Структурная теория матриц

О.В. Маркова (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

2024/2025

Версия от 12 декабря 2024г.

1 Напоминание и предварительные сведения

Определение 1.1. *Ассоциативное кольцо с единицей* — это множество R с заданными на нём операциями сложения «+» и умножения « · » так, что

1. R — абелева группа по сложению,
2. R — моноид (полугруппа с единицей 1) по умножению,
3. выполнены две аксиомы дистрибутивности:

$$\forall a, b, c \in R\colon\ c(a+b) = ca + cb \ \ \&\ \ (a+b)c = ac + bc.$$

Определение 1.2. *Тело* — кольцо с $1 \neq 0$, в котором всякий ненулевой элемент обратим. *Поле* — коммутативное тело.

Определение 1.3. Поле $\mathbb{F}$ называется *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен положительной степени над $\mathbb{F}$ имеет хотя бы один корень в $\mathbb{F}$.

Определение 1.4. Непустое множество V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством* над полем $\mathbb{F}$, если заданы операции сложения $+ : V \times V \to V$ и умножения $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ скаляров из $\mathbb{F}$ на векторы из V такие, что выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall u, v, w \in V,\ (u+v)+w = u+(v+w)$ (*ассоциативность сложения векторов*);
2. $\forall u, v \in V,\ u+v = v+u$ (*коммутативность сложения*);
3. существует вектор 0 такой, что $v + 0 = 0 + v = uv\ \forall v \in V$, (*существование нейтрального по сложению элемента*);

4. для любого $v \in V$ существует вектор $-v$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = 0$ (*существование обратного по сложению, или противоположного элемента*);
5. $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall v, w \in V$, $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ (*дистрибутивность умножения числа на вектор*);
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall v \in V$, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (*дистрибутивность умножения вектора на число*);
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall v \in V$, $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (*ассоциативность умножения вектора на число*);
8. $\forall v \in V$, $1 \cdot v = v$ (*нейтральность числа 1 по умножению*).

(Напомним, что выполнение аксиом 1–4 определяет, что $(V, +)$ является абелевой группой.)

Определение 1.5. *Базис* векторного пространства — упорядоченная линейно независимая система векторов, через которую выражается (в виде линейной комбинации) произвольный вектор пространства. Число векторов в базисе определено однозначно и называется *размерностью* пространства V, обозначается $\dim V$.

Предложение 1.6. Если V — конечномерное пространство и $V_1, V_2, \ldots$ последовательность его подпространств такая, что $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_k \subseteq \ldots$, иными словами, последовательность вложенных подпространств, то существует номер $N \in \mathbb{N}$, что с этого шага все пространства в цепочке совпадают, т.е. $V_N = V_{N+1} = \ldots$. Если дополнительно известно, что до шага N цепочка была строго возрастающей, т.е. $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_N$, то

$$N \leqslant \dim V_N - \dim V_1 + 1 \leqslant \dim V + 1.$$

Доказательство. Здесь используется конечномерность пространства и монотонность функции размерности для вложенных пространств: $V_k \subset V_{k+1}$ тогда и только тогда, когда $\dim V_k < \dim V_{k+1}$. Имеем неубывающую ограниченную последовательность натуральных чисел $d_k = \dim V_k$, $d_k \leqslant \dim V$ для всех k. Для неё существует номер $N \in \mathbb{N}$, что последовательность становится константной $d_N = d_{N+1} = \ldots$. Равенство размерностей влечёт равенство самих вложенных пространств.

Если известно строгое возрастание, то $\dim V_k - \dim V_{k-1} \geqslant 1$ при $2 \leqslant k \leqslant N$ и получаем оценку

$$\dim V_N - \dim V_1 = \sum_{k=2}^{N} (\dim V_k - \dim V_{k-1}) \geqslant \sum_{k=2}^{N} 1 = N - 1,$$

эквивалентно,

$$N \leqslant \dim V_N - \dim V_1 + 1.$$

Дополнительно мы знаем, что $\dim V_N \leqslant \dim V$, $\dim V_1 \geqslant 0$, откуда $N \leqslant \dim V + 1$. □

2 Основные числовые характеристики матричных подалгебр. Теорема Бернсайда о матричных алгебрах и её следствия о блочной структуре и возможных размерностях собственных подалгебр алгебры матриц над алгебраическими замкнутыми полями.

Определение 2.1. *Алгебра* $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ — это кольцо со структурой векторного пространства над $\mathbb{F}$, причём выполнено $(ab)\alpha = a(b\alpha) = (a\alpha)b$ для $a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

Пример 2.2. Примеры алгебр: алгебра матриц $M_n(\mathbb{F})$, $\mathcal{L}(V)$— алгебра линейных операторов на векторном пространстве V.

Поскольку алгебра является векторным пространством, одной из основных числовых характеристик алгебры является размерность $\dim \mathcal{A}$.

Определение 2.3. Пусть подмножество $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{A}$ содержит её единицу и само является алгеброй относительно тех же операций. Тогда $\mathcal{B}$ будем называть *подалгеброй* алгебры $\mathcal{A}$.

Можно, конечно, рассматривать и подалгебры без единицы, например, нулевую. Случаи, когда наличие единицы не предполагается, будем отдельно оговаривать.

Определение 2.4. Назовём подпространство U арифметического пространства $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n *инвариантным относительно подалгебры* $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, если $Au \in U$ для любых $A \in \mathcal{A}, u \in U$. Подалгебру $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ назовём *неприводимой*, если в $\mathbb{F}^n$ не содержится ненулевых собственных подпространств инвариантных относительно $\mathcal{A}$.

Для всякого ненулевого вектора $v \in \mathbb{F}^n$ множество векторов $\mathcal{A}v = \{Av | A \in \mathcal{A}\}$ является подпростанством $\mathbb{F}^n$, инвариантным относительно $\mathcal{A}$ (непосредственно видно из определения $\mathcal{A}v$). Заметим также, что $v \in \mathcal{A}v$, поскольку $\mathcal{A}$ содержит единичную матрицу, поэтому подпространство $\mathcal{A}v$ ненулевое.

Определение 2.5. Назовём вектор $x \in \mathbb{F}^n$ *циклическим для подалгебры* $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}v = \mathbb{F}^n$.

Через A^T обозначим транспонированную матрицу.

Предложение 2.6. Пусть $\mathcal{A}$ — ненулевая неприводимая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда
1. любой ненулевой вектор $x \in \mathbb{F}^n$ является циклическим для подалгебры $\mathcal{A}$;
2. аналогичное утверждение выполнено для векторов-строк: для любой ненулевой строки x^T, $x \in \mathbb{F}^n$, множество векторов-строк $x^T\mathcal{A} = \{x^TA | A \in \mathcal{A}\}$ совпадает со всем арифметическим пространством строк $\mathbb{F}^n$.

Доказательство. Утверждение пункта 1 непосредственно вытекает из двух предыдущих определений.

Докажем утверждение 2 от противного. Пусть для некоторой строки подпространство $U = x^T\mathcal{A}$— собственное. Тогда $\dim U = k < n$. Рассмотрим подпространство $U^{\perp} \subset \mathbb{F}^n$ всех столбцов v, для которых $Uv = 0$ (т.е. $uv = 0$ для любой строки $u \in U$). По теореме о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений имеем $\dim U^{\perp} = n - \dim U = n - k > 0$. Таким образом, $U^{\perp}$ — собственное неулевое подпространство пространства $\mathbb{F}^n$. При этом $U^{\perp}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Действительно, если $v \in U^{\perp}$, $u \in U$, $A \in \mathcal{A}$, то $u(Av) = (uA)v = u'v$, где $u' \in U$, поэтому $u'v = 0$ и $Av \in U^{\perp}$. Противоречие с неприводимостью алгебры $\mathcal{A}$. □

Теорема 2.7 (Теорема Бернсайда)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $n \geqslant 2$. Тогда единственная ненулевая неприводимая подалгебра алгебры $M_n(\mathbb{F})$ — это вся алгебра $M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — ненулевая неприводимая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$.

I. Покажем, что $\mathcal{A}$ содержит матрицу ранга 1. Для этого рассмотрим ненулевую матрицу $A_0 \in \mathcal{A}$ минимального ранга и докажем, что $\operatorname{rk} A_0 = 1$. Предположим противное: $\operatorname{rk} A_0 \geqslant 2$. Тогда нуйдутся такие векторы $u, v \in \mathbb{F}^n$, что множество их образов $\{A_0u, A_0v\}$ линейно независимо. Вектор A_0u является циклическим для $\mathcal{A}$, поэтому найдётся матрица $A \in \mathcal{A}$, для которой $AA_0u = v$. Отсюда, $A_0v = A_0AA_0u$ и множество $\{A_0u, A_0AA_0u\}$ линейно независимо. Подпространство $A_0\mathbb{F}^n$ ненулевое и является инвариантным относительно A_0 (инвариантность образа линейного оператора), значит также оно инвариантно относительно всех матриц вида A_0B, $B \in M_n(\mathbb{F})$, в частности, относительно A_0A. В случае алгебраически замкнутых полей, в ненулевом инвариантном подпространстве относительно матрицы содержится ненулевой собственный вектор для этой матрицы, т.е. для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{F}$ ограничение матрицы (линейного оператора) $A_0A - \lambda E$ на пространство $A_0\mathbb{F}^n$ является вырожденной матрицей. В силу замкнутости алгебры относительно операций суммы и произведения, имеем $A_1 = (A_0A - \lambda E)A_0 \in \mathcal{A}$. Матрица A_1 ненулевая, поскольку $A_1u = A_0AA_0u - \lambda A_0u = A_0v - \lambda A_0u \neq 0$ в силу линейной независимости множества векторов $\{A_0u, A_0v\}$. С другой стороны, $A_1 = A_0(AA_0 - \lambda E)$, поэтому образ A_1 (пространство $A_1\mathbb{F}^n$) содержится в образе A_0. Причём это включение строгое, в силу вырожденности ограничения $A_0A - \lambda E$ на пространство $A_0\mathbb{F}^n$. Для рангов это означает, что $0 \neq \operatorname{rk} A_1 < \operatorname{rk} A_0$. Противоречие с выбором матрицы A_0.

II. Теперь покажем, что с помощью операций в алгебре из одной матрицы ранга 1 в неприводимой алгебре можно получить все матричные единицы. Зафиксируем индексы $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и будем строить матричную единицу $E_{i,j}$. Матрица A_0 ненулевая. Возьмём любой её ненулевой столбец, пусть это k-ый столбец a_k.

В силу неприводимости в алгебре $\mathcal{A}$ есть матрица B для которой $Ba_k = e_i = (0, 0, 1, 0 \dots, 0)^T$, 1 расположена на i-ом месте (использовали утверждение 1 предложения 2.6). У матрицы BA_0 ненулевой k-ый столбец и $\operatorname{rk} BA_0 \leqslant \operatorname{rk} A_0 = 1$, значит, $\operatorname{rk} BA_0 = 1$. Тогда все столбцы этой матрицы пропорциональны её k-му столбцу,

$$BA_0 = (\alpha_1 e_i, \alpha_2 e_i, \ldots, \alpha_n e_i) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью утверждения 2 предложения 2.6, находим в алгебре $\mathcal{A}$ матрицу C такую, что $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)C = (0, 0, 1, \ldots, 0) = e_j^T$. Тогда $BA_0C = E_{i,j}$. Как известно, из матричных единиц с помощью линейных комбинаций получаются все матрицы, т.е. $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$. $\square$

Определение 2.8. Подмножество I алгебры $\mathcal{A}$ называется *(двусторонним) идеалом*, если оно является подпространством соответствующего векторного пространства алгебпры $\mathcal{A}$ и выдерживает умножение на элементы алгебры, т.е. $ax, xa \in I$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $x \in I$.

Отметим, что всякий идеал является подалгеброй (но необязательно подалгеброй с единицей), а обратное неверно. Например, множество диагональных матриц яявляется подалгеброй, но произведение диагональной и недиагональной матрицы не всегда будет диагональной матрицей.

Этот известный факт можно доказать непосредственно над любым полем, но мы отметим, что он также получается как следствие из теоремы Бернсайда.

Следствие 2.9. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $n \geqslant 2$. Тогда в алгебре $M_n(\mathbb{F})$ есть ровно два двусторонних идеала — 0 и $M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Доказательство предлагается в качествеупражнения в задачах к лекции. $\square$

Определение 2.10. *Гомоморфизм $\mathbb{F}$-алгебр* — это отображение между $\mathbb{F}$-алгебрами, которое одновременно является кольцевым гомоморфизмом и линейным отображением векторных пространств. Для алгебр с единицей мы предполагаем, что кольцевой гомоморфизм переводит единицу в единицу.
Изоморфизм= биективный гомоморфизм. *Автоморфизм* = изоморфизм в себя.

Теорема 2.11. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $n \geqslant 2$. Тогда любой автоморфизм алгебры $M_n(\mathbb{F})$ является внутренним, т.е. для любого автоморфизма $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ найдётся обратимая матрица $S \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $\varphi(A) = SAS^{-1}$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Пусть $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — некоторый авоморфизм. Как кольцевой гомоморфизм φ переводит идемпотенты в идемпотенты: если $A^2 = A$, то $(\varphi(A))^2 = \varphi(A^2) = \varphi(A)$. Возьмём идемпотентную матрицу A_1 ранга 1. Тогда

$$\dim\{A_1BA_1 | B \in M_n(\mathbb{F})\} = 1$$

и поскольку φ является биективным линейным отображением векторных пространств, то $1 = \dim\varphi(\{A_1BA_1|B \in M_n(\mathbb{F})\}) = \{\varphi(A_1)C\varphi(A_1)|C \in M_n)(\mathbb{F})\}$. Следовательно, $\operatorname{rk}\varphi(A_1) = 1$.

Идемпотентом ранга 1 является, например, матричная единица E_{11}. Она также является жордановой матрицей, поэтому любая идемпотентная матрица ранга 1 с ней сопряжена. В частности, $\varphi(E_{11}) = T^{-1}E_{11}T$. Без ограничения общности, в дальнейшем доказательстве вместо автоморфизма φ рассмотрим его композицию с сопряжением матрицей T. Для краткости, обозначим её снова за φ. В этом случае $\varphi(E_{11}) = E_{11}$.

Чтобы задать матрицу S, построим линейный оператор на $\mathbb{F}^n$, матрица которого и будет искомой. Зададим оператор σ правилом: для любой матрицы $B \in M_n(\mathbb{F})$ $\sigma(Be_1) = \varphi(B)e_1$, т.е. первый столбец матрицы B переводим в первый столбец $\varphi(B)$. Проверим корректонсть. Пусть $Be_1 = Ce_1$. Тогда $(B - C)e_1 = 0$. Поскольку e_1 — единственный ненулевой столбкц матрицы E_{11}, то $(B - C)E_{11} = O$. Применим к этому матричному равенству автоморфизм φ:

$$\varphi(B - C)\varphi(E_{11}) = \varphi(O) \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(B) - \varphi(C))E_{11} = O \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(B) - \varphi(C))e_1 = 0,$$

т.е. $\varphi(B)e_1 = \varphi(C)e_1$. Линейность σ очевидно следует по построению из линейности φ. Покажем, что σ является инъективным отображением. Действительно, пусть $\varphi(B)e_1 = 0$. Тогда $\varphi(B)E_{11} = O$, $\varphi(BE_{11}) = O$, и $BE_{11} = O$ в силу биективности φ. Таким образом, $Be_1 = 0$. Инъективный линейный оператор на конечномерном пространстве является биективным отображением.

Осталось показать, что сопряжение с помощью матрицы σ совпадает с действием автоморфизма φ. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$ — произвольная матрица. Имеем

$$\sigma(ABe_1) = \varphi(AB)e_1 = \varphi(A)\varphi(B)e_1 = \varphi(A)\sigma(Be_1),$$

или в матричной форме

$$SABe_1 = \varphi(A)SBe_1.$$

Когда B пробегает множество всех матриц, столбец $y = Be_1$ пробегает всё множество $\mathbb{F}^n$, т.е. $SAy = \varphi(A)Sy$ для любого $y \in \mathbb{F}^n$, откуда

$$SA = \varphi(A)S,$$

или в итоге
$$\varphi(A) = SAS^{-1}.$$
$\square$

Теорема 2.12. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Пусть $\mathcal{A}$ подалгебра с единицей в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда существует базис пространства $\mathbb{F}^n$, в котором любая матрица $A \in \mathcal{A}$ представляется в блочно-верхнетреугольном виде
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \dots & & A_{2k} \\ 0 & 0 & A_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & A_{kk} \end{pmatrix},$$
где $\mathcal{A}_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{F}), i = 1, \dots, k$, $n_1 + \dots + n_k = n$, и множество $\{1, \dots, k\}$ есть объединение попарно непересекающихся множеств $J_1, J_2, \dots, J_l$, причем
1. $\{A_{ii} : A \in \mathcal{A}\} = M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \dots, k$;
2. если $i, j \in J_s$, то $A_{ii} = A_{jj}$ для всех $A \in \mathcal{A}$;
3. если $i \in J_r$, $j \in J_s$ и $r \neq s$, то $\{(A_{ii}, A_{jj}) : A \in \mathcal{A}\} = M_{n_i}(\mathbb{F}) \oplus M_{n_j}(\mathbb{F})$;
4. если $i \in J_s$, то существует такая матрица $A \in \mathcal{A}$, что $A_{ii} = E$ и $A_{jj} = 0$ для всех $j \notin J_s$.

Доказательство. Если $\mathcal{A}$— неприводимая подалгебра, то по теореме Бернсайда 2.7 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$ и утверждение верно для $k = 1$ и $n_1 = n$.

Пусть у алгебры $\mathcal{A}$ есть ненулевые собственные инвариантные подпространств. Рассмотрим всевозможные цепочки вложенных подпространств вида $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = \mathbb{F}^n$, где все V_i инвариантны относительно алгебры $\mathcal{A}$. Согласно предложению 1.6 $m \leqslant n$ (начали нумерацию с 0), поэтому можно выбрать цепочку максимальной длины. Пусть $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = \mathbb{F}^n$ такова, что её длина максимальна. В конечномерном пространстве у любого подпространства есть дополнение, т.е. для каждого $i = 1, \dots, m$ существует подпространство $W_i \subseteq V_i$ такое, что $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$. Тогда $V = V_m = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$. Ввиду инвариантности всех пространств V_i относительно $\mathcal{A}$ и определения их дополннений W_i, в базисе пространства $\mathbb{F}^n$, являющегося объединением базисов пространств W_i, все матрицы из алгебры $\mathcal{A}$ имеют блочно-верхнетреугольный вид. Пусть также $n_i = \dim W_i$.

Для каждого индекса $i = 1, \dots, m$ определён линейный оператор проецирования $\mathbb{F}^n$ на W_i параллельно $\bigoplus\limits_{j \neq i} W_j$, пусть $P_i \in M_n(\mathbb{F})$ его матрица в выбранном базисе. Имеем $P_i = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, E, 0, \dots, 0)$ и $P_1 + \ldots + P_m = E$. Рассмотрим далее подалгебру $\mathcal{A}_i = \{P_i A|_{W_i} | A \in \mathcal{A}\} \subseteq M_{n_i}(\mathbb{F})$, т.е. $\mathcal{A}_i$ — ограничение алгебры $\mathcal{A}$ на подпространство

W_i. Такое ограничение будет алгеброй, поскольку V_{i-1} и V_i инварианты относительно $\mathcal{A}$.

Докажем утверждение 1. Алгебра $\mathcal{A}_i$ является неприводимой. Действительно, если бы имелось собственное ненулевое инвариантное подпространство $U_i \subset W_i$ для $\mathcal{A}_i$, то $V_{i-1} \oplus U_i$ было бы инвариантным подпространством для алгебры $\mathcal{A}$, лежащим строго между V_{i-1} и V_i, что противоречит максимальности длины цепочки $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = \mathbb{F}^n$. Тогда по теореме Бернсайда 2.7 $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$.

Для доказательства утверждений 2–4 будем рассматривать пары алгебр $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$ при $i \neq j$. Обозначим $A_{ii} = P_i A|_{W_i}$. Скажем, что алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ *независимы*, если в алгебре $\mathcal{A}$ есть такая матрица A, что $A_{ii} = E$, а $A_{jj} = O$. Это условие симметрично, т.к. если $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ независимы, то $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_i$ также независимы (с матрицей $E - A \in \mathcal{A}$). Иначе, назовём алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ *связанными*.

Пусть алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ связанные. Покажем, что в этом случае матрицы A_{ii} и A_{jj} одновременно нулевые или ненулевые. Допустим найдется матрица $A \in \mathcal{A}$ такая, что $A_{ii} \neq O$, но $A_{jj} = O$. Рассмотрим множество всех таких матриц $I = \{A_{ii} | A \in \mathcal{A} \text{ и } A_{jj} = O\}$. Заметим, что I является линейным подпространством и замкнуто относительно умножения на матрицы из $\mathcal{A}_i$ с любой стороны, т.е. является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$. Поскольку $I \neq 0$, то $I = M_{n_i}(\mathbb{F})$. Тогда I содержит единичную матрицу, а в этом случае алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ будут независимыми. Противоречие.

Пусть $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ связанные, и $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$ связанные. Предположим, что $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_k$ независимые. Тогда есть матрица $A \in \mathcal{A}$ такая, что $A_{ii} = E$, а $A_{kk} = O$. В силу связанности $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ имеем $A_{jj} \neq O$, противоречие с доказанным выше для связанных алгебр $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$.

Тогда множества $\{J_s\}$ составляем таким образом, что i и j попадают в одно множество J_l, если и только если $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ связанные — в качестве J_1 берём все индексы алгебр, связанных с $\mathcal{A}_1$, если J_1 не покрывает все множество индексов, повторяем процесс для какого-то $i_2 \notin J_1$ и т.д.

