах Герштенхабером в 1961г. была выдвинута гипотеза, утверждающая что размерность максимальной по включению коммутативной подалгебры алгебры $M_n(\mathbb{F})$ всегда не меньше числа n (порядка матриц). Рассмотрим контрпример Куртера, который является минимальным относительно размера матриц.

Пример 5.12 (Алгебра Куртера). Построим коммутативную подалгебру алгебры $M_{14}(\mathbb{F})$ размерности $\dim(\mathcal{A}_C) = 13$.

Рассмотрим множество $\mathcal{B}$ всех матриц порядка 14 следующего вида:

$$\left(\begin{array}{cc|cccccccccccc|cc} 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & & O_2 \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline x_{11} & 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & x_{11} & & & & & & & & & & & & & & & \\ x_{12} & 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & x_{12} & & & & & & & & & & & & & & & \\ x_{21} & 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & x_{21} & & & & & & & & & & & & & & & \\ x_{22} & 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & x_{22} & & & & & & & & & & & & & & & \\ z_{11} & z_{12} & & & & & & & & & & & & & & & \\ z_{21} & z_{22} & & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline y_{11} & y_{12} & z_{11} & z_{12} & z_{21} & z_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{11} & z_{12} & z_{21} & z_{22} & x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \end{array} \right),$$

где x_{ij} , y_{ij} и z_{ij} — произвольные элементы поля $\mathbb{F}$. Из определения множества $\mathcal{B}$ следует, что оно замкнуто относительно умножения и состоит из попарно коммутирующих матриц. Пусть матрица $D \in \mathcal{B}$. Она представляется в следующем блочном виде:

$$D = \begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ A & O_{10} & O \\ Y & B & O_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$D' = \begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ A' & O_{10} & O \\ Y' & B' & O_2 \end{pmatrix}$$

также матрица из $\mathcal{B}$. Тогда

$$D'D = \begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ O & O_{10} & O \\ B'A & O & O_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно произведение любых трех матриц из $\mathcal{B}$ равно нулю. Тогда $\mathcal{A}_C = \langle E_{14} \rangle \oplus \mathcal{B}$ — коммутативная подалгебра $M_{14}(\mathbb{F})$ размерности 13, где $\mathcal{B}$ — нильпотентная подалгебра класса 3.

Максимальность $\mathcal{A}_C$ оставим в качестве упражнения, разберём только главные шаги. Левый нижний 2 на 2 блок заполнен всевозможными матрицами. Для доказательства максимальной остается проверить, что нельзя добавить матриц X вида

$$\begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ P & O_{10} & O \\ O & Q & O_2 \end{pmatrix}.$$

Такая матрица лежит в $\mathcal{C}(\mathcal{B})$, если и только если $XD = DX$, т.е.

$BP = QA$ для всех $D \in \mathcal{B}$. Для каждой фиксированной матрицы $D \in \mathcal{B}$ это матричное уравнение эквивалентно однородной системе из 4 линейных уравнений на 40 неизвестных элементов матриц P и Q . Объединяя уравнения по всем матрицам из базиса получаем в совокупности 32 уравнения, значит размерность пространства решений не меньше 8. Остаётся проверить, что ранг матрицы системы в точности равен 32.

Задачи к лекции 5.

Во всех задачах поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Задача 1. Проверьте максимальность по включению для алгебры Куртера (осталось проверить, что матрица СЛУ имеет ранг 32).

Задача 2. Приведите пример максимальной по включению коммутативной подалгебры $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ размерности n .

Задача 3. Верно ли, что произвольная матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ содержится в максимальной по включению коммутативной подалгебре?

Задача 4. Постройте максимальную по включению коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, содержащую жорданову матрицу с собственным числом 0 из двух клеток размеров $n - 1$ и 1.

Задача 5. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $k + m + 1 \leq n$. Рассмотрим матрицу $B = E_{m,m+1} + E_{m+1,m+2} + \dots + E_{m+k,m+k+1} \in M_n(\mathbb{F})$. Возьмём подпространство $\mathcal{B}_{k,m} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, порождённое матрицами из $\mathbb{F}[B]$ и матричными единицами $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $m + k + 1 \leq j \leq n$. Покажите, что

- а) $\mathcal{B}_{k,m}$ является нильпотентной коммутативной подалгеброй в $M_n(\mathbb{F})$ класса $k + 2$;
- б) алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{k,m} \oplus \langle E \rangle$ является максимальной по включению.