Утверждение 4 получается из определения независимых алгебр: при $i \in J_s$ умножаем матрицы с E в i-ом блоке и O в j-ом блоке по всем $j \notin J_s$. Также из этого определения следует утверждение 2: множество пар $(A_{ii}, A_{jj}) \subseteq M_{n_i}(\mathbb{F}) \oplus M_{n_j}(\mathbb{F})$ и из условия независимости содержит пары (E, O) и (O, E), далее применяем утверждение 1 и свойство замкнутости алгебры относительно умножения на ее элементы.

Определим отображение $\varphi : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ правилом $\varphi(A_{ii}) = A_{jj}$. Докажем, что отображение φ задано корректно. Действительно, пусть $A \neq B \in \mathcal{A}$, $A_{ii} = B_{ii}$. Тогда $(A - B)_{ii} = O$. И по доказанному свойству $(A - B)_{jj} = O$ и $A_{jj} = B_{jj}$. Это же рассуждение доказывает инъективность отображения φ. По построению видно, что φявляется сюръективным гомоморфизмом алгебр, а значит, и изоморфизмом. Изоморфизм алгебр влечёт равенство их размерностей, а поскольку $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$ и $\mathcal{A}_j = M_{n_j}(\mathbb{F})$, то $n_i = n_j$. Таким образом, алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ можно отождествить, при этом φ будет автоморфизмом матричной алгебры $M_{n_i}(\mathbb{F})$. По теореме 2.11 тогда найдётся обратимя матрица $S \in M_{n_i}(\mathbb{F})$, что $A_{ii} = S^{-1}A_{jj}S$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

Фиксируем множество J_s. Пусть i_s — его минимальный элемент. Тогда пусть $j \in J_s$, $j \neq i_s$. Пусть S определённая выше матрица, соответсвующая индексам i_s и j. Тогда достроим её до обратимой матрицы $T \in M_n(\mathbb{F})$: $T = \operatorname{diag}(E, E, \dots, S, E \dots, E)$, S расположена на j-ом месте. Тогда в алгебре $T^{-1}\mathcal{A}T$ все матрицы останутся блочно-треугольные и при этом $A_{i_s,i_s} = A_{jj}$. Далее берём композицию таких T по всем $j \in J_s$, $j \neq i_s$. Получаем утверждение 3. □

Следствие 2.13. Если $\mathcal{A}$ — собственная подалгебра алгебры $M_n(\mathbb{F})$, то $\dim \mathcal{A} \leqslant n^2 - n + 1$.

Доказательство. Если в блочном представлении алгебры $\mathcal{A}$ 3 и более диагональных блока, то подалгебра с двумя блоками $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ является собственной подалгеброй в $M_{n_1+n_2}(\mathbb{F})$, поэтому её размерность не максимальная. Остаётся случай двублочной алгебры.

В случае двух блоков для достижения максимума размерности нужно минимизировать выражение $k(n-k)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Минимум достигается при $k = 1$. □

Задачи к лекции 1.

Задача 1. Докажите, что ненулевой двусторонний идеал матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ является неприводимой подалгеброй (здесь наличие единицы в подалгебре не предполагаем).

Задача 2. Приведите пример собственной ненулевой неприводимой подалгебры в а) $M_2(\mathbb{R})$, б) $M_4(\mathbb{R})$.

Задача 3. Покажите, что в алгебре $M_3(\mathbb{C})$ есть подалгебры всех размерностей от 1 до 7.

Задача 4. Покажите, что в алгебре $M_4(\mathbb{C})$ есть подалгебры всех размерностей от 1 до 13.

Задача 5. Есть ли в алгебре $M_5(\mathbb{C})$ подалгебра, содержащая единичную матрицу, размерности 20?

Задача 6. Назовём матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$ *полумагической*, если есть такое число $S = S(A) \in \mathbb{C}$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = S(A)$ для всех $j = 1, \dots, n$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = S(A)$ для всех $i = 1, \dots, n$ (все строчные и столбцовы суммы элементов матрицы равны между собой). Проверьте, что множество полумагических матриц является подалгеброй алгебры $M_n(\mathbb{C})$ и определите её блочный вид в смысле теоремы 2.12.

3 Треугольные матричные подалгебры. Одновременная триангулизуемость семейств матриц и порождённых ими алгебр. Теорема МакКоя (критерий триангулизуемости).

Подалгебру всех верхнетреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$ обозначим за $T_n(\mathbb{F})$.

Определение 3.1. Множество матриц $\{A_i | i \in I\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ называется *триангулизуемым*, если существует обратимая матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $C^{-1}A_iC \in T_n(\mathbb{F})$ для всех $i \in I$. Эквивалентным образом говорят, что матрицы $A_i \in M_n(\mathbb{F}),\ i \in I$, *одновременно триангулизуемы*, если триангулизуемо множество $\{A_i | i \in I\}$.

Рассмотрим линейное пространство V над полем $\mathbb{F}$ и его подпространство N.

Определение 3.2. *Факторпространством* V/N называется факторгруппа абелевой группы V по подгруппе N, т.е. множество смежных классов $[x] = x + N$ с операцией сложения и операцией умножения на число, заданной правилом: $\lambda[x] = [\lambda x]$.

Пусть на пространстве V задан линейный оператор A и подпространство N инвариантно относительно A. Тогда ему можно сопоставить линейный оператор $\tilde{A}$ на факторпространстве V/N, полагая $\tilde{A}[x] = [Ax]$ (определение корректно в силу инвариантности N). Для краткости назовём $\tilde{A}$ фактором оператора A.

Определение 3.3. Рассмотрим семейство линейных операторов $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(V)$. Пусть $N \subset M \subseteq V$ — подпространства инвариантные относительно $\mathcal{B}$. *Семейством факторов семейства $\mathcal{B}$ относительно $\{M, N\}$* называется множество всех факторов $\tilde{B}$ на факторпространстве M/N. Будем говорить, что некоторое свойство *наследуется факторами*, если любое семейство факторов семейства, обладающего данным свойством, также им обладает.

Пример такого свойства: коммутативность.

Лемма 3.4 (Лемма о триангулизуемости)**.** Пусть P – набор свойств, каждое из которых наследуется факторами. Пусть $\dim V \geqslant 2$. Если любое семейство операторов на V, обладающее свойствами P, приводимо (обладает собственным ненулевым инвариантным подпространством), то любое семейство операторов на V, обладающее свойствами P, триангулизуемо.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство операторов, обладающее свойствами P. Выберем цепочку инвариантных подпространств $M_0 = \{0\} \subset M_1 \subset \ldots \subset M_m = V$ относительно $\mathcal{B}$ максимальной длины (см. предложение 1.6 и доказательство теоремы 2.12).

Допустим, что для некоторого k $\dim M_k/M_{k-1} > 1$. Тогда по предположению семейство факторов семейства $\mathcal{B}$ относительно $\{M_k, M_{k-1}\}$ обладает общим инвариантным подпространством L. Но в этом случае множество $\{x \in M_k | [x] \in L\}$ будет инвариантным подпространством относительно $\mathcal{B}$, лежащим строго между M_{k-1} и M_k. Противоречие с максимальностью цепочки.

Тогда как в доказательстве теоремы 2.12, рассмотрим дополнения подпространств M_{k-1} до M_k, их размерности равны 1, а значит в блочнотрегольном виде матриц все блоки будут иметь размер 1, т.е. матрицы будут треугольными. □

Теорема 3.5. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Любое семейство коммутирующих операторов триангулизуемо.

Доказательство. Воспользуемся леммой о триангулизуемости 3.4. Свойство коммутативности наследуется факторами, поэтому достаточно проверить, что у коммутативного семейства операторов на пространстве размерности большей 1 есть нетривиальное инвариантное подпространство.

Пусть $\mathcal{B}$ — семейство коммутирующих операторов на пространстве V. Если все линейные операторы скалярные, то относительно них инвариантно любое подпространство. Пусть теперь $B \in \mathcal{B}$ — нескалярный. В силу алгебраической замкнутости поля у B есть собственное число λ и собственное подпространство $M \subset V$. Тогда для любых $C \in \mathcal{B}$ и $x \in M$, имеем $BCx = CBx = \lambda Cx$, $Cx \in M$, M инвариантно относительно $\mathcal{B}$. □

Через $\sigma(A)$ обозначим спектр = множество всех собственных значений матрицы (оператора) A.

Поскольку у любой трегольной матрицы собственными числами являются диагональные элементы, а диагональными элементами суммы(произведения) треугольных матриц являются суммы(произведения) диагональных элементов исходных матриц, то для триангулизуемого семейства $\{A_1, \ldots, A_k\}$ и многочлена $p(x_1, \ldots, x_k)$ от некоммутирующих переменных верно, что

$$\sigma(p(A_1, \ldots, A_k)) \subset p(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_k)), \tag{1}$$

где $p(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_k))$ обозначает множество всех значений $p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $\lambda_j \in \sigma(A_j)$.

Определение 3.6. *Внешнее добавление единицы*: если $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}_0$ — подпространство в $\mathcal{A}$, замкнутое относительно умножения, но $1_{\mathcal{A}} \notin \mathcal{A}_0$ ($\mathcal{A}_0$ — подалгебра без единицы), то $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \oplus \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle$ с естественным умножением $(A + \alpha 1_{\mathcal{A}})(B + \beta 1_{\mathcal{A}}) = AB + \alpha B + \beta A + \alpha\beta 1_{\mathcal{A}}$ для $A, B \in \mathcal{A}_0$ будет подалгеброй с единицей, содержащей в себе алгебру $\mathcal{A}_0$ и $\dim \mathcal{A}_1 = \dim \mathcal{A}_0 + 1$.

Теорема 3.7. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Любая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$, состоящая из нильпотентных операторов (это алгебра без единицы), триангулизуема.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ алгебра, в которой все матрицы нильпотентны. Пусть $N \subset M$ — инвариантные пространства относительно $\mathcal{A}$. Если $A \in \mathcal{A}$ и $A^k = 0$, то $\tilde{A}^k = 0$ и семейство факторов $\mathcal{A}$ относительно M/N тоже состоит из нильпотентных матриц.

В алгебре $\mathcal{A}_1$ с добаленной единицей все матрицы будут вида "нильпотентная плюс скалярная". Заметим, что на пространстве размерности хотя бы 2 не все матрицы имеют такой вид (например, E_{11} не такая), поэтому по теореме Бернсайда алгебра $\mathcal{A}_1$ будет приводима, и её инвариантное пространство будет инвариантным относительно $\mathcal{A}$. Следовательно, все факторалгебры алгебры $\mathcal{A}$ на факторпространствах размерности 2 и выше — приводимы и применима лемма о триангулизуемости. $\square$

Теорема 3.8. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Подалгебра $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ триангулизуема тогда и только тогда, когда все матрицы-коммутаторы $AB - BA$, $A, B \in \mathcal{A}$ нильпотентны.

Доказательство. "$\Rightarrow$" Пусть $\mathcal{A}$ — триангулизуема и $A, B \in \mathcal{A}$. Тогда согласно соотношению (1) собственные числа матрицы $AB - BA$ имеют вид $\alpha\beta - \beta\alpha$, $\alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)$. В поле $\mathbb{F}$ $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$, значит, $\sigma(AB - BA) = \{0\}$ и матрица $AB - BA$ нильпотентна.

"$\Leftarrow$" Если $n \geqslant 2$, то в алгебре $M_n(\mathbb{F})$ есть матрицы, коммутаторы которых ненильпотентны. Например, для $n = 2$ можно взять $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(AB - BA)^2 = -E$. Для $n \geqslant 3$ дополняем рассмотренные матрицы нулями.

Свойство, что коммутаторы всех матриц нулевые, наследуется факторами. Поэтому, все факторалгебры алгебры $\mathcal{A}$ на факторпространствах размерности 2 и выше должны быть собственными подалгебрами, они приводимы по теореме Бернсайда и применима лемма о триангулизуемости. $\square$

Определение 3.9. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *конечнопорожденной*, если все её элементы могут быть представлены в виде конечных линейных комбинаций (с коэффициентами из $\mathbb{F}$) конечных произведений некоторого конечного множества её элементов, называемого *системой порождающих*. Легко видеть, что любая конечномерная алгебра порождается своим базисом, т.е. является конечнопорожденной.

Теорема 3.10 (теорема Маккоя)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда матрица $p(A, B)(AB - BA)$ нильпотентна для любого многочлена $p(x, y)$ от некоммутирующих переменных.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая матрицами A, B

"$\Rightarrow$" Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулизуемы. Тогда согласно соотношению (1) собственные числа матрицы $p(A, B)(AB - BA)$ имеют вид $p(\alpha, \beta)(\alpha\beta -$

$\beta\alpha)$, $\alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)$. В поле $\mathbb{F}$ $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$, значит, $\sigma(p(A,B)(AB - BA)) = \{0\}$ и матрица $p(A,B)(AB - BA)$ нильпотентна.

"$\Leftarrow$" По лемме о триангулизуемости достаточно проверить, что при $n \geqslant 2$ алгебра $\mathcal{A}$ является приводимой. Если $AB = BA$, то утверждение следует из доказательства теоремы 3.5. Пусть $AB - BA \neq O$. Выберем такой вектор $x \in \mathbb{F}^n$, что $(AB - BA)x \neq 0$. Для ненулевого вектора $(AB - BA)x$ всегда найдётся матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $C(AB - BA)x = x$. Если бы алгебра $\mathcal{A}$ была неприводима, то по теореме Бернсайда $A = M_n(\mathbb{F})$ и $C \in \mathcal{A}$. Но с другой стороны, по построению элементы алгебры $\mathcal{A}$ представляются как линейные комбинации произведений матриц A, B, т.е. $C = p(A,B)$ для некоторого многочлена от некоммутирующих переменных. Из условия $p(A,B)(AB - BA)x = x$ тогда следует, что матрица $p(A,B)(AB - BA)$ ненильпотентна. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Следствие 3.11. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Если $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и $AB = O$, то матрицы A и B одновременно триангулизуемы.

Доказательство. Условие $AB = O$ влечёт $(p(A,B)(AB - BA))^2 = O$. □

Аналогичный критерий справедлив и для произвольного семейства матриц.

Теорема 3.12. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Множество $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ триангулизуемо тогда и только тогда, когда матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})$ нильпотентна для любых значений индекса $m \in \mathbb{Z}_+$ и матриц $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}} \in \mathcal{A}$.

Доказательство. "$\Rightarrow$" Пусть семейство $\mathcal{A}$ триангулизуемо. Тогда согласно соотношению (1) $\sigma(A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})) = \{0\}$ и матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})$ нильпотентна.

"$\Leftarrow$" По лемме о триангулизуемости достаточно проверить, что при $n \geqslant 2$ множество $\mathcal{A}$ является приводимым. Для коммутативного семейства утверждение следует из доказательства теоремы 3.5. Пусть теперь в $\mathcal{A}$ есть некоммутирующие матрицы A и B. По условию для любых значений индекса $m \in \mathbb{Z}_+$ и матриц $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}} \in \mathcal{A}$ матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(AB - BA)$ нильпотентна, в частности, является матрицей с нулевым следом. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B}$, порождённую семейством $\mathcal{A}$. Поскольку след является линейной функцией, то матрица $C(AB - BA)$ будет с нулевым следом для всякой матрицы $C \in \mathcal{B}$. Отсюда по теореме Бернсайда получаем, что $\mathcal{B}$ приводима, поскольку в полной матричной алгебре можно найти такую матрицу D, что $\operatorname{tr}(D(AB - BA)) \neq 0$. □

Дополнение к лекции 2:

Теорема 3.13 (теорема Лаффи)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Если $\operatorname{rk}(AB - BA) = 1$, то A и B одновременно триангулизуемы.

Доказательство. По лемме о триангулизуемости достаточно показать наличие общего инвариантного подпространства для A и B при $n \geqslant 2$.

Возьмём собственное число $\lambda \in \sigma(B)$. Ядро и образ $B - \lambda E$ ненулевые инвариантные подпространства для B. Покажем, что по крайней мере одно из них инвариантно относительно A.

По условию образ $AB - BA$ имеет размерность 1, значит, порождается некоторым вектором $y \in \mathbb{F}^n$.

Пусть $\ker(B - \lambda E)$ не инвариантно относительно A. Это означает, что найдётся такой вектор $x \in \mathbb{F}^n$, что $(B - \lambda E)x = 0$, а $(B - \lambda E)Ax \neq 0$. Имеем

$$A(B - \lambda E)x - (B - \lambda E)Ax = (AB - BA)x = \beta y \neq 0.$$

Отсюда $(B - \lambda E)Ax = \gamma y \neq 0$ и y принадлежит образу $(B - \lambda E)$. Тогда для произвольного вектора $z \in \mathbb{F}^n$ получаем

$$A(B - \lambda E)z = (B - \lambda E)Az + \delta y,$$

откуда любой вектор $A(B-\lambda E)z$ попадает в образ $B-\lambda E$ и образ $B-\lambda E$ инвариантен относительно A. □

Задачи к лекции 2.

Задача 1. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Покажите, что подалгебра $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ триангулизуема тогда и только тогда, когда любая пара матриц из $\mathcal{A}$ триангулизуема.

Задача 2. К доказательству теоремы 3.12: поясните, почему для ненулевой матрицы C с нулевым следом всегда найдется такая матрица $D \in M_n(\mathbb{F})$, что $\operatorname{tr}(DC) \neq 0$.

Задача 3. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $n \geqslant 2$ и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Найдите критерий того, что матрицы A и A^T одновременно триангулизуемы.

Задача 4. Докажите следующее уточнение теоремы Маккоя 3.10: Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда матрица $w(A, B)(AB - BA)$ нильпотентна для любого **одночлена** $w(x, y)$ от некоммутирующих переменных.

Задача 5. Проверьте, является ли триангулизуемой пара матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $A \in M_n(\mathbb{F})$ треугольная матрица и пара матриц A, B триангулизуема. Верно ли, что можно подобрать преобразование, приводящее матрицы к треугольному виду, так, чтобы матрица A осталась неизменной?

4 Централизатор матрицы, его размерность. Теорема о втором централизаторе.

Определение 4.1. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Если $AB = BA$, то говорят, что матрицы A и B *перестановочны.*

Определение 4.2. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$. Множество всех матриц, перестановочных с A, называют *централизатором* матрицы A. Обозначим его $\mathcal{C}(A)$.

Аналогично, централизатор $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ подмножества $\mathcal{X} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — это пересечение централизаторов всех элементов множества $\mathcal{X}$, т.е. матрицы, перестановочные со всеми матрицами из $\mathcal{X}$.

Замечание 4.3. Заметим, что для любых матриц $B, C \in \mathcal{C}(A)$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ верно, что

$$A \cdot BC = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = BC \cdot A,$$
$$(\alpha B + \beta C)A = A(\alpha B + \beta C),$$

централизатор замкнут относительно линейных комбинаций и произведений, т.е. является подалгеброй алгебры матриц. При этом любая матрица A перестановочна с собой и единичной матрицей, следовательно, $\mathbb{F}[A] \subseteq \mathcal{C}(A)$.

Для размерности централизатора отсюда следует оценка, что $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant \deg \mu_A(t)$ ($\mu_A(t)$ — минимальный многочлен матрицы A). Далее мы покажем, что эту оценку можно улучшить до $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$ и опишем матрицы, ддля которых выполнено равенство $\dim \mathcal{C}(A) = n$.

Также если $AB = BA$, то $C^{-1}ACC^{-1}BC = C^{-1}ABC = C^{-1}BAC = C^{-1}BCC^{-1}AC$, и централизаторы подобных матриц тоже сопряжены той же матрицей C. Соответсвенно, задачу вычисления размерности достаточно решить для одной из матриц, подобных данной, выберем для этого жорданову матрицу.

Обозначение 4.4. Через $M_{k,l}(\mathbb{F})$ обозначим пространство прямоугольных $k \times l$ матриц над полем $\mathbb{F}$. Пусть $m = \min\{k, l\}$.

При $k < l$. Для чисел $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{F}$ положим

$$T(y_1, \ldots, y_m) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & \cdots & y_{m-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, при $k \geqslant l$ для чисел $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{F}$ положим

$$T(y_1, \ldots, y_m) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ 0 & y_1 & \ddots & y_{m-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & & y_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 4.5. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$ жорданова матрица вида $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, где $A_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ — жорданова клетка (числа λ_i могут совпадать). Рассмотрим матрицу $X \in \mathcal{C}(A)$. Разобьём X на m^2 блоков X_{kl} размеров $n_k \times n_l$ в соответствии с блочным разбиением A. Тогда
1. $X_{rr} = T(y_{r,r;1}, \ldots, y_{r,r;n_r})$;
2. если $\lambda_r = \lambda_s$, то либо $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \ldots, y_{r,s;n_r})$ и $X_{sr} = T(y_{s,r;1}, \ldots, y_{s,r;n_r})$, либо $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \ldots, y_{r,s;n_s})$ и $X_{sr} = T(y_{s,r;1}, \ldots, y_{s,r;n_s})$ в зависимости от соотношения n_r и n_s;
2. если $\lambda_r \neq \lambda_s$, то $X_{rs} = O$ и $X_{rs} = O$.

Доказательство. Из условия $AX = XA$ получаем уравнения на юлоки:

$$A_r X_{rs} = X_{rs} A_s$$

for all $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

Для фиксированных $r, s \in \{1, \ldots, m\}$ матрица X_{rs} определяется одним уравнением

$$A_r X_{rs} = X_{rs} A_s. \tag{2}$$

Упростим обозначения: $(X_{rs})_{ij} = y_{ij}$, $i = 1, \ldots, n_r, j = 1, \ldots, n_s$.

Если расписать уравнение (2) поэлементно, получим

$$\lambda_r y_{ij} + y_{i+1,j} = \lambda_s y_{ij} + y_{i,j-1}, \text{ если } i \neq n_r, j \neq 1, \tag{3}$$

$$\lambda_r y_{n_r,j} = \lambda_s y_{n_r,j} + y_{n_r,j-1}, \text{ если } j \neq 1, \tag{4}$$

$$\lambda_r y_{i,1} + y_{i+1,1} = \lambda_s y_{i,1}, \text{ если } i \neq n_r, \tag{5}$$

$$\lambda_r y_{n_r,1} = \lambda_s y_{n_r,1}. \tag{6}$$

1. $\mathbf{s = r}$.
Поскольку если $AX = XA$, то $(A - \lambda_r E)X = X(A - \lambda_r E)$, поэтому можно считать, что $\lambda_r = 0$. Последовательно используя (4), получим, что $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r,2} = 0, \ldots, y_{n_r,n_r-1} =$

0. Последовательно используя (5), далее получаем, что $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r-1,1} = 0, \dots, y_{2,1} = 0$. В конце используя (3), находим, что

$$y_{i+1,j} = y_{i,j-1},$$

следовательно, X_{rr} — верхнетреугольная матрицы вида, указанного в пункте 1.

2. Пусть $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ и $\lambda_r = \lambda_s$. Последовательно применяя (4), находим $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r,2} = 0, \dots, y_{n_r,n_r-1} = 0$. Затем последовательно применяя (5), находим $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r-1,1} = 0, \dots, y_{2,1} = 0$. В заключении применяем (3), имеем

$$y_{i+1,j} = y_{i,j-1},$$

откуда X_{rs} является прямоугольной верхнетреугольной матрицей $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \dots, y_{r,s;n_r})$, либо $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \dots, y_{r,s;n_s})$ в зависимости от размера. Меняя r, s местами получаем аналогичный вывод для X_{sr}.

3. Пусть $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ и $\lambda_r \neq \omega\lambda_s$. Тогда из уравнения (6) выводим $(\lambda_r - \lambda_s)y_{n_r,1} = 0$, значит, $y_{n_r,1} = 0$. Затем последовательно применяя (4), получаем $y_{n_r,2} = 0$, $y_{n_r,3} = 0, \dots, y_{n_r,n_r} = 0$. Далее, используя (5), получаем $y_{n_r-1,1} = 0$, $y_{n_r-2,1} = 0, \dots, y_{1,1} = 0$. И в конце с помощью (3) начиная с $n_r - 1$-ой строки и 2-го столбца, окончательно делаем вывод

$$X_{rs} = 0.$$

□

Определение 4.6. Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если её минимальный многочлен совпадает с характеристическим. В терминах жордановой нормальной формы это условие означает, что каждому собственному числу соответствует одна жорданова клетка.

Следствие 4.7. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$, более того, равенство $\dim \mathcal{C}(A) = n$ выполнено тогда и только тогда, когда матрица A — циклическая.

Доказательство. Считаем размерность централизатора в предположении, что матрица A приведена к ЖНФ. Посчитаем размерность пространства D, порождённого блочно-диагональными матрицами из централизатора. Поскольку коэффициенты диагональных блоков X_{rr} матрицы X в предложении 4.5 находятся независимо для блоков, то $\dim D = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim \langle T(y_{r,r;1}, \dots, y_{r,r;n_r}) | y_{r,r;1}, \dots, y_{r,r;n_r} \in \mathbb{F} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} n_r = n$. Таким образом, поскольку $D \subseteq \mathcal{C}(A)$, то $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$. Последнее неравенство обращается в равенство, когда все внедиагональные блоки нулевые. Согласно пунктам 2 и 3 предложения 4.5 это выполнено тогда и только тогда, когда у разных жордановых клеток собственные числа различны, т.е. как раз для циклической матрицы A. □

Следствие 4.8. Циклические матрицы — это в точности такие матрицы, для которых $\mathcal{C}(A) = \mathbb{F}[A]$.

Доказательство. Согласно предыдущему следствию, $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$. С другой стороны, по теореме Гамильтона–Кэли $\dim \mathbb{F}[A] = \deg \mu_A(t) \leqslant n$, поэтому совпадение этих алгебр возможно если и только если, $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathbb{F}[A] = n$. Снова применяем следствие 4.7. $\square$

Следствие 4.9. $\mathcal{C}(A) = M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $A = \lambda E$.

Доказательство. Согласно предложению 4.5 если у матрицы A есть хотя бы 2 различных собственных числа λ_r и λ_s, то в централизаторе у всех матриц будут нулевые блоки X_{rs}, поэтому он не может быть пространством всех матриц.

Пусть у A есть ровно одно собственное число λ. Если $A \neq \lambda E$, то в ЖНФ A есть клетка размера не меньше 2. Пусть клетки в ЖНФ A упорядочены по убыванию размеров. Тогда $n_1 \geqslant 2$ и $n_1 \geqslant n_2$. Тогда размерность проекции централизатора на блок размера $n_1 + n_2$ будет равна: $n_1 + n_2 + 2n_2 < n_1^2 + n_2 + 2n_1n_2 \leqslant n_1^2 + n_2^2 + 2n_1n_2 = (n_1+n_2)^2$, значит опять размерность меньше размерности пространства всех матриц. $\square$

Далее рассмотрим последующие централизаторы. Например, двойной централизатор $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ — множество всех матриц, которые коммутируют со всеми матрицами, коммутирующими с A.

В общем случае для любого подмножества $\mathcal{X}$: $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{X}))$, а теорема о двойном централизаторе дает условия когда это включение обращается в равенство. Заметим, что λE коммутируют со всеми матрицами, а степени матрицы A коммутируют с матрицами из централизатора A, поэтому всегда $\mathbb{F}[A] \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$. Поэтому в матричном случае, конечно, не говорят о равенстве $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ и $\{A\}$, но о совпадении $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ с $\mathbb{F}[A]$.

Теорема 4.10. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = \mathbb{F}[A]$, т.е. любая матрица C коммутирующая со всеми матрицами, коммутирующими с A, представляется в виде многочлена от A.

Доказательство. Как и в предложении Достаточно доказать теорему в предположении, что $A \in M_n(\mathbb{F})$ — жорданова матрица. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, где $A_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ — жорданова клетка (числа λ_i могут совпадать). Любую матрицу $X \in M_n(\mathbb{F})$ на m^2 блоков X_{kl} размеров $n_k \times n_l$ в соответствии с блочным разбиением A.

Заметим, что первый централизатор $\mathcal{C}(A)$ содержит диагональные матрицы

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \operatorname{diag}(\alpha_1 E_{n_1}, \ldots, \alpha_m E_{n_m}).$$

Следовательно, $CD(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)C$. Поскольку соотношение выполнено для всех α_i и матрицы $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ являются жордановыми, для каждой пары

$r, s, r \neq s$ применяя предложение 4.5 для $\alpha_r \neq \alpha_s$, заключаем, что C — блочно-диагональная матрица.

Также верно, что $AC = CA$, поэтому диагональные блоки матрицы C имеют вид $C_{rr} = T(c_{r,1}, \dots, c_{r,n_r})$.

Пусть теперь $X \in \mathcal{C}(A)$ — блочная матрица, определенная в предложении 4.5. Из уравнения $CX = XC$ поблочно получаем

$$C_{rr} X_{rs} = X_{rs} C_{ss}. \tag{7}$$

Если у клеток A_r и A_s собственные числа λ_r и λ_s различны, то $X_{rs} = O$ и это соотношение тривиально. Пусть $\lambda_r = \lambda_s$. Выберем порядок чисел r, s так, чтобы $n_r \leqslant n_s$.

$$\begin{pmatrix} c_{r,1} & c_{r,2} & \dots & c_{r,n_r} \\ 0 & c_{r,1} & \dots & c_{r,n_r-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{r,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \cdots & y_{r,s;n_r} \\ 0 & 0 & 0 & y_{r,s;1} & \cdots & y_{r,s;n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{r,s;1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \cdots & y_{r,s;n_r} \\ 0 & 0 & 0 & y_{r,s;1} & \cdots & y_{r,s;n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{r,s;1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{s,1} & c_{s,2} & \dots & c_{s,n_s} \\ 0 & c_{s,1} & \dots & c_{s,n_s-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{s,1} \end{pmatrix}$$

Умножая первую строку на последний столбец получаем уравнение:

$$c_{r,1} y_{r,s;n_r} + c_{r,2} y_{r,s;n_r-2} + \dots + c_{r,n_r} y_{r,s;1} = c_{s,n_r} y_{r,s;1} + c_{s,n_r-1} y_{r,s;2} + \dots + c_{s,1} y_{r,s;n_r}.$$

Поскольку это уравнение должно быть выполнено для всех $y_{r,s;1}, y_{r,s;2}, \dots, y_{r,s;n_r} \in \mathbb{F}$, то подставляя $y_{r,s;n_r-i+1} = 1$, а остальные нули, получаем $c_{r,i} = c_{s,i}$ для всех $i = 1, \dots, n_r$. Эти соотношения полностью определеяют структуру матрицы C. Осталось показать, что алгебра $\mathbb{F}[A]$ состоит в точности из всех матриц такого вида.

Сперва рассмотрим случай, когда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \lambda$. Пусть без ограничения общности $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_m$. Россмотрим матрицы $B_j = (A - \lambda E)^j \in \mathbb{F}[A]$, $j = 0, \dots, n_1 - 1$. Они составляют базис алгебры $\mathbb{F}[A]$, поскольку линейно независимы по построению (диагональ единиц смещается на одну позицию вверх на каждом шаге) и их количество совпадает с размерностью $\mathbb{F}[A]$ ($\dim \mathbb{F}[A] = \deg \mu_A(t) = n_1$— максимальный размер жордановой клетки). Тогда

$$C = \sum_{j=0}^{n_1-1} c_{1,j} B_j \in \mathbb{F}[A].$$

Пусть теперь у матрицы A есть $k \geqslant 2$ собственных чисел. Расположим жордановы клетки A таким образом, чтобы все одинаковые собственные числа стояли рядом, $A = J_1 \oplus \ldots \oplus J_k$, в жордановой матрице J_i собраны все клетки с λ_k. Тогда $\mu_A(t) = \prod_{i=1}^{k} \mu_{J_i}(t)$. Положим $f_l(t) = \prod_{i=1, i\neq l}^{k} \mu_{J_i}(t)$. Тогда $f_l(J_q) = O$ при $q \neq l$ и $f_l(J_l)$ является обратимой матрицей, поскольку среди корней $f_l(t)$ нет λ_l. Тогда у матриц $(A - \lambda_l E)^j f_l(A)$, j проходит значения от 0 до максимального размера жордановой клетки для λ_l без единицы, вне l-го диагонального блока стоят 0, а в l-ом блоке стоит базис алгебры $\mathbb{F}[J_l]$, т.к. $f_l(J_l)$ обратима. Значит утверждение верно и в этом случае.

$\square$

Задачи к лекции 3.

Задача 1. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$ — матрица ранга 1. а) Найдите явный вид централизатора A в жордановой форме. б) Вычислите $\dim \mathcal{C}(A)$.

Задача 2. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Найдите максимальную размерность централизатора нескалярной матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Задача 3. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Покажите, что $\mathcal{C}(A)$ является коммутативной подалгеброй тогда и только тогда, когда A — циклическая матрица.

Задача 4. Найдите централизатор матрицы $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Используя теорему о двойном централизаторе найдите а) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)))$, б) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))))$.

Задача 6. Найдите, для каких комплексных матриц $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^2)$.

5 Коммутативные матричные подалгебры. Теорема Шура (верхняя граница размерности коммутативной алгебры). Описание алгебр максимальной размерности. Построение максимальной по включению коммутативной алгебры размерности, меньшей порядка матриц.

5.1 Лекция 4.

Из теоремы о триангулизуемости коммутативного семейства матриц для коммутативной подалгебры $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ следует оценка размерности $\dim \mathcal{A} < \dfrac{n(n+1)}{2}$. Покажем, что точная верхняя граница размерности, действительно, является квадратичной функцией от порядка матриц.

Теорема 5.1 (Теорема Шура)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Если $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, то $\dim \mathcal{A} \leqslant \left[\dfrac{n^2}{4}\right] + 1$.

Для доказательства теоремы Шура подробнее остановимся на структуре (и возможном блочном строении) коммутативных алгебр.

Определение 5.2. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — подалгебра (без единицы) состоящая из нильпотентных матриц (нильпотентная алгебра). По теореме 3.7 она триангулизуема. Отметим, что произведение любых n верхненильтрегольных матриц равно нулю. Поэтому произведение любых n матриц из $\mathcal{A}$ также равно нулю. *Индексом нильпотентности* или *классом* алгебры $\mathcal{A}$ назовём наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$, что произведение любых k матриц алгебры $\mathcal{A}$ равно нулю.

Пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная подалгебра класса k, $2 \leqslant k \leqslant n$. Из $k \geqslant 2$ в частности следует, что $\mathcal{A} \neq 0$. Рассмотрим пространство $U_1 = \mathcal{A}\mathbb{F}^n$. Тогда $U \neq 0$ и при этом $U \neq \mathbb{F}^n$, поскольку иначе $\mathcal{A}^k\mathbb{F}^n = \mathcal{A}^{k-1}\mathbb{F}^n \neq 0$ и одновременно $\mathcal{A}^k\mathbb{F}^n = 0$, противоречие. Далее имеем цепочку вложенных подпространств $\mathbb{F}^n \supset U_1 \supset U_2 = \mathcal{A}U_1 = \mathcal{A}^2\mathbb{F}^n \supset \ldots \supset U_{k-1} = \mathcal{A}^{k-1}\mathbb{F}^n \supset \{0\}$. И если для этой цепочки построить дополняющие пространства W_i как в теореме 2.12 и взять объединение их базисов, то получим, что в этом базисе все матрицы из $\mathcal{A}$ имеют блочно-нильтреугольный вид

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ O_{n_2,n_1} & O_{n_2} & \ldots & A_{2k} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ O_{n_k,n_1} & O_{n_k,n_2} & \ldots & O_{n_k} \end{pmatrix},$$

где $O_{p,q}$ — нулевая матрица размера $p \times q$, $A_{p,q}$ — какая-то матрица размера $n_p \times n_q$.

Для алгебр класса 2 этого представления достаточно, чтобы доказать теорему Шура.

Лемма 5.3. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная подалгебра класса 2. Тогда $\mathcal{A}$ — коммутативна и $\dim \mathcal{A} \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Доказательство. Поскольку произведение любых двух матриц $A, B \in \mathcal{A}$ равно нулю, то $AB = O = BA$ и алгебра коммутативна.

Максимальная размерность $\mathcal{A}$ равна максимуму выражения $k(n-k)$, $k = 1, \ldots, n-1$. Максимум функции $x(n-x)$ достигается при $x = \frac{n}{2}$ и равен $\frac{n^2}{4}$, но поскольку мы рассматриваем целые значения k, то $\dim \mathcal{A} \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$. □

В общем случае, при $k \geqslant 3$ блочный-нильтреугольный вид есть и у некоммутативных алгебр, поэтому для оценивания размерности коммутативных алгебр нужны дополнительные рассуждения.

Теорема 5.4. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная коммутативная подалгебра класса $k \geqslant 2$. Тогда $\dim \mathcal{A} \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Доказательство. Как и ранее, рассмотрим пространство $U_1 = \mathcal{A}\mathbb{F}^n$. Далее рассмотрим факторпространство $\mathbb{F}^n/U_1$, пусть $[x_1] = x_1 + U_1, \ldots, [x_m] = x_m + U_1$ — его базис. Положим $V = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle \subseteq \mathbb{F}^n$. Каждой матрице $A \in \mathcal{A}$ можно сопоставить линейное отображение $\theta(A) : V \to U_1$, так, что на базисе V оно задано правилом $\theta(A)(x_i) = Ax_i$, а далее продолжаем по линейности. Заметим, что θ по построению является линейным отображением пространства $\mathcal{A}$ в пространство линенйых отображений $\mathcal{L}(V, U_1)$. Докажем его инъективность. Пусть $\theta(A) = O$. Тогда $Ax_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Добавим к подалгебре $\mathcal{A}$ единичную матрицу, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \langle E \rangle$. Покажем,что $\mathcal{A}_1 V = \mathbb{F}^n$. Обозначим $W = \mathcal{A}_1 V$. Поскольку $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$, то W — инвариантно относительно $\mathcal{A}$. $\dim V = m = n - \dim U_1$, поскольку $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы по модулю U_1, в частности они просто линейно независимы. Тогда если $u_1, \ldots, u_{n-m}$ — базис U_1, то $x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_{n-m}$ — базис $\mathbb{F}^n$. Значит, $V + \mathcal{A}\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^n$, $\mathcal{A}_1 V + \mathcal{A}_1 U_1 = \mathcal{A}_1 \mathbb{F}^n$, $\mathcal{A}_1 V + U_1 = \mathbb{F}^n$, $W + \mathcal{A}\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^n$. Поскольку W инвариантно относительно $\mathcal{A}$, в последнем равенстве можно перейти к факторпространству и факторам алгебры $\mathcal{A}$, т.е. $\tilde{\mathcal{A}}\mathbb{F}^n/W = \mathbb{F}^n/W$. Но как мы уже упоминали на второй лекции, факторы нильпотентных операторов нильпотентны, и если факторпространство ненулевое, то последнее равенство приводится к такому же противоречию, что и $\mathcal{A}\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^n$. Факторпространство нулевое, если $W = \mathcal{A}_1 V = \mathbb{F}^n$.

Тогда любой вектор $v \in \mathbb{F}^n$ представляется в виде $A_1 x_1 + \ldots + A_m x_m$, $A_i \in \mathcal{A}_1$, откуда с использованием коммутативности алгебры получаем, что $Av = A(A_1 x_1 + \ldots + A_m x_m) = A_1 A x_1 + \ldots + A_m A x_m = 0$.

Таким образом, максимальная размерность $\mathcal{A}$ не превосходит максимальной размерности пространства $\mathcal{L}(V, U_1)$, которая равна максимуму выражения $m(n-m)$, $m = 1, \ldots, n-1$. Из доказанного в предыдущей лемме получаем $\dim \mathcal{A} \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$. $\square$

Лемма 5.5. Рассмотрим функцию $S(n) = \left[\dfrac{n^2}{4}\right] + 1$. Тогда $S(n+m) \geqslant S(n) + S(m)$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $n = m = 1$, либо $\{n, m\} = \{1, 2\}$.

Доказательство. Имеем $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, поэтому $S(2) = S(1)+S(1)$. Пусть $n \geqslant m$ и хотя бы одно из них больше 1. Тогда

$$S(n+m) = \left[\frac{n^2+m^2+2mn}{4}\right]+1 \geqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]+\left[\frac{m^2}{4}\right]+\left[\frac{mn}{2}\right]+1 = S(n)+\left[\frac{m^2}{4}\right]+\left[\frac{mn}{2}\right] \geqslant$$
$$\geqslant S(n) + \left[\frac{m^2}{4}\right] + 1 = S(n) + S(m),$$

причём последнее неравенство превращается в равенство только если $\left[\dfrac{mn}{2}\right] = 1$. Значит, когда $n \geqslant m \geqslant 2$ оно строгое. Остаются случаи $m = 1$, $n = 2, 3$. Если $S(3) = 3$, $S(4) = 5$, поэтому $S(3) = S(2) + S(1)$, а $S(4) > S(3) + S(2)$. $\square$

Доказательство теоремы Шура. Проведем доказательство индукцией по n. Для $n = 1$ есть только одномерная ненулевая подалгебра, поэтому утверждение верно.

Шаг индукции. Если у любой матрицы A из алгебры $\mathcal{A}$ ровно одно собственное значение λ_A, то $A - \lambda_A E$ — нильпотентная, и поэтому $\mathcal{A} = \langle E\rangle \oplus \mathcal{A}_0$, где $\mathcal{A}_0$ — нильпотентная коммутативная подалгебра. Тогда по теореме 5.4 $\dim \mathcal{A} = 1+\dim \mathcal{A}_0 \leqslant 1 + \left[\dfrac{n^2}{4}\right]$.

Пусть теперь у матрицы A есть $k \geqslant 2$ собственных чисел. Расположим жордановы клетки A таким образом, чтобы все одинаковые собственные числа стояли рядом, $A = J_1 \oplus \ldots \oplus J_k$, в жордановой матрице J_i собраны все клетки с λ_k. Тогда $\mu_A(t) = \prod_{i=1}^k \mu_{J_i}(t)$. Положим $f_1(t) = \prod_{i=2}^k \mu_{J_i}(t)$. Тогда $f_1(J_q) = O$ при $q \geqslant 2$ и $f_1(J_1)$ является обратимой матрицей. Тогда у матриц $(A - \lambda_1 E)^j f_1(A)$, j проходит значения от 0 до максимального размера жордановой клетки для λ_l без единицы, вне 1-го диагонального блока стоят 0, а в 1-ом блоке стоит базис алгебры $\mathbb{F}[J_1]$, т.к. $f_l(J_1)$ обратима. Размер матрицы J_1 обозначим за n_1. Через базис алгебры $\mathbb{F}[J_1]$ выражается единичная матрица. Значит, в алгебре $\mathcal{A}$ есть матрица $E_1 = \operatorname{diag}(E_{n_1}, O)$. Поскольку $\mathcal{A}$ коммутативна, то $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(E_1)$ и из предложения 4.5 получаем, что все матрицы в $\mathcal{A}$ имеют блочно-диагональный вид. Следовательно, $\mathcal{A} = \operatorname{diag}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, $\mathcal{B}$ — коммутативная подалгебра в $M_{n_1}(\mathbb{F})$, $\mathcal{C}$— коммутативная подалгебра в $M_{n-n_1}(\mathbb{F})$. Тогда $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} + \dim \mathcal{C}$ и по предположению индукции, $\dim \mathcal{B} \leqslant S(n_1)$, $\dim \mathcal{C} \leqslant S(n - n_1)$ и по лемме 5.5 $\dim \mathcal{A} \leqslant S(n)$. $\square$

Из леммы 5.5 следует, что блочно-диагональная алгебра будет иметь максимальную размерность только для $n = 2, 3$. Эти случаи рассмотрим отдельно.

Лемма 5.6. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра. Тогда
1. при $n = 2$ $\dim \mathcal{A} = S(2) = 2$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена либо с алгеброй диагональных матриц, либо с алгеброй матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$; 2. при $n = 3$ $\dim \mathcal{A} = S(3) = 3$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена либо с алгеброй диагональных матриц $D_3(\mathbb{F})$, либо с алгеброй матриц вида $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$; либо $\mathcal{A} = \langle E \rangle \oplus \mathcal{A}_0$, где $\mathcal{A}_0$ — нильпотентная коммутативная подалгебра, $\mathcal{A}_0$ имеет класс 2 или 3, и сопряжена с одной из алгебр, состоящих из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, либо $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Доказательство. 1. Пусть $n = 2$. Если в алгебре есть матрицы с двумя собственными числами, получаем сумму двух блоков размера один, т.е. алгебру диагональных матриц $D_2(\mathbb{F})$. Иначе, из значения размерности следует, что в алгебре есть нескалярная матрица с одним собственным числом, она подобна E_{12} (в $M_2(\mathbb{F})$ это циклическая матрица), значит, $\mathcal{A} = \mathbb{F}[E_{12}]$ — второй вариант алгебры.

2. Пусть $n = 3$. Если в $\mathcal{A}$ есть матрица с тремя различными собственными числами, что она подобна диагональной циклической матрице D, и при перехоже к жорданову базису $\mathcal{A} = \mathcal{C}(D) = D_3(\mathbb{F})$. Если у матриц из $\mathcal{A}$ максимум два различных собственных числа, то она разбивается в сумму блоков размеров 2 и 1, в блоке порядка 2 у всех матриц одно собственное число кратности 2, получаем алгебру матриц вида $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Пусть теперь у всех матриц из $\mathcal{A}$ ровно одно собственное число. Тогда $\mathcal{A} = \langle E \rangle \oplus \mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0$ — нильпотентная. Утверждение про алгебры класса 2 будет доказано далее в общем случае $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A}_0$ имеет класс 3 и приведена к треугольному виду. По условию существуют $A, B \in \mathcal{A}_0, AB \neq O$. У этой матрицы ненулевой элемент может быть только на позиции $(1, 3)$. Имеем $(AB)_{13} = a_{12}b_{23} \neq 0$ и также совпадает с $b_{12}a_{23}$ в силу коммутативности. Это означает, что $a_{12}a_{23} \neq 0$. Тогда A — циклическая матрица, подобная $J_3(0)$. Значит, $\mathcal{A}$ подобна $\mathbb{F}[J_3(0)]$, которая состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, □

При $n \geqslant 4$ максимальную размерность имеют только алгебры, полученные присоединением единичной матрицы к нильпотентной подалгебре.

Для них оценка достижима.

Пример 5.7 (Алгебра Шура)**.** Пусть $n = k+m,\ k, m \in \mathbb{N}$ и $|k-m| \leqslant 1$. Рассмотрим следующую коммутативную подалгебру $\mathcal{A}_S \subseteq M_n(\mathbb{F})$:

$$\mathcal{A}_S = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} xE_k & Z \\ \hline 0 & xE_m \end{array} \right) \middle| x \in \mathbb{F},\ Z \in M_{k,m}(\mathbb{F}) \right\}$$

Ее размерность $\dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{A}_S) = 1+km = [n^2/4]+1$ является максимально возможной для коммутативной подалгебры матричной алгебры, следовательно, $\mathcal{A}_S$ — максимальная коммутативная подалгебра $M_n(\mathbb{F})$.

Гипотеза 5.8 (гипотеза Густафсона)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная коммутативная подалгебра класса $k \geqslant 2$. Тогда $\dim \mathcal{A} \leqslant \left[\frac{(n-k+2)^2}{4}\right] + k - 2$.

Эта гипотеза доказана для некоторых классов нильпотентности, но в общем случае остается открытой. В предположении, что она верна, на алгебрах классов нильпотентности $k \geqslant 3$ амаксимум размерности не достигается.

Рассмотрим дополнительно структуру алгебр класса 2.

Теорема 5.9. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $n \geqslant 2$. Тогда в $M_n(\mathbb{F})$ существует $n-1$ различная с точностью до сопряжения максимальная по включению коммутативная нильпотентная подалгебра класса 2.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная подалгебра класса 2. Как показано выше, есть базис в котором все матрицы из $\mathcal{A}$ имеют блочно-нильтреугольный вид

$$A = \begin{pmatrix} O_m & A_{12} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m} \end{pmatrix},$$

где A_{12} — какая-то матрица размера $m \times (n-m)$. Все матрицы A_{12}, $A \in \mathcal{A}$ образуют подпространство U в пространстве прямоугольных матриц $M_{m,n-m}(\mathbb{F})$. Заметим, что если подпространство собственное, то алгебру можно вложить в большую, добавив матрицы, у которых блоки A_{12} лежат в дополнеии U до $M_{m,n-m}(\mathbb{F})$.

Пусть теперь в нашей алгебре блок размера $m \times (n-m)$ имеет максимальную размерность.

Пусть $B \in M_n(\mathbb{F})$ — ильпотентная матрица и $B \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Разобъём B на блоки: $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$. Тогда $AB = \begin{pmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m} \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} O_m & B_{11}A_{12} \\ O_{n-m,m} & B_{21}A_{12} \end{pmatrix}$. Если $A_{12}B_{21} = O_m$ для всех $A_{12} \in M_{m,n-m}(\mathbb{F})$, то $B_{21} = O_{n-m,m}$. Из условия нильпотентности B при $B_{21} = O$ матрицы B_{11} и B_{22} тоже нильпотентны. Имеем $A_{12}B_{22} = B_{11}A_{12}$

для всех $A_{12} \in M_{m,n-m}(\mathbb{F})$. Последовательная подстановка $E_{1,j}$, $j = 1, \dots, n-m$ показывает, что $B_{22} = O$. Тогда подстановка матричных единиц вместо A_{12} в уравнение $B_{11}A_{12} = O$ даст $B_{11} = O$. Т.е. $B = \begin{pmatrix} O & B_{12} \\ O & O \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$.

Если $t \neq m, n-m$, то $t(n-t) \neq m(n-m)$, поэтому алгебры с блоками разных размеров имеют разные размерности, значет не только не сопряжены, но и вообще не изоморфны.

Остаётся случай $t = n - m$. Алгебры будут изоморфны, но докажем, что не сопряжены. От противного. Пусть без ограничения общности $m > t$ и $T \in M_n(\mathbb{F})$ — обратимая матрица.

$$T \begin{pmatrix} O_m & A_{12} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{n,m} & B_{n,n-m} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} O_{n-m} & B_{12} \\ O_{m,n-m} & O_m \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} C_{n-m,n} \\ O_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Из равенства таких матриц, получаем, что $T \begin{pmatrix} O_m & A_{12} \\ O_{n-m,m} & O_{n-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{n-m,m} & C_{n-m,n-m} \\ O_{m,m} & O_{m,n-m} \end{pmatrix}$.

Поскольку $m > n - m$ полученное пространство меет размерность $(n-m)^2 < m(n-m)$, т.е. умножение всех матриц пространства размерности $m(n-m)$ слева на обратимую матрицу T уменьшило размерность пространства до $(n-m)^2$. Это невозможно в силу обратимости T.

□

Задачи к лекции 4.

Задача 1. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Покажите, что коммутативная алгебра $\mathbb{F}[A]$ является максимальной по включению тогда и только тогда, когда A — циклическая матрица.

Задача 2. Докажите следующее свойство функции Шура $S(n)$: $S(n) \leqslant S(n-1) + \frac{n}{2}$ для всех $n \geqslant 2$.

Задача 3. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \geqslant 2$. Докажите, что в коммутативной нильпотентной подалгебре $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ класса n найдется матрица A такая, что $A^{n-1} \neq O$.

Задача 4. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \geqslant 2$. Докажите, что с точностью до сопряженности в $M_n(\mathbb{F})$ есть ровно одна нильпотентная коммутативная подалгебра класса n и она максимально по включению.

Задача 5. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \geqslant 4$. Покажите (на примере), что в коммутативной нильпотентной подалгебре $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ класса $k < n$ не всегда найдется матрица A такая, что $A^{k-1} \neq O$.

5.2 Лекция 5.

При исследовании максимальных по включению коммутативных алгебр интересен также вопрос минимальной возможной размерности. Известна нижняя оценка Лаффи асимптотики $n^{\frac{2}{3}}$.

Теорема 5.10. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — максимальная по включению нильпотентная коммутативная подалгебра класса $k \geqslant 2$, $\mathcal{A}_1 = \langle E \rangle \oplus \mathcal{A}$. Тогда $\dim \mathcal{A}_1 \geqslant (2n)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $V_0 = \ker \mathcal{A}$, т.е. все такие $x \in \mathbb{F}^n$, что $\mathcal{A}x = 0$. Пусть $t = \dim V_0$. Тогда взяв базис $\mathbb{F}^n$, в котором первые t векторов составляют базис V_0, получим следующий блочный вид для матриц из $\mathcal{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} O_t & A_{12} \\ O_{n-t,t} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Пусть W — дополнение V_0 до $\mathbb{F}^n$, т.е. в данном базисе это столбцы $\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}$, $w \in \mathbb{F}^{n-t}$, и пусть $W_0 = \{w \in \mathbb{F}^{n-t} | A_{12}w = 0$ для всех $A \in \mathcal{A}\}$. Заметим, что если $w \in W_0$, то и $A_{22}w \in W_0$ для всех $A \in \mathcal{A}$: действительно, для матрицы A^2 блок $(1,2)$ — это $A_{12}A_{22}$, поэтому по определению W_0 имеем $A_{12}A_{22}w = 0$. Пусть $\mathcal{B} = \{A_{22} | A \in \mathcal{A}\}$. По определению $\mathcal{B}$ является коммутативной нильпотентной подалгеброй в M_{n-t} и пространство W_0 инвариантно относительно $\mathcal{B}$.

Докажем, что $W_0 = 0$. От противного, пусть $W_0 \neq 0$. По теореме 3.7 нильпотентная алгебра $\mathcal{B}$ триангулизуема на W_0, т.е. найдется $y \neq 0, y \in W_0$, такой что $\mathcal{B}y = 0$ (первый вектор нового базиса). В этом случае

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12}y \\ A_{22}y \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in V_0$, противоречие. Положим $d_1 = \dim \{A_{12} | A \in \mathcal{A}$. Для каждой конкретной матрицы $A \in \mathcal{A}$ уравнение $A_{12}x = 0$, $x \in \mathbb{F}^{n-t}$ эквивалентно однородной системе из t линейных уравнений относительно $n-t$ неизвестных. Поскольку в совокупности по всем матрицам у таких систем общим является только нулевое решение, то $n - t \leqslant td_1$ (иначе обязательно будут свободные неизвестные и бесконечно много решений).

По построению, $\dim \mathcal{A}_1 \geqslant d_1 + 1$, значит, $\dim \mathcal{A}_1 \geqslant \frac{n}{k}$.

Теперь проведём аналогичные рассуждения для алгебры $\mathcal{B}$, с той разницей, что будем смотреть умножение на вектора-строки справа. Пусть $Y = \mathbb{F}^{n-t}$ — пространство всех строк длины $n-t$. По аналогии с V_0 рассматриваем $Y_0 = \{y \in Y | y\mathcal{B} = 0\}$,

$s = \dim Y$. Пусть $Y = U \oplus Y_0$, выбираем базис Y, построеннный как обЪединение базисов U и Y_0. В этом базисе матрицы $A_{22} \in \mathcal{B}$ примут вид

$$A_{22} = \begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} \\ O_{s,n-t-s} & O_s \end{pmatrix}.$$

Повторяя рассуждения про пространство решений системы уравнений, получаем оценку

$$\dim \mathcal{B} \geqslant \frac{n-t}{s} - 1.$$

Вспомним про условие максимальности алгебры, т.е. $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. В построенном базисе матрицы алгебры $\mathcal{A}$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} O_t & B_{12} & B_{13} \\ O & B_{22} & B_{23} \\ O & O & O_s \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} O_t & O & Z \\ O & O & O \\ O & O & O_s \end{pmatrix}, \ Z \in M_{t,s}(\mathbb{F}),$$

коммутируют со всеми матрицами $A \in \mathcal{A}$, следовательно, содержатся в $\mathcal{A}$. Отсюда

$$\dim \mathcal{A} \geqslant st + 1 + \dim \mathcal{B} \geqslant st + \frac{n-t}{s}.$$

Если $t \leqslant 2^{-\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}$, то из оценки $\dim \mathcal{A} \geqslant \frac{n}{t}$ получаем, что $\dim \mathcal{A} \geqslant (2n)^{\frac{2}{3}}$.

Пусть $t > 2^{-\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}}$. Из оценки $\dim \mathcal{A} \geqslant st + 1 + \dim \mathcal{B} \geqslant st + \frac{n-t}{s}$ получаем, что

$$\dim \mathcal{A} \geqslant 2\{t(n-t)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Как мы показали ранее, функция $x(n-x)$ возрастает на отрезке $[0, \frac{n}{2}]$, поэтому

$$\dim \mathcal{A} \geqslant 2\{2^{-\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}} (n - 2^{-\frac{2}{3}} n^{\frac{1}{3}})\}^{\frac{1}{2}} = \\ = (2n)^{\frac{2}{3}} \{1 - (2n)^{-\frac{2}{3}}\}^{\frac{1}{2}} > (2n)^{\frac{2}{3}} \{1 - (2n)^{-\frac{2}{3}}\} = (2n)^{\frac{2}{3}} - 1.$$

□

Теорема 5.11 (Теорема Лаффи, 1985)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — максимальная по включению коммутативная подалгебра. Тогда $\dim \mathcal{A} \geqslant (2n)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Доказательство. Рассуждая как в доказательстве теоремы Шура, заметим, что если в $\mathcal{A}$ все матрицы имеют единственное собственное число, то $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию предыдущей теоремы 5.10 и $\dim \mathcal{A} \geqslant (2n)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Иначе, когда в $\mathcal{A}$ есть матрицы с несколькими собственными числами, то $\mathcal{A}$ сопряжена с блочно-диагональной алгеброй. Повторяя процесс для диагональных блоков, можем считать, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{B}_r$, где все алгебры $\mathcal{B}_i \subset M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \ldots, r$ удовлетворяют условию предыдущей теоремы 5.10 и $\dim \mathcal{B}_i \geqslant (2n_i)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Для $n \leqslant 4$ используя описание алгебр из леммы 5.6 получаем оценку $\dim \mathcal{A} \geqslant n$.

Тогда последовательное применение неравенств

$$x + \{2(n-x)\}^{\frac{2}{3}} > (2n)^{\frac{2}{3}},\ 1 \leqslant x < n-4,$$

$$(2x)^{\frac{2}{3}} + \{2(n-x)\}^{\frac{2}{3}} > 1 + (2n)^{\frac{2}{3}},\ 4 \leqslant x \leqslant \frac{n}{2},$$

к размерностям блоков, доказывает оценку для размерности $\mathcal{A}$.

□

Точность этой оценки неизвестна.

Рассмотрим отдельно в качестве примера, на котором удается построить точные оцнки и конкретные конструкции алгебр, нильпотенные алгебры класса 3.

Пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — нильпотентная подалгбера класса 3 такая, что алгебра $\mathcal{A}_1 = \langle E \rangle \oplus \mathcal{A}$ является максимальной по включению. Как мы показали на прошлой лекции, существует базис, в котором все матрицы из $\mathcal{A}$ принимают вид

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & A_{12} & A_{13} \\ O_{n_2,n_1} & O_{n_2} & A_{23} \\ O_{n_3,n_1} & O_{n_3,n_2} & O_{n_3} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы вида

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & O & Z \\ O & O_{n_2} & O \\ O & O & O_{n_3} \end{pmatrix},\ Z \in M_{n_1,n_3}(\mathbb{F}),$$

коммутируют со всеми матрицами $A \in \mathcal{A}_1$, следовательно, содержатся в $\mathcal{A}_1$. Положим $d = \dim \mathcal{A} - n_1 n_3$. Тогда d — это размерность подпространства $\mathcal{A}_0$, соответсвующего всем матрицам из $\mathcal{A}$ с $A_{13} = O$. Матрица вида

$$\begin{pmatrix} O_{n_1} & B & O \\ O_{n_2,n_1} & O_{n_2} & C \\ O_{n_3,n_1} & O_{n_3,n_2} & O_{n_3} \end{pmatrix}$$

лежит в $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, если и только если $BA_{23} = A_{12}C$ для всех $A \in \mathcal{A}_0$. Для каждой фиксированной матрицы $A \in \mathcal{A}_0$ это матричное уравнени эквивалентно однородной системе из n_1n_3 линейных уравнений на $n_1n_2+n_2n_3$ неизвестных элесентов матриц B и C. Объединяя уравнения по всем матрицам из базиса $\mathcal{A}_0$ получаем в совокупности dn_1n_3 уравнений, значит размерность пространства решений не меньше $n_2(n_1+n_3) - dn_1n_3$. По условию на централизатор, все эти матрицы-решения содержатся в $\mathcal{A}_0$, откуда

$$n_2(n_1+n_3) - dn_1n_3 \leqslant d,$$

$$d \geqslant n_2 \frac{n_1+n_3}{n_1n_3+1}.$$

Следовательно,

$$\dim \mathcal{A}_1 \geqslant n_2 \frac{n_1+n_3}{n_1n_3+1} + n_1n_3 + 1.$$

По условию на размер матриц, $n_2 = n - (n_1+n_3)$. Подберем n_1, n_3, чтобы минимизировать правую часть вышеозначенного неравенства. Из симметричности, можно рассмотреть $n_1 = n_3 = m \geqslant 1$. Пусть $f(m) = \dfrac{2m(n-2m)}{m^2+1} + m^2 + 1 = \dfrac{2mn}{m^2+1} + m^2 + \dfrac{4}{m^2+1} - 3$. Найдем нули производной $f'(x)$, $f'(x) = 2x - \dfrac{2n}{x^2+1} + \dfrac{4(n-2x)}{(x^2+1)^2}$. Минимум выражения достигается для x, являющихся корнями $x^3+3x-n=0$. В этом случае $f(m) = 3m^2+1$. В частности для корней уравнения $x^3+3x-n=0$ имеем $m > n^{\frac{1}{3}} - n^{-\frac{1}{3}}$ и

$$\dim \mathcal{A}_1 \geqslant \left[3n^{\frac{2}{3}} - 4\right],$$

т.к. $\dim \mathcal{A}_1 > 3(n^{\frac{1}{3}} - n^{-\frac{1}{3}})^2 + 1 > 3n^{\frac{2}{3}} - 5 \geqslant \left[3n^{\frac{2}{3}} - 5\right]$.

Из этих оценок, в частности следует, что $\dim \mathcal{A}_1 \geqslant n$ для $n \leqslant 13$.

Основываясь на размерности централизатора и подобных малых примерах Герштенхабером в 1961г. была выдвинута гипотеза, утверждающая что размерность максимальной по включению коммутативной подалгебры алгебры $M_n(\mathbb{F})$ всегда не меньше числа n (порядка матриц). Рассмотрим контрпример Куртера, который является минимальным относительно размера матриц.

Пример 5.12 (Алгебра Куртера)**.** Построим коммутативную подалгебру алгебры $M_{14}(\mathbb{F})$ размерности $\dim(\mathcal{A}_C) = 13$.

Рассмотрим множество $\mathcal{B}$ всех матриц порядка 14 следующего вида:

$$\left(\begin{array}{cc|cccccccccc|cc}
0 & 0 & & & & & & O_{2\times 10} & & & & & O_2 & \\
0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
x_{11} & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & x_{11} & & & & & & & & & & & & \\
x_{12} & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & x_{12} & & & & & & & & & & & & \\
x_{21} & 0 & & & & & & O_{10} & & & & & O_{10\times 2} & \\
0 & x_{21} & & & & & & & & & & & & \\
x_{22} & 0 & & & & & & & & & & & & \\
0 & x_{22} & & & & & & & & & & & & \\
z_{11} & z_{12} & & & & & & & & & & & & \\
z_{21} & z_{22} & & & & & & & & & & & & \\
\hline
y_{11} & y_{12} & z_{11} & z_{12} & z_{21} & z_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\
y_{21} & y_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & z_{11} & z_{12} & z_{21} & z_{22} & x_{21} & x_{22} & 0 & 0
\end{array}\right),$$

где x_{ij}, y_{ij} и z_{ij} — произвольные элементы поля $\mathbb{F}$. Из определения множества $\mathcal{B}$ следует, что оно замкнуто относительно умножения и состоит из попарно коммутирующих матриц. Пусть матрица $D \in \mathcal{B}$. Она представляется в следующем блочном виде:

$$D = \begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ A & O_{10} & O \\ Y & B & O_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$D' = \begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ A' & O_{10} & O \\ Y' & B' & O_2 \end{pmatrix}$$

также матрица из $\mathcal{B}$. Тогда

$$D'D = \begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ O & O_{10} & O \\ B'A & O & O_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно произведение любых трех матриц из $\mathcal{B}$ равно нулю. Тогда $\mathcal{A}_C = \langle E_{14}\rangle \oplus \mathcal{B}$ — коммутативная подалгебра $M_{14}(\mathbb{F})$ размерности 13, где $\mathcal{B}$ — нильпотентная подалгебра класса 3.

Максимальность $\mathcal{A}_C$ оставим в качестве упражнения, разберём только главные шаги. Левый нижний 2 на 2 блок заполнен всевозможными матрицами. Для доказательства максимальности остается проверить, что нельзя добавить матриц X вида $\begin{pmatrix} O_2 & O & O \\ P & O_{10} & O \\ O & Q & O_2 \end{pmatrix}$. Такая матрица лежит в $\mathcal{C}(\mathcal{B})$, если и только если $XD = DX$, т.е.

$BP = QA$ для всех $D \in \mathcal{B}$. Для каждой фиксированной матрицы $D \in \mathcal{B}$ это матричное уравнени эквивалентно однородной системе из 4 линейных уравнений на 40 неизвестных элесентов матриц P и Q. Объединяя уравнения по всем матрицам из базиса получаем в совокупности 32 уравнения, значит размерность пространства решений не меньше 8. Остаётся проверить, что ранг матрицы системы в точности равен 32.

Задачи к лекции 5.
Во всех задачах поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Задача 1. Проверьте максимальность по включению для алгебры Куртера (осталось проверить, что матрица СЛУ имеет ранг 32).

Задача 2. Приведите пример максимальной по включению коммутативной подалгебры $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ размерности n.

Задача 3. Верно ли, что произвольная матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ содержится в максимальной по включению коммутативной подалгебре?

Задача 4. Постройте максимальную по включению коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, содержащую жорданову матрицу с собственным числом 0 из двух клеток размеров $n-1$ и 1.

Задача 5. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ и $k+m+1 \leqslant n$. Рассмотрим матрицу $B = E_{m,m+1} + E_{m+1,m+2} + \dots + E_{m+k,m+k+1} \in M_n(\mathbb{F})$. Возьмём подпространство $\mathcal{B}_{k,m} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, порождённое матрицами из $\mathbb{F}[B]$ и матричными единицами $E_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $m+k+1 \leqslant j \leqslant n$. Покажите, что
а) $\mathcal{B}_{k,m}$ является нильпотентной коммутативной подалгеброй в $M_n(\mathbb{F})$ класса $k+2$;
б) алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{k,m} \oplus \langle E \rangle$ является максимальной по включению.

6 Одно- и двупорождённые коммутативные матричные подалгебры. Теорема Герштенхабера.

Напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ называется *конечнопорожденной*, если все её элементы могут быть представлены в виде конечных линейных комбинаций (с коэффициентами из $\mathbb{F}$) конечных произведений некоторого конечного множества её элементов, называемого *системой порождающих*. Легко видеть, что любая конечномерная алгебра порождается своим базисом, т.е. является конечнопорожденной. Иногда, системы порождающих, меньшей, чем базис, не существует, например, такова алгебра Шура.

Далее по определению для алгебры с единицей всегда будем считать единицу словом от порождающих длины 0. Если $\mathcal{S} \subset M_n(\mathbb{F})$ — некоторое конечное подмножество, то подалгебру с единицей, порождённую множеством $\mathcal{S}$, обозначим за $\mathcal{L}(\mathcal{S})$.

В этой лекции мы рассмотрим коммутативные матричные подалгебры, у которых есть “малые” системы порождающих — из одной или двух матриц.

Из предыдущих лекций мы знаем, что алгебра $\mathcal{L}(\{A\})$, порождённая одной матрицей A, — это алгебра $\mathbb{F}[A]$ многочленов от A, $\dim \mathcal{L}(\{A\}) = \deg \mu_A(t) \leqslant n$ по теореме Гамильтона–Кэли, причём равенство достижимо тогда и только тогда, когда A является циклической матрицей, и в этом случае $\mathcal{L}(\{A\})$ является максимальной по включению коммутативной алгеброй. ПОэтому далее речь пойдет про двупорождённые алгебры.

Рассмотрим теорему Герштенхабера 1961г., а именно, аналогичное утверждение о размерности для коммутативной подалгебры, порождённой парой матриц. В оригинальной работе Герштенхабера для доказательства использованы методы алгебраической геометрии. Мы рассмотрим чисто матричное доказательство данного результата, полученное в 1990-91гг. независимо Барриа и Халмосом, и Лаффи и Лазарус.

Как и в доказательстве теорем Шура и Лаффи о размерности, сперва рассмотрим нильпотентный случай.

Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$ приведена к жордановой нормальной форме и имеет вид $J_{n_1} \oplus \ldots \oplus J_{n_k}$, где $k \geqslant 1$, $J_{n_i} = J_{n_i}(0)$ — жорданова клетка размера n_i, и $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k \geqslant 1$. Рассмотрим вспомогательную конструкцию увеличения размера матриц, с помощью которой возможно сделать все жордановы клетки матрицы A единого размера. Сопоставим матрице A матрицу $\hat{A} \in M_{n_1 k}(\mathbb{F})$, жорданова форма которой — $J_{n_1} \oplus \ldots \oplus J_{n_1}(k$ раз). Для $n \geqslant 2$ и $n_i \leqslant n$ разложим $\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^{n_i} \oplus \mathbb{F}^{n-n_i}$. Для жордановой клетки J_n подпространство $\mathbb{F}^{n_i} \oplus 0$ инвариантно, а ее ограничение на это подпространство это в точности $J_{n_i}(0)$. Тогда для матрицы $\hat{A}$ еcтвественно выделяется инвариантное пространство $M = (\mathbb{F}^{n_1} \oplus 0) \oplus (\mathbb{F}^{n_2} \oplus 0) \oplus \ldots \oplus (\mathbb{F}^{n_k} \oplus 0)$, а ограничение $\hat{A}$ на M это в точности A.

Лемма 6.1. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующие матрицы, A — нильпотентная. Пусть жорданова нормальная форма матрицы A имеет вид $J_{n_1} \oplus \ldots \oplus J_{n_k}$, где $k \geqslant 1$, $J_{n_i} = J_{n_i}(0)$ — жорданова клетка размера n_i, и $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k \geqslant 1$. Для матрицы $\hat{A} \in M_{n_1 k}(\mathbb{F})$ и подпространства M, определенных выше, наёдется матрица $\hat{B} \in M_{n_1 k}(\mathbb{F})$, коммутирующая с $\hat{A}$, для которой M также является инвариантным подпространством и ограничение $\hat{B}$ на M равно B.

Доказательство. Согласно предложению 4.5 матрицы B и $\hat{B}$ представляются как блочные $k \times k$ с размерами блоков, соответствующих блокам A и $\hat{A}$. Вспомним полосатый вид блока матрицы B. Пусть $i \leqslant j$, имеем $n_i \geqslant n_j$ и $B_{ij} = T(y_{i,j;1}, \ldots, y_{i,j;n_j})$. Аналогично, для $i > j$, имеем $n_i \leqslant n_j$ и $B_{ij} = T(y_{i,j;1}, \ldots, y_{i,j;n_i})$. Блоки матрицы $\hat{B}$ являются квадратными $n_1 \times n_1$ матрицами. Определим $\hat{B}_{ij}$ по B_{ij}: для $i \leqslant j$, $\hat{B}_{ij} = T(y_{i,j;1}, \ldots, y_{i,j;n_j}, 0, \ldots, 0)$, для $i > j$, $\hat{B}_{ij} = T(0, \ldots, 0, y_{i,j;1}, \ldots, y_{i,j;n_i})$, где количество 0 таково, чтобы каждый размер матрицы стал n_1.

Тогда все условия выполнены по построению. $\square$

Лемма 6.2. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, квадратные матрицы $C_1, \ldots, C_m$ — квадратные матрицы (возможно, разных размеров) с попарно непересекающимися спектрами, $p_1(x), \ldots, p_m(x) \in \mathbb{F}[x]$ — некоторые многочлены. Тогда найдётся один многочлен $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ такой, что $p(C_j) = p_j(C_j)$ для всех $j = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Докажем по индукции. База $m = 1$ очевидна. Переход для произвольного m получится, если доказать для $m = 2$, поскольку новое условие можно добавлять последовательно.

Пусть $m = 2$. Используем упрощенные обозначения: даны матрицы C и D и многочлены q и r. Если $p(C) = q(C)$, то многочлен $p - q$ аннулирует матрицу C, значит, $p - q = f\mu_C$, $p = f\mu_C + q$. Аналогично, $p = g\mu_D + r$. И обратно, любые многочлены такой структуры переводят C в $q(C)$, а D в $r(D)$. Таким образом, нужен многочлен p, имеющий одновременно оба вида $p = f\mu_C + q = g\mu_D + r$. Используем Китайскую Теорему об Остатках (идею доказательства): по условию на спектры матриц многочлены μ_C и μ_D взаимно просты, получаем линейное представление НОД $1 = u\mu_C + v\mu_D$, и полагаем $p = ru\mu_C + qv\mu_D$. $\square$

Теорема 6.3 (обобщенная теорема Гамильтона–Кэли)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующие матрицы, k— максимальное (максимум по всем собственным числам) количество жордановых клеток, отвечающих собственному числу матрицы A. Тогда найдутся матрицы $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{F}[A]$ такие, что

$$B^k = A_1 B^{k-1} + \cdots + A_{k-1}B + A_k.$$

Доказательство. I. Пусть сначала у A ровно одно собственное число λ. Поскольку $\mathbb{F}[A] = \mathbb{F}[A - \lambda E]$, можем считать, что A — нильпотентная матрица. Приведем ее к ЖНФ: $A = J_{n_1} \oplus \ldots \oplus J_{n_k}$. По лемме 6.1 перейдем к матрицам $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Тогда ограничения многочленов от них на M — это те же многочлены от A и B. Поэтому можно доказывать утверждение в предположении, что все клетки A имеют один размер n_1. По доказательству леммы о втором централизаторе, любой блок матрицы B — многочлен от J_{n_1}. Кольцо $\mathbb{F}[J_{n_1}]$ — коммутативно, матрица B над ним имеет размер $k \times k$. Запишем для нее теорему Гамильтона–Кэли:

$$B^k = p_1(J_{n_1})B^{k-1} + \cdots + p_{k-1}(J_{n_1})B + p_k(J_{n_1})E.$$

С другой стороны, над этоим кольцом по построению $A = J_{n_1}E$ — скалярная матрица, и тогда $p_i(J_{n_1})B = p_i(A)B$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

II. Пусть теперь у матрицы A m различных собственных чисел, $A = A(1) \oplus \cdots \oplus A(m)$, A_i — жорданова матрица, отвечающая числу λ_i. Согласно предложению 4.5, матрица B также имеет блочно-диагональный вид $B = B(1) \oplus \cdots \oplus B(m)$, $A(j)B(j) = B(j)A(j)$, $j = 1, \ldots, m$. По доказанному в пункте I, $B(j)^k = A_1(j)B(j)^{k-1} + \cdots + A_{k-1}(j)B(j) + A_k(j)$, $j = 1, \ldots, m$. Для каждого $i = 1, \ldots, k$, положим $A_i = A_i(1) \oplus$

$\ldots A_i(m)$. Тогда равенство $B^k = A_1B^{k-1} + \cdots + A_{k-1}B + A_k$ выполнено, но осталось проверить, что $A_i \in \mathbb{F}[A]$. По доказанному в пункте I нам известно, что для любого $j = 1, \ldots, m$, $A_i(j) = p_{ij}(A(j))$, $p_{ij}(x) \in \mathbb{F}[x]$ — некоторые многочлены. Поскольку у каждой матрицы $A(j)$ ровно одно собственное число, причём у каждой своё, то эти матрицы удовлетворяют условиям леммы 6.2, следовательно, для каждого $i = 1, \ldots, k$, найдётся общий многочлен $p_i(x)$ такой, что $A_i = p_i(A(1)) \oplus \cdots \oplus p_i(A(m)) = p_i(A)$. □

Обычная теорема Гамильтона–Кэли следует из этой, если положить $A = \lambda E$. Для размерности алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{E, A, B\})$ эта теорема даёт оценку $\dim \mathcal{A} \leqslant kn_1$, что в общем случае хуже оценки $\dim \mathcal{A} \leqslant n$.

Теорема 6.4. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующие нильпотентные матрицы. Пусть жорданова нормальная форма матрицы A имеет вид $J_{n_1} \oplus \ldots \oplus J_{n_k}$, где $k \geqslant 1$, $J_{n_i} = J_{n_i}(0)$ — жорданова клетка размера n_i, и $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k \geqslant 1$. Тогда у алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{E, A, B\})$ существует базис вида

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{A^iB^j \mid\, & 0 \leqslant i \leqslant n_1 - 1, \text{для } j = 0,\\ & 0 \leqslant i \leqslant n_2' - 1, \text{для } j = 1,\\ & \vdots\\ & 0 \leqslant i \leqslant n_k' - 1, \text{для } j = k-1\}, \end{aligned} \tag{8}$$

где $n_1 \geqslant n_2' \geqslant \ldots \geqslant n_k'$ такие числа, что $n_l' \leqslant n_l$ при $l = 2, \ldots, k$.

Доказательство. Поскольку размерность не меняется при сопряжении, сразу будем считать, что A является указанной жордановой матрицей. Докажем теорему индукцией по k.

База. При $k = 1$ матрица A является циклической, поэтому $B \in \mathbb{F}[A]$, выражается в виде многочлена степени не выше $n - 1 = n_1 - 1$, и утверждение верно.

Шаг. Пусть $k \geqslant 2$ и для всех $l \leqslant k-1$ утверждение верно. Согласно предложению 4.5 A и B представляются как блочные k на k матрицы. Для $r \leqslant k$ рассмотрим подматрицы $A(r) = J_{n_1} \oplus \ldots \oplus J_{n_r}$, $B(r) = (B_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, r$. Из перестановочности A и B следует, что $A(r)B(r) = B(r)A(r)$ для всех $r \leqslant k$.

Заметим, что в силу коммутативности алгебра $\mathcal{L}(\{E, A, B\})$ как линейное пространство порождается всеми словами вида A^iB^j, $i, j \geqslant 0$. Чтобы доказать наличие базиса вида 8, сначала покажем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\{E, A, B\}) = \langle A^iB^j \mid\, & 0 \leqslant i \leqslant n_1 - 1, \text{для } j = 0,\\ & 0 \leqslant i \leqslant n_2 - 1, \text{для } j = 1,\\ & \vdots\\ & 0 \leqslant i \leqslant n_k - 1, \text{для } j = k-1\rangle. \end{aligned} \tag{9}$$

Для этого докажем, что линейная оболочка (9) является не только подпространством, но и алгеброй, а для этого достаточно показать, что она инвариантна относительно умножения на A и B.

Применим индукцию по r: положим $\mathcal{A}_r = \langle A(r)^i B(r)^{j-1} |\ 0 \leqslant i \leqslant n_j - 1, j = 1, \ldots, r\rangle$. Для $r = 1$ получаем ту же базу, что и при $k = 1$. Предположение индукции: при $r < k$ $\mathcal{A}_r = \mathcal{L}(\{E, A(r), B(r)\})$. Утверждение получится для $r = k$.

Пусть $r < k$. В этом случае $r + 1 \leqslant k$, $J_{n_{r+1}}$ нильпотентная матрица индекса n_{r+1}. Тогда для всякого $\nu \geqslant n_{r+1}$

$$A^\nu = A(r)^\nu \oplus O,$$

в частности,

$$A^\nu A^i = A(r)^\nu A(r)^i \oplus O$$

для всех $i \geqslant 0$.

Теперь посмотрим $A^\nu A^i B^j$:

$$A^\nu A^i B = \begin{pmatrix} A(r)^{\nu+i} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(r) & * \\ * & * \end{pmatrix} = BA^\nu A^i = \begin{pmatrix} B(r) & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(r)^{\nu+i} & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

откуда

$$A^\nu A^i B = A(r)^\nu A(r)^i B(r) \oplus O.$$

Применяя это рассуждение j раз, получаем

$$A^\nu A^i B^j = A(r)^\nu A(r)^i B(r)^j \oplus O.$$

Таким образом,

$$A^\nu \mathcal{A} = A(r)^\nu \mathcal{L}(\{E, A(r), B(r)\}) \oplus O,$$

по индукции $A^\nu \mathcal{A} = A(r)^\nu \mathcal{A}_r \oplus O = A^\nu \langle A^i B^{j-1} |\ 0 \leqslant i \leqslant n_j - 1, j = 1, \ldots, r\rangle$. Рассмотрим умножение A^ν на слова из $\langle A^i B^{j-1} |\ 0 \leqslant i \leqslant n_j - 1, j = 1, \ldots, r\rangle$. Если $n_j > \nu \geqslant n_{r+1}$, то

$$\begin{aligned} &A^\nu \langle E, A, \ldots, A^{n_j-1}\rangle B^{j-1} = \\ &\quad A^\nu \langle E, A, \ldots, A^{n_j-\nu-1}, A^{n_j-\nu}, A^{n_j-\nu+1}, \ldots, A^{n_j-1}\rangle B^{j-1} = \\ &\quad \langle A^\nu, A^{\nu+1}, \ldots, A^{n_j-1}\rangle B^{j-1} + A^{n_j}\langle E, A, \ldots, A^{\nu-1}\rangle B^{j-1} \subseteq \\ &\qquad \mathcal{A}_k + A^{n_j}\mathcal{A} \end{aligned}$$

Если $\nu \geqslant n_j > n_{r+1}$, то

$$\begin{aligned} &A^\nu \langle E, A, \ldots, A^{n_j-1}\rangle B^{j-1} = \\ &\quad \langle A^\nu, A^{\nu+1}, \ldots, A^{n_j+\nu-1}\rangle B^{j-1} = \\ &\quad A^{n_j}\langle A^{\nu-n_j}, \ldots, A^{\nu-1}\rangle B^{j-1} \subseteq \\ &\qquad A^{n_j}\mathcal{A}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\nu \geqslant n_{r+1}$ имеем $A^\nu \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_k + \sum\limits_{j=1}^{r} A^{n_j}\mathcal{A}$ и

$$A^\nu \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_k.$$

Теперь можем показать, что $A\mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}_k$. Пусть $j = 1, \dots, k$,

$$A\langle E, A, \dots, A^{n_j-1}\rangle B^{j-1} = \langle A, A^2, \dots, A^{n_j-1}\rangle B^{j-1} + \langle A^{n_j} B^{j-1}\rangle \subseteq \mathcal{A}_k + \mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}_k.$$

Отсюда видно, что

$$B^{j-1}\mathcal{L}(\{A\}) \subseteq \mathcal{A}_k,$$

для каждого $j = 1, \dots, k$, и значит в силу того, что $\mathcal{A}_k$ является линейным пространством, получаем

$$\sum_{j=1}^{k} B^{j-1}\mathcal{L}(\{A\}) \subseteq \mathcal{A}_k.$$

По обобщённой теореме Гамильтона—Кэли для всех $s \geqslant k$ все большие степени $A^iB^s \in \sum\limits_{j=1}^{k} B^{j-1}\mathcal{L}(\{A\}) \subset \mathcal{A}_k$ Т.е. $\mathcal{A}_k$ инвариантно относительно умножения на A и B, поэтому является алгеброй, содержащей A и B значит, $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}$.

Как получить искомый базис $\mathcal{B}$. Из слов в списке $E, A, \dots, A^{n_1-1}, B, AB, \dots, A^{n_2-1}B, \dots, B^{k-1}, AB^{k-1}, \dots, A^{n_k-1}B^{k-1}$ последовательно для каждого $j \geqslant 2$ и $i' = 0, \dots, n_j - 1$, проверяем, если $A^{n_j-1-i'}B^{j-1}$ линейно выражается через предыдущие слова, то вычеркиваем его из списка. Таким образом получим

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{A^iB^j |\ & 0 \leqslant i \leqslant n_1 - 1, \text{для } j = 0,\\ & 0 \leqslant i \leqslant n_2' - 1, \text{для } j = 1,\\ & \vdots\\ & 0 \leqslant i \leqslant n_k' - 1, \text{для } j = k-1\},\end{aligned}$$

где $n_l' \leqslant n_l$ при $l = 2, \dots, k$. Почему $n_l' \geqslant n_{n+1}'$? Для $l = 1$ верно, что $n_2' \leqslant n_2\ leqn_1$. Далее $A^{n_l'}B^{l-1}$ выражается через предыдущие слова списка по построению. Умножаем на B. Получаем, что $A^{n_l'}B^l$ выражается через предыдущие слова списка, откуда $n_l' \geqslant (n_{l+1}' - 1) + 1 = n_{l+1}'$.

$\square$

Следствие 6.5. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующие нильпотентные матрицы. Тогда $\dim \mathcal{L}(\{E, A, B\}) \leqslant n$.

Теорема 6.6 (Теорема Герштенхабера, 1961)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующие матрицы. Тогда $\dim \mathcal{L}(\{E, A, B\}) \leqslant n$.

Доказательство. Пусть у матрицы A m различных собственных чисел, $A = A(1) \oplus \cdots \oplus A(m)$, A_i — жорданова матрица размера n_i, отвечающая числу λ_i. Согласно предложению 4.5, матрица B также имеет блочно-диагональный вид $B = B(1) \oplus \cdots \oplus B(m)$, $A(j)B(j) = B(j)A(j)$, $j = 1, \ldots, m$. Как показано в доказательстве теоремы о двойном централизаторе и теоремы Шура, алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{E, A, B\})$ содержит все диагональные идемпотентные матрицы вида $E_j = O \oplus \cdots \oplus E_{n_j} \oplus \cdots \oplus O$, $j = 1, \ldots, m$. Поэтому $\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} \mathcal{L}(\{E_{n_j}, A(j), B(j)\})$ и по предыдущему следствию

$$\dim \mathcal{A} = \sum_{j=1}^{m} \dim \mathcal{L}(\{E_{n_j}, A(j), B(j)\}) \leqslant \sum_{j=1}^{m} n_j = n.$$

□

Задачи к лекции 6.

Во всех задачах поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Задача 1. Приведите пример коммутирующих матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, таких, что $B \notin \mathbb{F}[A]$ и $A \notin \mathbb{F}[B]$, и $\dim \mathcal{L}(\{E, A, B\}) = n$.

Задача 2. Приведите пример коммутирующих матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, таких, что $B \notin \mathbb{F}[A]$ и $A \notin \mathbb{F}[B]$, и $\dim \mathcal{L}(\{E, A, B\}) < n$.

Задача 3. Покажите, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & -1 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_7(\mathbb{C})$$

нильпотентны и коммутируют. Найдиде для алгебры $\mathcal{A}$, порождённой A, B, базис из теоремы 6.4. Чему равна $\dim \mathcal{A}$?

Задача 4. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующие нильпотентные матрицы, жорданова нормальная форма которых одинаковая. Можно ли от базиса из теоремы 6.4 перейти к новому базису от слов $A^i B^j$, который удовлетворяет следующему условию симметричности: для пары (i, j) слова $A^i B^j$ и $A^j B^i$ входят, либо не входят в базис, одновременно?

Задача 5. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующие нильпотентные матрицы, A имеет индекс нильпотентности r, B — индекс нильпотентности s, $r \geqslant s$. Каким может быть класс нильпотентной алгебры, порожденной A и B?

7 Ещё про алгебры, порождённые циклическими матрицами. Двупорождённые коммутативные матричные подалгебры максимальной размерности.

Определение 7.1. *Разбиение* натурального числа n — это представление n в виде суммы положительных целых чисел, называемых частями, так что порядок следования частей не учитывается, (т. е. разбиения, отличающиеся только порядком частей, считаются равными). В канонической записи разбиения части перечисляются в невозрастающем порядке.

Число разбиений $P(n)$ натурального числа n является одним из фундаментальных объектов изучения в теории чисел. Нахождение его выражения в виде функции от n остаётся открытой проблемой. Асимптотическое равенство для числа разбиений найдено Г.Х. Харди и С. Рамануджаном: при $n \to \infty$

$$P(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Обозначение 7.2. Рассмотрим циклическую матрицу $C \in M_n(\mathbb{F})$. В жордановой нормальной форме матрицы C каждому собственному значению γ_j соответствует единственная жорданова клетка размера n_j, причем $\sum\limits_j n_j = n$. Известно, что жорданова нормальная форма матрицы единственна с точностью до порядка клеток. Таким образом, жордановой нормальной форме матрицы C можно сопоставить разбиение числа n. Обозначим его $p_J(C)$.

Лемма 7.3. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей A. Если $C \in \mathcal{A}$— циклическая матрица, то $p_J(C) = p_J(A)$.

Доказательство. Из условия $C \in \mathcal{A}$ следует, что существует многочлен $Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ степени $\deg Q \leqslant n-1$ такой, что $C = Q(A)$.

Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ — все различные собственные значения матрицы A, кратностей $s_1, \dots, s_k$, соответственно.

Тогда согласно замечанию о спектрах треугольных матриц собственными значениями матрицы $Q(A)$ будут числа $Q(\gamma_1), \dots, Q(\gamma_k)$, причём $Q(\gamma_i)$ может соответствовать одна жорданова клетка размера s_i, либо несколько клеток, сумма размеров которых также равна s_i.

Поскольку матрица $C = Q(A)$ по условию циклическая, то каждому её собственному значению соответствует ровно одна жорданова клетка, значит, все числа $Q(\gamma_1), \dots, Q(\gamma_k)$ попарно различны, им соответствуют клетки размеров $s_1, \dots, s_k$.

Таким образом, $p_J(C) = p_J(Q(A)) = p_J(A)$. □

Обозначение 7.4. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативную подалгебру $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, порождённую циклической матрицей. Тогда через $p_J(\mathcal{A})$ обозначим разбиение, соответствующее произвольной циклической матрице в алгебре $\mathcal{A}$.

Обозначим $J_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} E_{i,i+1} \in T_k(\mathbb{F})$ — жорданова клетка размера k с собственным числом 0, и возьмём порождённую ей алгебру $\mathcal{N}_k$. Она совпадает с линейной оболочкой $\langle E_k,\ J_k^i | i = 1, \dots, k-1\rangle \subset T_k(\mathbb{F})$.

Обозначение 7.5. Пусть дано разбиение $\mathbf{p} = (n_1, \dots, n_m)$ числа n, где $n \geqslant n_1 \geqslant \dots \geqslant n_m \geqslant 0$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$. Тогда сопоставим ему алгебру $\mathcal{T}_{\mathbf{p}} = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} \mathcal{N}_{n_j} \subset T_n(\mathbb{F})$, где прямая сумма понимается как алгебра блочно-диагональных матриц.

Теорема 7.6. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим коммутативные подалгебры $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset M_n(\mathbb{F})$, порождённые циклическими матрицами. Тогда
1. подалгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ подобны в $M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $p_J(\mathcal{A}) = p_J(\mathcal{B})$;
2. в $M_n(\mathbb{F})$ содержится ровно $P(n)$ различных с точностью до подобия подалгебр, порождённых циклическими матрицами;
3. подалгебра $\mathcal{A}$ подобна верхнетреугольной подалгебре $\mathcal{T}_{p_J(\mathcal{A})}$.

Доказательство. Утверждение пункта 2 очевидно следует из утверждения пункта 1. Докажем 1. *Необходимость.* Пусть $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ — циклические матрицы. Допустим, найдётся невырожденная матрица $T \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $\mathcal{B} = T\mathcal{A}T^{-1}$. Тогда по лемме **??** алгебра $\mathcal{B}$ порождена циклической матрицей $B_T = TAT^{-1}$. существует многочлен $Q(x) \in \mathbb{F}[x]$ степени $\deg Q \leqslant n-1$ такой, что $B = Q(B_T)$.

Применяя лемму 7.3, в итоге получаем

$$p_J(\mathcal{A}) = p_J(A) = p_J(TAT^{-1}) = p_J(\mathcal{B}).$$

Достаточность. Пусть $p_J(A) = p_J(B) = (n_1, \dots, n_m)$, где $n \geqslant n_1 \geqslant \dots \geqslant n_m \geqslant 0$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$.

Тогда существуют такие невырожденные матрицы $U, V \in M_n(\mathbb{F})$, что $U^{-1}AU$ и $V^{-1}BV$ — жордановы, причём размеры их клеток упорядочены по убыванию. Из того, что каждой жордановой клетке соответствует своё собственное число, получаем

$$\mathcal{A} = U(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{N}_{n_i})U^{-1},$$

$$\mathcal{B} = V(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{N}_{n_i})V^{-1},$$

откуда
$$\mathcal{B} = VU^{-1}\mathcal{A}(VU^{-1})^{-1}.$$

Из последних равенств сразу получается и утверждение пункта 3. $\square$

Из доказательства теоремы Герштенхабера видно, что для описания алгебр максимальной размерности достаточно описать такие алгебры в нильпотентном случае. Разберём случай жордановых клеток единого размера. Пусть $n = km$, матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ приведена к жордановой форме $J_m \oplus \ldots \oplus J_m (k$ раз). $B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующая с A нильпотентная матрица. Заметим, что условие $\dim \mathcal{L}(\{E, A <, B\}) = n$ означает, что в теореме 6.4 базис $\mathcal{B}$ совпадает с множеством всех слов $\{A^i B^j |\ 0 \leqslant i \leqslant m-1,\ j = 0, \ldots, k-1\}$.

Как показано в обобщённой теореме Гамильтона–Кэли $B = (p_{ij}(J_m))$, $p_{ij}(x) \in \mathbb{F}[x]$, $B^k = f_{k-1}(A)B^{k-1} + \ldots + f_1(A)B + f_0(A)$.

Определение 7.7. Назовём матрицу B *A-циклической*, если для $r < k$ B^r не выражается в виде такого многочлена степени $r-1$ jn B с коэффициентами из $\mathbb{F}[A]$.

Определение 7.8. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$ и $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}[x]$ (многочлен со старшим коэффициентом 1 будем называть *унитарным*). *Сопровождающей матрицей многочлена* $f(x)$ называется матрица
$$C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

Теорема 7.9. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$ и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Матрица A является циклической тогда и только тогда, когда она подобна сопровождающей матрице своего характеристического многочлена.

Доказательство. Доказательство предлагается в качестве упражнения (см. задачи к лекции). $\square$

Теорема 7.10. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $n = km$, матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ приведена к жордановой форме $J_m \oplus \ldots \oplus J_m (k$ раз). $B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующая с A нильпотентная матрица, $B = (b'_{ij}(J_m))$. Тогда $\dim \mathcal{L}(\{E, A, B\}) = n$ тогда и только тогда, когда матрица $B_0 = (b'_{ij}(O_m))$ является A-циклической. Более того, в данных условиях можно выбрать жорданов базис для A, в котором матрица
$$B_0 = \begin{pmatrix} O & E_m & O & \ldots & O \\ O & O & E_m & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & E_m \\ O & O & O & \ldots & O \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} O & E_m & O & \ldots & O \\ O & O & E_m & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & E_m \\ f_0(J_m) & f_1(J_m) & f_2(J_m) & \ldots & f_{k-1}(J_m) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. "$\Rightarrow$". Пусть $\dim \mathcal{L}(\{E, A, B\}) = n$. От противного, допустим, что B_0 не является A-циклической. Тогда $B_0^{k-1} = g_{k-2}(A)B_0^{k-2} + \ldots + g_1(A)B_0 + g_0(A)$.

В матрице B_0 собраны свободные члены многочленов из матрицы B, поэтому в матрице $B - B_0$ все многочлены без свободных членов, значит $B - B_0 = J_m B_1$ для некоторой $B_1 \in M_k(\mathbb{F}[J_m])$. Матрица как элемент $M_k(\mathbb{F}[J_m])$ — скалярная, откуда $B = B_0 + AB_1$, и также A коммутирует с B_0 и B_1. Рассмотрим B^{k-1}:

$$B^{k-1} = (B_0 + AB_1)^{k-1} = B_0^{k-1} + AD,$$

$D \in M_k(\mathbb{F}[J_m])$ (раскрыли скобки и воспользовались условием коммутирования с A). Поскольку $A^m = 0$, то

$$\begin{aligned} A^{m-1}B^{k-1} = A^{m-1}B_0^{k-1} = A^{m-1}(g_{k-2}(A)B_0^{k-2} + \ldots + g_1(A)B_0 + g_0(A)) = \\ A^{m-1}(g_{k-2}(A)(B - AB_1)^{k-2} + \ldots + g_1(A)(B - AB_1) + g_0(A)) = \\ A^{m-1}(g_{k-2}(A)B^{k-2} + \ldots + g_1(A)B + g_0(A)), \end{aligned}$$

в последнем равенстве снова использовали формулу бинома и условие $A^m = 0$. При умножении $A^{m-1}g_i(A)$ все слагаемые в $g_i(A)$, кроме свободного члена, обнуляются, т.е. остаётся $\gamma_i A^{m-1}$, $\gamma_i \in \mathbb{F}$. Таким образом, слово $A^{m-1}B^{k-1}$ выражено в виде $\mathbb{F}$-линейной комбинации слов $A^{m-1}B^j$, $j = 0, \ldots, k-2$. Противоречие с тем, что эти слова составляют базис $\mathcal{B}$.

"$\Leftarrow$". Заметим, что если $B_0 = (b'_{ij}(O_m))$ является A-циклической, то матрица $\tilde{B}_0 = (b'_{ij}(0)) \in M_k(\mathbb{F})$ является циклической в обычном смысле. Поскольку по условию на алгебру B является нильпотентной матрицей, то для некоторого s: $O = B^s = B_0^s + AD_s$. Из условия коммутативности A и D_s, получаем, что AD_s — нильпотентная, тогда B_0^s, а значит и сама B_0 тоже нильпотентна. Тогда $\tilde{B}_0 \in M_k(\mathbb{F})$ — циклическая нильпотентная матрица. Следовательно, в $M_k(\mathbb{F})$ она подобна жордановой клетке J_k: $\tilde{T}^{-1}\tilde{B}_0\tilde{T} = J_k$ для некоторой обратимой матрицы $\tilde{T} \in M_k(\mathbb{F})$. Пусть в явном виде, $\tilde{T} = (t_{ij})$, $\tilde{S} = \tilde{T}^{-1} = (s_{ij})$. Сопоставим им матрицы $T = (t_{ij}E_m)$, $S = (s_{ij}E_m) \in M_{km}(\mathbb{F})$. Имеем

$$TS = E_n,\ SB_0T = \begin{pmatrix} O & E & O & \ldots & O \\ O & O & E & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & E \\ O & O & O & \ldots & O \end{pmatrix},$$

при этом по построению $TA = AT$.

В этом базисе

$$B=\begin{pmatrix} J_mb_{11}(J_m) & E+J_mb_{12}(J_m) & J_mb_{13}(J_m) & \dots & J_mb_{1k}(J_m)\\ J_mb_{21}(J_m) & J_mb_{22}(J_m) & E+J_mb_{23}(J_m) & \dots & J_mb_{2k}(J_m)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ J_mb_{k-1,1}(J_m) & J_mb_{k-1,2}(J_m) & J_mb_{k-1,3}(J_m) & \dots & E+J_mb_{k-1,k}(J_m)\\ J_mb_{k1}(J_m) & J_mb_{k2}(J_m) & J_mb_{k3}(J_m) & \dots & J_mb_{kk}(J_m) \end{pmatrix}.$$

Построим обратимую матрицу $P=(p_{ij}(J_m))\in M_k(\mathbb{F}[J_m])$ такую, что

$$\begin{pmatrix} p_{11}(J_m) & p_{12}(J_m) & \dots & p_{1k}(J_m)\\ p_{21}(J_m) & p_{22}(J_m) & \dots & p_{2k}(J_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{k1}(J_m) & p_{k2}(J_m) & \dots & p_{kk}(J_m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_mb_{11}(J_m) & E+J_mb_{12}(J_m) & \dots & J_mb_{1k}(J_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ J_mb_{k-1,1}(J_m) & J_mb_{k-1,2}(J_m) & \dots & E+J_mb_{k-1,k}(J_m)\\ J_mb_{k1}(J_m) & J_mb_{k2}(J_m) & \dots & J_mb_{kk}(J_m) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} O & E_m & O & \dots & O\\ O & O & E_m & \dots & O\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & O & \dots & E_m\\ f_0(J_m) & f_1(J_m) & f_2(J_m) & \dots & f_{k-1}(J_m) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11}(J_m) & p_{12}(J_m) & \dots & p_{1k}(J_m)\\ p_{21}(J_m) & p_{22}(J_m) & \dots & p_{2k}(J_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{k1}(J_m) & p_{k2}(J_m) & \dots & p_{kk}(J_m) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что можно найти решение с $p_{11}(J_m)=E, p_{12}(J_m)=\ldots=p_{1k}(J_m)=O$. Тогда из равенства элементов первой строки получаем:

$$p_{21}(J_m)=J_mb_{11}(J_m),\ p_{22}(J_m)=E+J_mb_{12}(J_m),\ \ldots,p_{2k}(J_m)=J_mb_{1k}(J_m).$$

Определив элементы втрой строки матрицы P, продолжая по аналогии из равенств элементов l-ой строки ($l=2,\ldots,k-1$) произведения, получаем выражение для $l+1$-ой строки P:

$$p_{l+1,1}(J_m)=\sum_{r=1}^{k}p_{l,r}(J_m)J_mb_{r,1}(J_m),$$

$$p_{l+1,j}(J_m)=p_{l,j-1}(J_m)+\sum_{r=1}^{k}p_{l,r}(J_m)J_mb_{r,j}(J_m),\ j=2,\ldots,k.$$

Докажем по индукции, что p_ii— обратимая матрица вида E плюс нильпотентная: $p_{i,i}(J_m)=E+J_m\tilde{p}_{i,i}(J_m)$, а p_{ij}, $i\neq j$ — нильпотентная, $p_{i,j}(J_m)=J_m\tilde{p}_{i,j}(J_m)$. Для $i=1,2$ база видна из построений. Для $i\geqslant 3$ и $j=1$ в каждом слагаемом есть множитель J_m, поэтому $p_{i,1}(J_m)$ — нильпотентная. Тогда для $i\geqslant 3$, $j\geqslant 2$, $p_{i,j}(J_m)=p_{i-1,j-1}(J_m)+\sum\limits_{r=1}^{k}p_{i-1,r}(J_m)J_mb_{r,j}(J_m)$. Если $i\neq j$, то $i-1\neq j-1$, по предположению индукции

$p_{i-1,j-1}(J_m) = J_m\tilde{p}_{i-1,j-1}(J_m)$, откуда $p_{i,j}(J_m) = J_m(\tilde{p}_{i-1,j-1}(J_m) + \sum\limits_{r=1}^{k} p_{i-1,r}(J_m)b_{r,j}(J_m))$ — нильпотентная требуемого вида. Если $i = j$, $p_{i-1,i-1}(J_m) = E + J_m\tilde{p}_{i-1,i-1}(J_m)$, $p_{i,i}(J_m) = E + J_m(\tilde{p}_{i-1,i-1}(J_m) + \sum\limits_{r=1}^{k} p_{i-1,r}(J_m)b_{r,i}(J_m))$ единичная плюс нильпотентная требуемого вида.

Тогда вся матрица $P = E + N$, N — нильпотентная, такая матрица как известно обратима.

Для обратимой матрицы можно решить уравнение для последней строки, чтобы определить многочлены $f_0(J_m), f_1(J_m), \ldots, f_{k-1}(J_m)$.

Для матрицы B такого вида по построению видно, что матрицы A^iB^j, $i = 0, \ldots, m-1$, $j = 0, \ldots, k-1$ линейно независимы. $\square$

Теорема 7.11. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $n = km$, матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ приведена к жордановой форме $J_m \oplus \ldots \oplus J_m$($k$ раз). $B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующая с A нильпотентная матрица, $B = (p_{ij}(J_m))$. Тогда алгебра $\mathcal{L}(\{E, A, B\})$ максимальная по включению коммутативная алгебра тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{L}(\{E, A, B\}) = n$.

Задачи к лекции 7.

Во всех задачах поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Задача 1. Докажите теорему 7.9.

Задача 2. Установите, какие из следующих комплексных матриц сопряжены:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Для матриц из предыдущей задачи выяснить, сопряжены ли порожденные ими алгебрами?

Задача 4. Пусть $n = km$, матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ приведена к жордановой форме $J_m \oplus \ldots \oplus J_m (k$ раз). $B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующая с A нильпотентная матрица вида $B = \begin{pmatrix} O & E_m & O & \ldots & O \\ O & O & E_m & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & E_m \\ f_0(J_m) & f_1(J_m) & f_2(J_m) & \ldots & f_{k-1}(J_m) \end{pmatrix}$. Покажите, для вектора $v = \begin{pmatrix} O \\ \vdots \\ O \\ E \end{pmatrix} \in \mathbb{F}[J_m]^k$, что множество $v, Bv, \ldots, B^{k-1}v$ линейно независимо над кольцом $\mathbb{F}[J_m]$ (т.е. нет их нетривиальной комбинации с коэффициентами из $\mathbb{F}[J_m]$ равной нулевому вектору).

Задача 5. К теореме 7.11: Пусть $n = km$, матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ приведена к жордановой форме $J_m \oplus \ldots \oplus J_m (k$ раз). $B \in M_n(\mathbb{F})$ — коммутирующая с A нильпотентная матрица вида $B = \begin{pmatrix} O & E_m & O & \ldots & O \\ O & O & E_m & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \ldots & E_m \\ f_0(J_m) & f_1(J_m) & f_2(J_m) & \ldots & f_{k-1}(J_m) \end{pmatrix}$. Используя предыдущую задачу, покажите, что матрица $C \in \mathcal{C}(\{A, B\})$ выражается в виде многочлена от A и B, т.е. алгебра $\mathcal{L}(\{E, A, B\})$ максимальная по включению коммутативная алгебра.

Задача 6. К теореме 7.11: Пусть $n = km$, матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ приведена к жордановой форме $J_m \oplus \ldots \oplus J_m (k$ раз). $B \in M_n(\mathbb{F})$, коммутирующая с A нильпотентная матрица такая, что матрица B_0 не является A-циклической. Покажите, что размерность $\mathcal{C}(B_0) \cap M_k(\mathbb{F}[J_m^{m-1}])$ (как пересечения линейных пространств над $\mathbb{F}$) не меньше $k + 1$. Указание: матрицу B_0 можно взять жордановой блочной матрицей как в доказательстве теоремы 7.

8 Обобщения коммутативности. Матрицы, коммутирующие с точностью до множителя, и порождённые ими алгебры. Нормальная форма Дрейзина.

В соотношении коммутативности матрицы AB и BA равны. Одним из естественных обобщений будет случай, когда они могут быть не равны, но линейно зависимы как векторы. Получим следующее определение.

Определение 8.1. Если $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и существует множитель $\omega \in \mathbb{F}$ такой, что $AB = \omega BA$, то будем говорить, что A, B *коммутируют с точностью до множителя* ω (или ω-*коммутируют*).

Лемма 8.2. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$.

Доказательство. Рассмотрим $2n \times 2n$ матрицы. Пусть $C = \begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix}$, тогда $C^{-1} = \begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix}$ и выполнено следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & O \\ B & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ B & BA \end{pmatrix}.$$

Характеристические многочлены этих сопряженных матриц равны, откуда получаем требуемое равенство $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$. □

Следствие 8.3. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = \omega BA$, $\omega \neq 1$. Если матрица AB не является нильпотентной, то ω — первообразный корень из единицы степени $k \leqslant n$.

Доказательство. Воспользуемся предыдущей леммой: $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t) = \chi_{\omega BA}(t)$.

Если матрица AB не является нильпотентной, то её характеристический многочлен отличен от t^n. Рассмотрим наименьшее $j = 0, \ldots, n-1$, для которого коэффициент c_j этого многочлена при t^j отличен от нуля. Для матрицы ωBA коэффициент характеристического многочлена при t^j равен $\omega^{n-j} c_j$. Откуда из совпадения многочленов получаем, что $\omega^{n-j} = 1$, т.е. является корнем из единицы степени $n - j \leqslant n$. Корень из единицы степени $n-j$ является первообразным корнем из единицы степени $k|(n-j)$. □

Лемма 8.4. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $AB = \omega BA$, $\omega \neq 1$. Если матрица AB является нильпотентной, то пара A, B одновременно триангулизуема.

Доказательство. 1) Пусть $\omega \neq 0$. Рассмотрим $[A, B] = AB - BA = (\omega^{-1} - 1)AB$, по условию он нильпотентный. В силу условия ω-коммутирования, любой одночлен $M(A, B)$от матриц A, B коллинеарен одночлену вида $A^i B^j$. Тогда $M(A, B)[A, B] = \alpha A^{i+1} B^{j+1}$ и $(M(A, B)[A, B])^n = \alpha^n (A^{i+1} B^{j+1})^n = \beta (AB)^n M_1(A, B) = O$. Значит, применима теорема 3.12.

2) При $\omega \neq 0$ утверждение получено в следствии 3.11. □

Далее рассмотрим общий случай, когда матрицы AB и BA не являются нильпотентными.

Предложение 8.5. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, $\omega \in \mathbb{F}$, $\omega \neq 0, 1$. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$ — жорданова матрица вида $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, где $A_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ — жорданова клетка (числа λ_i могут совпадать). Рассмотрим матрицу $X \in M_n(\mathbb{F})$, $AX = \omega XA$. Разобьём X на m^2 блоков X_{kl} размеров $n_k \times n_l$ в соответствии с блочным разбиением A. Тогда
1. $X_{rs} = 0$ если $r = s$ и $\lambda_r \neq 0$, или если $r \neq s$ и $\lambda_r \neq \omega\lambda_s$;
2. если $\lambda_r = 0$, то

$$X_{rr} = \begin{pmatrix} y_{r,r;1} & y_{r,r;2} & y_{r,r;3} & \dots & y_{r,r;n_r} \\ 0 & \omega y_{r,r;1} & \omega y_{r,r;2} & \dots & \omega y_{r,r;n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \omega^{n_r-2} y_{r,r;1} & \omega^{n_r-2} y_{r,r;2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega^{n_r-1} y_{r,r;1} \end{pmatrix};$$

3. если $\lambda_r = \omega\lambda_s$, то

$$X_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \dots & y_{r,s;n_r} \\ 0 & 0 & 0 & \omega y_{r,s;1} & \dots & \omega y_{r,s;n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega^{n_r-1} y_{r,s;1} \end{pmatrix}, \ n_r < n_s.$$

$$X_{rs} = \begin{pmatrix} y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \dots & y_{r,s;n_s} \\ 0 & \omega y_{r,s;1} & \ddots & \omega y_{r,s;n_s-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & & \omega^{n_s-1} y_{r,s;1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ n_r \geqslant n_s.$$

Доказательство. Из условия $AX = XA$ получаем уравнения на блоки:

$$A_r X_{rs} = \omega X_{rs} A_s$$

для всех $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

Для фиксированных $r, s \in \{1, \ldots, m\}$ матрица X_{rs} определяется одним уравнением

$$A_r X_{rs} = \omega X_{rs} A_s. \tag{10}$$

Упростим обозначения: $(X_{rs})_{ij} = y_{ij}$, $i = 1, \ldots, n_r, j = 1, \ldots, n_s$.

Если расписать уравнение (10) поэлементно, получим

$$\lambda_r y_{ij} + y_{i+1,j} = \omega(\lambda_s y_{ij} + y_{i,j-1}), \text{ if } i \neq n_r, j \neq 1, \tag{11}$$

$$\lambda_r y_{n_r,j} = \omega(\lambda_s y_{n_r,j} + y_{n_r,j-1}),\ \text{if } j \neq 1, \tag{12}$$

$$\lambda_r y_{i,1} + y_{i+1,1} = \omega\lambda_s y_{i,1},\ \text{if } i \neq n_r, \tag{13}$$

$$\lambda_r y_{n_r,1} = \omega\lambda_s y_{n_r,1}. \tag{14}$$

I. $\mathbf{s} = \mathbf{r}$.

1. Пусть $\lambda_r \neq 0$. Тогда из (14) получаем $\lambda_r(1-\omega)y_{n_r,1} = 0$, откуда $y_{n_r,1} = 0$. Последовательно используя (12), получаем $y_{n_r,2} = 0$, $y_{n_r,3} = 0, \ldots, y_{n_r,n_r} = 0$. Затем последовательно используя (13), получим $y_{n_r-1,1} = 0$, $y_{n_r-2,1} = 0, \ldots, y_{1,1} = 0$. В конце используя (11), начиная с $n_r - 1$-ой строки и 2-го столбца, окончательно замечаем, что

$$X_{rr} = 0.$$

2. Пусть $\lambda_r = 0$. Последовательно используя (12), получаем $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r,2} = 0, \ldots, y_{n_r,n_r-1} = 0$. Затем последовательно используя (13), получим $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r-1,1} = 0, \ldots, y_{2,1} = 0$. Наконец из (11) следует, что

$$y_{i+1,j} = \omega y_{i,j-1},$$

поэтому X_{rr} является верхнетреугольной матрицей вида

$$X_{rr} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_{n_r} \\ 0 & \omega y_1 & \omega y_2 & \ldots & \omega y_{n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \omega^{n_r-2} y_1 & \omega^{n_r-2} y_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega^{n_r-1} y_1 \end{pmatrix}.$$

II. $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$.

1. Пусть $\lambda_r \neq \omega\lambda_s$. Тогда из уравнения (14) получаем, что $(\lambda_r - \omega\lambda_s)y_{n_r,1} = 0$, т.е. $y_{n_r,1} = 0$. Последовательно используя (12), получаем $y_{n_r,2} = 0$, $y_{n_r,3} = 0, \ldots, y_{n_r,n_r} = 0$. Затем последовательно используя (13), получим $y_{n_r-1,1} = 0$, $y_{n_r-2,1} = 0, \ldots, y_{1,1} = 0$. В конце используя (11), начиная с $n_r - 1$-ой строки и 2-го столбца, окончательно замечаем, что

$$X_{rs} = 0.$$

2. Пусть $\lambda_r = \omega\lambda_s$. Последовательно используя (12), получаем $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r,2} = 0, \ldots, y_{n_r,n_r-1} = 0$. Затем последовательно используя (13), получим $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r-1,1} = 0, \ldots, y_{2,1} = 0$. Наконец из (11) следует, что

$$y_{i+1,j} = \omega y_{i,j-1},$$

поэтому X_{rs} является верхнетреугольной прямоугольной матрицей вида

$$X_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & y_1 & y_2 & \ldots & y_{n_r} \\ 0 & 0 & 0 & \omega y_1 & \ldots & \omega y_{n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega^{n_r-1} y_1 \end{pmatrix},\ n_r < n_s$$

$$X_{rs} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n_s} \\ 0 & \omega y_1 & \ddots & \omega y_{n_s-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & & \omega^{n_s-1} y_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \ n_r \geqslant n_s.$$

$\square$

Предложение 8.6. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \geqslant 2$, $2 \leqslant k \leqslant n$. Тогда матрица $B \in M_n(\mathbb{F})$, имеющая блочное разбиение порядка k вида $B = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & D_1 \\ D_2 & O & \dots & O & O \\ & \ddots & & & \\ O & O & \dots & D_k & O \end{pmatrix}$ невырождена тогда и только тогда, когда все её блоки — квадратные невырожденные матрицы.

Доказательство. Заметим, что перестановкой строк из B получается блочно-диагональная матрица $A = \begin{pmatrix} D_2 & O & \dots & O & O \\ & \ddots & & & \\ O & O & \dots & D_k & O \\ O & O & \dots & O & D_1 \end{pmatrix}$, значит, утверждение можно доказать для неё. Используем индукцию по k. При $k = 2$ получаем матрицу с углом нулей. Если ее диагональные блоки не квадратные, то можно перегруппировать строки, рассмотреть квадратные блоки, в одном из которых будут нулевые строки, либо столбцы, такая матрица вырождена. Для квадратных блоков используем теорему об определителе с углом нулей. Далее для больших k матрицу из k блоков можно рассмотреть как 2×2 блочную $A = \begin{pmatrix} D_2 & O \\ O & A' \end{pmatrix}$, где A' — блочно-диагональная с $k-1$ блоком. D_2 и A'— квадратные невырожденные (база индукции), далее утверждение получается из предположения индукции для A'. $\square$

Важным инструментом в изучении квази-коммутирующих матриц является следующая нормальная форма.

Теорема 8.7 (Теорема Дрейзина)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, которые удовлетворяют соотношению $AB = \varepsilon BA$ для некоторого скаляра $\varepsilon \in \mathbb{F}$, $\varepsilon \neq 1$, и матрица AB не является нильпотентной. Тогда найдутся целое число $0 \leqslant r \leqslant n-2$ и обратимая матрица $P \in M_n(\mathbb{F})$ такие, что

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} S & X \\ O & A_r \end{bmatrix}, \ P^{-1}BP = \begin{bmatrix} T & Y \\ O & B_r \end{bmatrix}, \tag{15}$$

причём число ε обязательно является *первообразным корнем из единицы порядка* $k > 1$, делящего $n-r$, S и T — верхнетреугольные матрицы порядка r, матрицы ST и TS нильпотентны, и

$$A_r = \begin{bmatrix} C & O & \dots & O \\ O & \varepsilon C & \dots & O \\ & & \ddots & \\ O & O & \dots & \varepsilon^{k-1}C \end{bmatrix}, \ B_r = \begin{bmatrix} O & O & \dots & O & D_1 \\ D_2 & O & \dots & O & O \\ & \ddots & & & \\ O & O & \dots & D_k & O \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где $C \in M_{(n-r)/k}(\mathbb{F})$ — такая невырожденная матрица, что $\sigma(C) \cap \varepsilon^j \sigma(C) = \varnothing$ для всех $j = 1, \dots, k-1$, $D_1, \dots, D_k \in M_{(n-r)/k}(\mathbb{F})$ — произвольные невырожденные матрицы, удовлетворяющие соотношениям $D_iC = CD_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Доказательство. Предположим, что $\det(AB) = 0$. Значит, по крайней мере одна из матриц A и B является вырожденной. Допустим, $\det B = 0$. Найдется вектор $v \in \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$, такой что $Bv = 0$. Отсюда $B(Av) = \varepsilon^{-1}A(Bv) = \varepsilon^{-1}A \cdot 0 = 0$, и значит, $BA^iv = 0$ для всех $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Таким образом, подпространство $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ является общим инвариантным подпространством относительно A и B, и в нем найдется вектор $w \in W$ такой, что $Bw = 0$ and $Aw = \lambda w$. Дополним вектор w до базиса $\mathbb{F}^n$ и возьмем матрицу P_1 перехода к этому базису. Тогда

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ O_{n-1,1} & A_1 \end{bmatrix}, P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 0 & * \\ O_{n-1,1} & B_1 \end{bmatrix},$$

матрицы A_1 и B_1 имеют порядок $n-1$ и тоже ε-коммутируют. Пока произведение этих блоков вырождено, повторим итерацию с A_j и B_j, $j \geqslant 1$. Заметим, что процесс остановится при $j \leqslant n-1$, поскольку произведение AB не является нильпотентной матрицей. Случай $j = n-1$ не возможен, поскольку ненулевые числа (матрицы порядка 1) коммутируют и не могут ε-коммутировать. Значит, имеем $r = j \leqslant n-2$ и есть обратимая матрица $P_r \in M_n(\mathbb{F})$, что

$$P_r^{-1}AP_r = \begin{bmatrix} S & X \\ O & A_r \end{bmatrix}, \ P_r^{-1}BP_r = \begin{bmatrix} T & Y \\ O & B_r \end{bmatrix}, \tag{17}$$

, S и T — верхнетреугольные матрицы порядка r, матрицы ST и TS нильпотентны, и $A_rB_r \in M_{n-r}(\mathbb{F})$ — обратимые ε-коммутирующие матрицы. По следствию 8.3 ε

— корень из единицы степени $n-r$, поэтому обязательно является первообразным корнем из единицы порядка $k>1$, делящего $n-r$.

Разобъём $\sigma(A_r)$ на k частей следующим образом: для произвольного собственного числа $\lambda \in \sigma(A_r)$ в подмножество $\mathcal{S}_i$, $i=1\ldots,k$, добавляем $\varepsilon^{i-1}\lambda$, продолжаем процесс, пока остались собственные числа, не распределеённые по $\mathcal{S}_i$, процесс остановится, поскольку всего было не более $n-r$ различных собственных чисел. Поскольку матрица A_r невырожденная, получаем разбиение $\sigma(A_r)=\bigsqcup\limits_{i=1}^{k}\mathcal{S}_i$. По построению $\mathcal{S}_1$ непусто, и если для $\lambda_i \in \mathcal{S}_i$ и $\lambda_j \in \mathcal{S}_j$ выполнено соотношение $\lambda_i=\varepsilon\lambda_j$, то $i \equiv j+1(\pmod k)$). Согласно предложению 8.5 если у A_r нет пар собственных чисел вида $\lambda, \varepsilon\lambda$, то B_r — нулевая, что противоречит условию невырожденности. Значит, $\mathcal{S}_2$ тоже непусто.

Приведем матрицу A_r к жордановой нормальной форме $P^{-1}A_rP=\operatorname{diag}(C_1,\ldots,C_k)$, где C_i — жорданова матрица, отвечающая всем собственным числам из $\mathcal{S}_i$ (пока мы допускаем, что $\mathcal{S}_i$ может быть пусто при $i \geqslant 3$, допустим в этом случае пустую матрицу C_i порядка 0. Далее мы покажем, что из невырожденности A_rB_r следует непустота всех множеств.)

Тогда матрицу $P^{-1}B_rP$ рассмотрим как блочную $k\times k$ матрицу, $P^{-1}B_rP=(D_{ij})$. Поскольку матрица $\tilde{A}_r=P^{-1}A_rP$ является жордановой, то к ней применимо предложение 8.5. По условию на числа в классах $\mathcal{S}_i$, $\tilde{B}=P^{-1}B_rP=\begin{bmatrix} O & O & \ldots & O & D_1 \\ D_2 & O & \ldots & O & O \\ & \ddots & & & \\ O & O & \ldots & D_k & O \end{bmatrix}$, где пока блоки D_i могут порядка 0, если пусты какие-то $\mathcal{S}_j$.

Рассмотрим случай, что $\mathcal{S}_j$ пусто при $j\geqslant 3$, а $\mathcal{S}_{j-1}$ и $\mathcal{S}_{j+1}$ ($j+1$ берем по модулю k) непусты. Тогда матрицы $\tilde{A}_r, \tilde{B}_r$ можно рассмотреть как блочные матрицы порядка $k-1$. Получается, что собственные числа A_{j-1} и A_{j+1} не связаны умножением на ε, следовательно, предложение 8.5 показывает, что блок D_j нулевой и у матрицы $\tilde{B}_r$ есть нулевые строки, противоречие с невырожденностью. Случай пустоты нескольких множеств разбирается аналогично. Таким образом, все $\mathcal{S}_j$ непусты. Из предложения 8.6 для матрицы $\tilde{B}_r$ получаем, что все блоки — квадратные. Это означает совпадение размеров всех матриц C_j —- каждая из них имеет порядок $\frac{n-r}{k}$.

Тогда из соотношения ε-коммутативности для блоков получаем: $C_2D_2=\varepsilon D_2C_1$, в силу невырожденности D_2 отсюда следует, что

$$C_2=D_2(\varepsilon C_1)D_2^{-1}.$$

Продолжая для следющих строк,

$$C_3=D_3(\varepsilon C_2)D_3^{-1}=D_3D_2(\varepsilon^2C_1)D_2^{-1}D_3^{-1},$$

и в общем виде

$$C_j=D_j\cdots D_2(\varepsilon^{j-1}C_1)D_2^{-1}\cdots D_j^{-1},$$

$j = 2, \ldots, k$. Обозначим $C = C_1$, и мы видим, что C_j подобна $\varepsilon^{j-1}C$ для всех j. Возьмем матрицу $U = \mathrm{diag}\,(E_r, E, D_2, D_3D_2, \ldots, D_kD_{k-1}\cdots D_2)$, и сопряжение $A' = U(\mathrm{diag}\,(E_r, P))^{-1}P_r^{-1}AP_r\mathrm{diag}\,(E_r, P)U^{-1}$, $B' = U(\mathrm{diag}\,(E_r, P))^{-1}P_r^{-1}BP_r\mathrm{diag}\,(E_r, P)U^{-1}$. При этом блочная структура останется, обратимые блоки изменятся следующим образом:

$$A'_r = \mathrm{diag}\,(C, \varepsilon C, \ldots, \varepsilon^{k-1}C),$$

$$B'_r = \begin{bmatrix} O & O & \ldots & O & D'_1 \\ D'_2 & O & \ldots & O & O \\ & \ddots & & & \\ O & O & \ldots & D'_k & O \end{bmatrix},$$

а из соотношения ε-коммутативности теперь для блоков будет следовать, что $CD'_i = D'_iC$.

Следствие 8.8. В условиях теоремы 8.7 для матриц $A_r, B_r \in M_{n-r}(\mathbb{F})$ вида (16) существует обратимая $Q \in M_{n-r}(\mathbb{F})$ такая, что

$$Q^{-1}A_rQ = A_r = \begin{bmatrix} C & O & \ldots & O \\ O & \varepsilon C & \ldots & O \\ & & \ddots & \\ O & O & \ldots & \varepsilon^{k-1}C \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}B_rQ = \begin{bmatrix} O & O & \ldots & O & D_0 \\ I & O & \ldots & O & O \\ & \ddots & & & \\ O & O & \ldots & I & O \end{bmatrix}, \tag{18}$$

где $D_0 = D_1D_kD_{k-1}\cdots D_2 \in M_{(n-r)/k}(\mathbb{F})$ невырожденная матрица, удовлетворяющая соотношению $D_0C = CD_0$.

Доказательство. Из теоремы 8.7 видно, что D_0 невырожденная и коммутирует с C. Заметим, что $B_r^k = \mathrm{diag}\,(X_1, \ldots, X_k)$, $X_j = D_jD_{j-1}\cdots D_1D_kD_{k-1}\cdots D_{j+1}$, в частности, $X_1 = D_0$.Поскольку все матрицы D_j невырожденные коммутирующие с C, то $D_j^{-1}X_jD_j = X_{j-1}$ и $D_j^{-1}CD_j = C$. Следовательно все матрицы X_j подобны и матрицы подобия можно выбрать коммутирующими с C. Возьмем

$$Q = E_{\frac{(n-r)}{k}} \oplus D_2 \oplus D_3D_2 \oplus \ldots \oplus D_k\cdots D_2,$$

тогда $Q^{-1}A_rQ = A_r$ и $Q^{-1}B_r^kQ = \mathrm{diag}\,(D_0, \ldots, D_0)$.

Окончательно получаем

$$Q^{-1}B_rQ = \begin{bmatrix} O & O & \ldots & O & D'_1 \\ D'_2 & O & \ldots & O & O \\ & \ddots & & & \\ O & O & \ldots & D'_k & O \end{bmatrix},$$

где

$$D'_1 = I \cdot D_1 \cdot D_k \cdots D_2 = D_0,\ D'_2 = D_2^{-1} \cdot D_2 \cdot E = E,$$

и

$$D_i' = D_2^{-1} \cdots D_i^{-1} \cdot D_i \cdot D_{i-1} \cdots D_2 = E$$

для всех $i = 3, \dots, k$. $\square$

$\square$

Задачи к лекции 8.
Во всех задачах поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Задача 1. Пусть $\omega \neq 0, 1$. Покажите, что если матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулизыемы и ω-коммутируют, то AB — нильпотентная матрица.

Задача 2. Пусть $\omega \neq 0, 1$, $A \in M_n(\mathbb{F})$. Покажите, что ω-централизатор $\mathcal{C}_\omega(A) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) : AX = \omega XA\}$ является подпространством в $M_n(\mathbb{F})$. В каких случаях он будет подалгеброй?

Задача 3. Пусть $\omega \neq 0, 1$, $A \in M_n(\mathbb{F})$ — матрица ранга 1. а) Найдите явный вид ω-централизатора $\mathcal{C}_\omega(A) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) : AX = \omega XA\}$ матрицы A в жордановой форме. б) Вычислите $\dim \mathcal{C}_\omega(A)$.

Задача 4. Пусть $\omega \neq 0, 1$, $A \in M_n(\mathbb{F})$ — ненулевая жорданова матрица. Найдите максимальную размерность ω-централизатора $\mathcal{C}_\omega(A) = \{X \in M_n(\mathbb{F}) : AX = \omega XA\}$.

Задача 5. Установите, что следующие комплексные матрицы A и B антикоммутируют и найдите для них нормальную форму из теоремы Дрейзина:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

9 Системы порождающих. Неуменьшаемые системы порождающих полной матричной алгебры, их максимальная мощность.

Пусть $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ — непустое конечное множество (алфавит). Конечные последовательности букв из B назовем словами. Пусть B^* обозначает множество всех слов в алфавите B, F_B — свободный моноид над алфавитом B, т.е. B^* с операцией конкатенации.

Определение 9.1. *Длина* слова $b_{i_1}\dots b_{i_t}$, где $b_{i_j} \in B$, равна t. Будем считать 1 (пустое слово) словом от элементов B *длины* 0.

Пусть B^i обозначает множество всех слов в алфавите B длины не большей i, $i \geqslant 0$.

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ над произвольным полем $\mathbb{F}$ и её конечную систему порождающих $\mathcal{S}$. Произведения элементов из порождающего множества $\mathcal{S}$ можно рассматривать как образы элементов свободного моноида $F_{\mathcal{S}}$ при естественном гомоморфизме, и их также можно называть словами от образующих и использовать естественное обозначение $\mathcal{S}^i$.

Положим $\mathcal{S}^0 = \{1_{\mathcal{A}}\}$, если алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $1_{\mathcal{A}}$, иначе, положим $\mathcal{S}^0 = \emptyset$.

Обозначение 9.2. Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$, где $\langle S \rangle$ обозначает линейную оболочку множества S в некотором линейном пространстве над полем $\mathbb{F}$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle = \mathbb{F}$ для алгебр с единицей, и $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = 0$, иначе.

Из конечномерности $\mathcal{A}$ получаем, что найдется такой номер h, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$. Если для некоторого $h \geqslant 0$ выполнено $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$$

и также $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geqslant h$.

Почему единица традиционно считается словом от образующих:

Предложение 9.3. $\mathcal{S}$ порождает $M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S} \cup \{E\}$ порождает $M_n(\mathbb{F})$

Доказательство. Алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ замкнута относительно умножения на элементы множества $\mathcal{S} \cup \{E\}$, т.е. является ненулевым двусторонним идеалом в $M_n(\mathbb{F})$, значит, $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = M_n(\mathbb{F})$. □

Определение 9.4. Назовём систему порождающих $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ *неуменьшаемой*, если никакое её собственное подмножество $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ не является системой порождающих для $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{S}$ является неуменьшаемой системой порождающих для $M_n(\mathbb{F})$. Поскольку одна матрица порождает коммутативную алгебру, то в неуменьшаемой системе $\mathcal{S}$ не менее двух элементов.

Пример 9.5. Матрицы $J = J_n(0)$ и матричная единица $E_{n,1}$ порождают $M_n(\mathbb{F})$.

Теперь рассмотрим с другой стороны каккая может быть наибольшая мощность неуменьшаемой системы порождающих. Покажем, что при $n = 2$ есть такие системы из 3-х матриц, а для $n \geqslant 3$ — из $2n - 2$.

Пример 9.6. Матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ порождают $M_2(\mathbb{F})$ (вместе с E имеем базис). Никакая пара из них не порождает, потому что любая пара с A сразу треугольная, а $BC = O$, поэтому триангулизуема.

Пример 9.7. Пусть $n \geqslant 3$. Система из $2n-2$ матричных единиц

$$E_{12}, E_{21}, E_{23}, E_{32}, \dots, E_{n-1,n}, E_{n,n-1}$$

является неуменьшаемой системой порождающих. Действительно, с одной стороны $E_{i,i} = E_{i,i+1}E_{i+1,i}, i < n, E_{n,n} = E_{n,n-1}E_{n-1,n}$, при $i < j$ $E_{i,j} = E_{i,i+1}E_{i+1,i+2} \cdots E_{j-1,j}$, аналогично при $i > j$ $E_{i,j} = E_{i,i-1}E_{i-1,i-2} \cdots E_{j+1,j}$.

Если убрать одну из матриц, то у остальных есть общий угол нулей, поэтому они лежат в собственной подалгебре.

Теорема 9.8. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $\mathcal{S}$ является неуменьшаемой системой порождающих для $M_2(\mathbb{F})$. Тогда $|\mathcal{S}| \leqslant 3$, более того, $|\mathcal{S}| = 3$ если и только если для некоторой невырожденной матрицы $P \in M_2(\mathbb{F})$ выполнено $P^{-1}\mathcal{S}P = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha E, B = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta E, C = \begin{pmatrix} d & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} + \gamma E \right\}$, где $a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$, причем $bd + ce = 0$.

Доказательство. Согласно предложению 9.3 неуменьшаемая система $\mathcal{S}$ не содержит скалярных матриц. Пусть $A, B \in \mathcal{S}$ и $AB = BA$. В $M_2(\mathbb{F})$ любая нескалярная матрица является циклической, т.е. A — циклическая, а тогда $B \in \mathbb{F}[A]$. В этом случае $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\mathcal{S} \setminus \{B\})$, противоречие с неуменьшаемостью.

Предположим, что $|\mathcal{S}| \geqslant 4$. Пусть $A, B, C \in \mathcal{S}$. Из неуменьшаемости получаем, что $\dim \mathcal{L}(\{A, B, C\}) < \dim M_2(\mathbb{F})$. По теореме 2.12 алгебра $\mathcal{L}(\{A, B, C\})$ является триангулизуемой, т.е. $\dim \mathcal{L}(\{A, B, C\}) \leqslant 3$. С другой стороны элементы неуменьшаемой системы порождающих линейно независимы, значит, A, B, C — базис $T_2(\mathbb{F})$. В этом случае $E \in \langle A, B, C \rangle$, и тогда $\mathcal{S}$ не является неуменьшаемой. Противоречие.

Рассмотрим случай $|\mathcal{S}| = 3$. Пусть в $\mathcal{S}$ есть недиагонализуемая матрица A. Тогда с точностью до подобия $A = \alpha E + E_{12}$. Поскольку $\mathcal{S}$ порождает $M_2(\mathbb{F})$, значит в $\mathcal{S}$ есть матрица B, которая не является верхнетреугольной, т.е. $b_{21} \neq 0$. В этом случае A, B является системой порождающих, которая строго содержится в $\mathcal{S}$. Таким образом, все три матрицы в неуменьшаемой системе $\mathcal{S}$ должны быть диагонализуемыми. Приведем матрицу $A \in \mathcal{S}$ к жордановой форме и запишем $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha E$ так, чтобы $a \neq 0$. Пусть $B \in \mathcal{S}$. Поскольку пара A, B не порождает $M_2(\mathbb{F})$, то по теореме 2.12 она является триангулизуемой. Значит можем считать, что $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta E$. Пусть $C \in \mathcal{S}$, представим $C = \begin{pmatrix} d & f \\ e & 0 \end{pmatrix} + \gamma E$. Имеем $e \neq 0$, иначе $\mathcal{S}$ порождает треугольную алгебру. Если $f \neq 0$, то $B \in \mathcal{L}(\{A, C\})$, противоречие с неуменьшаемостью.

Значит, $C = \begin{pmatrix} d & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} + \gamma E$. Если $bd + ce \neq 0$, то

$$\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} = (bd + ce)E_{11}$$

и $A = aE_{11} + \alpha E \in \mathcal{L}(\{B, C\})$, противоречие с неуменьшаемостью. $\square$

Лемма 9.9. Пусть $n \geqslant 2$, $\mathbb{F}$ — поле, $\mathcal{S} \subset M_n(\mathbb{F})$ — триангулизуемое семейство. Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$.

Доказательство. Пусть $X_1, \ldots, X_n$— верхнетреугольные матрицы, $X_k = (x(k)_{ij})$. Тогда

$$(X_1 - x(1)_{11}E)(X_2 - x(2)_{22}E) \cdots (X_n - x(n)_{nn}E) = O.$$

Раскрывая скобки, получаем, что $X_1 \cdots X_n \in \mathcal{L}_{n-1}(\{X_1, \ldots, X_n\})$.

Эти условия сохраняются при сопряжении, поэтому $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$.

$\square$

Лемма 9.10. Пусть $n \geqslant 3$, $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $\mathcal{S}$ является неуменьшаемой системой порождающих для $M_n(\mathbb{F})$ мощности $|\mathcal{S}| \geqslant n + 2$. Тогда в $\mathcal{S}$ содержится собственное подмножество $\mathcal{S}'$ такое, что алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ не триангулизуема.

Доказательство. Доказательство от противного. Пусть такая неуменьшая система и для любого подмножества $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ порожденная им алгебра триангулизуема.

1. Покажем, что $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}) = M_n(\mathbb{F})$. Для любых матриц $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ имеем $|\{A_1, \ldots, A_n\}| \leqslant n < |\mathcal{S}|$, поэтому матрицы $A_1, \ldots, A_n$ одновременно триангулизуемы и $\mathcal{L}(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \mathcal{L}_{n-1}(\{A_1, \ldots, A_n\})$. Значит любое произведение n матриц из $\mathcal{S}$ выражается через элементы из $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, откуда $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\mathcal{S}) = M_n(\mathbb{F})$.

2. Пусть $k \leqslant n - 1$, $A_1, \ldots, A_k, B, C \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S}' = \{A_1, \ldots, A_k, B, C\}$. Имеем $|\mathcal{S}'| \leqslant n+1 < |\mathcal{S}|$, поэтому алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ — триангулизуема. Тогда $A_1 \cdots A_k[B, C]$ — нильпотентна по теореме 3.12. В силу произвольности выбора k и матриц $A_j \in \mathcal{S}$ получаем, что для любого слова $S \in \mathcal{S}^{n-1}$ матрица $S[B, C]$ — нильпотентна. Согласно пункту 1 $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}) = M_n(\mathbb{F})$. Значит алгебра $M_n(\mathbb{F})[B, C]$ имеет базис из нильпотентных элементов. Если $[B, C]$ — матрица ранга $r > 0$, то с точностью до подобия $M_n(\mathbb{F})[B, C]$ — пространство матриц, состоящее из всех матриц, у которых ненулевые только некоторые выделенные r столбцов. Мы получили, что у этого пространства есть базис из нильпотентных матриц, в частности, он состоит из матриц с нулевым следом. По линейности следа, у всех матриц из этого пространства нулевой след, противоречие, т.к. в таком пространстве содержится диагональная матчная единица. Таким образом, $[B, C] = O$. В силу произвольности выбора B, C, мы получили, что $\mathcal{S}$ — коммутативное семейство, но тогда оно не порождает $M_n(\mathbb{F})$. $\square$

Теорема 9.11. Пусть $n \geqslant 3$, $k < n$, $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Положим $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} M_k(\mathbb{F}) & O \\ O & O \end{pmatrix} \subset M_n(\mathbb{F})$. Пусть также матрицы $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$ в блочном виде $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$, $X_{11}, Y_{11} \in M_k)(\mathbb{F})$ довлетворяют условию $X_{12}Y_{21} \neq O$. Тогда алгебра $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\{\mathcal{A} \cup \{X, Y\}\})$ содержит подалгебру подобную $\begin{pmatrix} M_{k+1}(\mathbb{F}) & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{diag}(E_k, O) \in \mathcal{A}$, поэтому $\begin{pmatrix} O & X_{12} \\ O & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & O \\ Y_{21} & O \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$. По условию найдутся индексы i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, что $(X_{12}Y_{21})_{ij} \neq 0$. По условию E_{1i}, $E_{j1} \in \mathcal{A}$, тогда $\begin{pmatrix} O & E_{1i}X_{12} \\ O & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & O \\ Y_{21}E_{j1} & O \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$. Это позволяет без ограничения общности предполагать, что $i = j = 1$ и $X_{12} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{n-k} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $Y_{21} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n-k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, причем $x_1y_1 + \dots x_{n-k}y_{n-k} = \alpha \neq 0$.

Покажем, что существует обратимая $V \in M_{n-k}(\mathbb{F})$, такая что $(x_1, \dots, x_{n-k})V = (\alpha, 0, \dots, 0)$ и $V^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Второе уравнение определяет первый столбец матрицы V. Возьмем подпространство $U \subset \mathbb{F}^{n-k}$ решений уравнения $(x_1, \dots, x_{n-k})u = 0$. Оно имеет размерность $n-k-1$ и $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-k} \end{pmatrix} \notin U$. Тогда оставшиеся столбцы матрицы V можно заполнить базисом U, получится невырожденная матрица. Сопрягаем $\mathcal{B}$ матрицей $\operatorname{diag}(E, V)$. Это сопряжение тождественно на $\mathcal{A}$, а матрицы X и Y перейдут в матричные единицы $E_{1,k+1}$ и $E_{k+1,1}$. Но тогда в этой алгебре содержатся все матрицы $\begin{pmatrix} M_{k+1}(\mathbb{F}) & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

$\square$

Задачи к лекции 9.

Во всех задачах поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Задача 1. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$ — произвольная нескалярная матрица. Верно ли, что её можно дополнить до неуменьшаемой системы порождающих алгебры $M_n(\mathbb{F})$?

Задача 2. Покажите, что пара комплексных матриц $D = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, где ε — первообразный корень степени n из единицы, $C = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{n-1,n} + E_{n,1}$ порождает $M_n(\mathbb{C})$.

Задача 3. Будет ли верно утверждение предыдущей задачи, если $\varepsilon \neq 1$ — произвольный корень степени n из едииницы?

Задача 4. Приведите пример неуменьшаемой системы порождающих, состоящей из 3-х матриц, для алгебры $M_n(\mathbb{F})$ при любом $n \geqslant 3$.

9.1 Лекции 10–11.

Теорема 9.12. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $\mathcal{S}$ является неуменьшаемой системой порождающих для $M_3(\mathbb{F})$. Тогда $|\mathcal{S}| \leqslant 4$.

Доказательство. От противного, пусть $|\mathcal{S}| \geqslant 5$.

В этом случае по лемме 9.10 найдется подмножество $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, что алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S}')$ не триангулизуема. По теореме 2.12 в блочном виде $\mathcal{A}$ есть диагональный блок $M_2(\mathbb{F})$. Без ограничения общности, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} M_2(\mathbb{F}) & U_{12} \\ O & \mathbb{F} \end{pmatrix}$.

Из того, что $\mathcal{A}$ — подалгебра, следует, что либо $U_{12} = \{0\}$, либо $U_{12} = \mathbb{F}^2$. Также по теореме для $n = 2$ можно считать, что $|\mathcal{S}'| \leqslant 3$. Поскольку $\mathcal{S} \nsubseteq \mathcal{A}$, то в $\mathcal{S}$ есть матрица Y с $Y_{21} \neq 0$.

Пусть $U_{12} = \mathbb{F}^2$. Тогда в $\mathcal{S}'$ есть матрица X с $X_{12} \neq 0$. Поскольку для ненулевых матриц X_{12}, Y_{21} размеров 1 на 2 выполнено условие $X_{12}Y_{21} \neq O$, то по теореме 9 $\mathcal{S}' \cup \{Y\} \subset \mathcal{S}$ порождает $M_3(\mathbb{F})$, противоречие.

Таким образом, далее считаем, что $U_{12} = \{0\}$. Поскольку $\mathcal{S}$ порождает $M_3(\mathbb{F})$, то в $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ есть матрица X с $X_{12} \neq 0$ и Y с $Y_{21} \neq 0$. Допустим, что для одной матрицы $X \in \mathcal{S}$ одновременно выполнено $X_{12} \neq 0$ и $X_{21} \neq 0$. Алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{S}'))$ содержит $\operatorname{diag}(E_2, 0)$, откуда $\begin{pmatrix} O & X_{12} \\ O & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & O \\ X_{21} & O \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}' \cup \{X\})$. Тогда по теореме 9 $\mathcal{S}' \cup \{X\} \subset \mathcal{S}$ порождает $M_3(\mathbb{F})$, противоречие.

Также по теореме 9 $\mathcal{S}' \cup \{X, Y\}$ порождает $M_3(\mathbb{F})$, поэтому если $|\mathcal{S}'| = 2$, то $\mathcal{S}' \cup \{X, Y\} \subset \mathcal{S}$, тоже противоречие.

Значит, $|\mathcal{S}'| = 3$, и это множество является неуменьшаемой системой порождающих для $M_2(\mathbb{F}) \oplus 0$, $\mathcal{S}' = \{\operatorname{diag} A_1, 0, \operatorname{diag} A_2, 0, \operatorname{diag} A_3, 0\}$. Также для всех $X \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ либо $X_{12} = 0$, либо $X_{21} = 0$. Для X с $X_{12} \neq 0$ и Y с $Y_{21} \neq 0$ имеем $X_{21} = 0, Y_{12} = 0$. По предложению 9.3 можем считать, что $X_{22} = Y_{22} = 0$. Матрица $X_{12}Y_{21}$ имеет ранг 1, значит нескалярная, тогда по теореме о замене $\{A_1, A_2, X_{12}Y_{21}\}$ является неуменьшаемой системой порождающих для $M_2(\mathbb{F})$.

Если $X_{11} = O$, то $XY = \mathrm{diag}\,(X_{12}Y_{21}, 0)$ и $\mathcal{L}(\{\mathrm{diag}\,A_1, 0, \mathrm{diag}\,A_2, 0, X, Y\}) = M_3(\mathbb{F})$. Противоречие. Аналогично, для $Y_{11} = O$. Если $X_{11} = \beta Y_{11}$, то $\mathrm{diag}\,(X_{12}Y_{21}, 0) = -\beta^{-1}(X - \beta Y)^2$ и опять $\mathcal{L}(\{\mathrm{diag}\,A_1, 0, \mathrm{diag}\,A_2, 0, X, Y\}) = M_3(\mathbb{F})$.

Значит, остался случай, когда X_{11} и Y_{11} линейно независимы. Тогда $\dim\langle X_{11}, Y_{11}\rangle = 2$, $\dim\langle A_1, A_2, E\rangle = 3$ и эти два подпространства 4-х мерного пространства $M_2(\mathbb{F})$ имеют ненулевое пересечение. Тогда снова $\mathrm{diag}\,(X_{12}Y_{21}, 0) \in \mathcal{L}(\{\mathrm{diag}\,A_1, 0, \mathrm{diag}\,A_2, 0, X, Y, E\})$ и с использованием предложения 9.3 снова приходим к противоречию.

□

Определение 9.13. Далее мы покажем, как уменьшить размер исследуемых матриц (убрать то, что мы ранее называли связанными блоками).

Тензорным (Кронекеровским) произведением матриц $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ *и* $B \in M_{k,l}(\mathbb{F})$ называется матрица

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in M_{mk,nl}(\mathbb{F}).$$

Для $n = km$ через $(M_m(\mathbb{F}))_k$ обозначим вложение $M_m(\mathbb{F})$ в $M_n(\mathbb{F})$, переводящее $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{F})$ в блочную матрицу $(A)_k = (a_{ij}E_k) \in M_n(\mathbb{F})$. Пусть подалгебра $A \subseteq M_n(\mathbb{F})$ в блочном виде из теоремы 2.12 имеет только диагональные блоки. В этой ситуации мы можем перегруппировать элементы таким образом, что после сопряжения $\mathcal{A} = (M_{n_1}(\mathbb{F}))_{k_1} \oplus \ldots \oplus (M_{n_s}(\mathbb{F}))_{k_s}$. Матрицу $X \in \mathcal{A}$ рассмотрим в блочном виде, $X = (X_{ij})$, X_{ij} является матрицей размера $n_ik_i \times n_jk_j$. Каждый блок $Y = X_{ij}$ тоже имеет блочное представление $Y = (Y_{uv})$, $u = 1, \ldots, k_i, v = 1, \ldots, k_j$, Y_{uv} — матрица размера $n_i \times n_j$. Пусть $\mathcal{Y} = \langle Y_{uv}\rangle$. Если $\mathcal{Y} \neq 0$, возьмем в нем базис $B_1, \ldots, B_q$. Тогда $Y = M_1 \otimes B_1 + \ldots M_q \otimes B_q$, M_l — $k_i \times k_j$ матрицы.

Далее рассмотрим $\tilde{Y} = \{M_1 \otimes T_1 + \ldots M_q \otimes T_q | T_l \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{F})\}$, $\hat{Y} = \{M_1, \ldots, M_q\}$. Если $\mathcal{Y} = 0$, то считаем, что $\hat{Y} = 0$. Возвращаясь к матрице $X \in \mathcal{A}$, мы таким образом определили $\widetilde{X_{ij}}$ и $\widehat{X_{ij}}$ для каждой пары (i, j).

Через $\tilde{X}$ и $\hat{X}$ обозначим множество всех матриц вида (K_{ij}), где $K_{ij} \in \widetilde{X_{ij}}$, или $K_{ij} \in \widehat{X_{ij}}$ соответственно.

Лемма 9.14. Для любой системы порождающих $\mathcal{S}$ для $M_2(\mathbb{F})$ верно, что $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = M_2(\mathbb{F})$.

Доказательство. Действительно, по теореме Гамильтона–Кэли $\dim\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 3$. Тогда либо $\dim\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 4$ и $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = M_2(\mathbb{F})$, либо $\dim\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3 < \dim\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = 4$ и $\mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = M_2(\mathbb{F})$. □

Теорема 9.15. Пусть $n \geqslant 4$ и $\mathcal{S}$— неуменьшаемая система порождающих для $M_n(\mathbb{F})$. Пусть $|\mathcal{S}| \geqslant n+4$. Тогда если любая пара матриц из $\mathcal{S}$ триангулизуема, и для любого собственного подмножества $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ в блочной форме из теоремы 2.12 не содержит диагонального блока размера $k \geqslant 3$, то $\mathcal{S}$ содержит тройку матриц A, B, C, что $\mathcal{L}(\{A, B, C\})$ содержит подалгебру $\mathcal{A}$ подобную $(M_2(\mathbb{F}))_{m_1} \oplus \ldots \oplus (M_2(\mathbb{F}))_{m_t}$, $n = 2(m_1 + \ldots + m_t)$.

Доказательство. Поскольку для любого собственного подмножества $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ в блочной форме из теоремы 2.12 не содержит диагонального блока размера $k \geqslant 3$, значит на диагонали есть только блоки размеров 2 и 1.

Пусть $|\mathcal{S}'| \leqslant n$ и в алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{S}')$ в блочной форме из теоремы 2.12 на диагонали есть m блоков размера 2, остальные $k = n - 2m$— размера 1. Покажем, что $\mathcal{B} = \mathcal{L}_{n+m-1}(\mathcal{S}')$. Рассмотрим произведение $X_1 \ldots X_{n+m} \in (\mathcal{S}')^{n+m}$. Пусть сейчас без ограничения общности у матриц первые m диагональных блоков имеют размер 2. $n = 2m + k$, $n + m = 3m + k$. Тогда для каждого $i = 0, \ldots, m - 1$ по лемме 9.14 $i + 1$-ый диагональный блок произведения $X_{i+1}X_{i+2}X_{i+3}$ выражается через слова длины не большей 2 от блоков этих матриц, а значит есть $V_i \in \mathcal{L}_2(\{X_{i+1}, X_{i+2}, X_{i+3}\})$, что $i + 1$-ый диагональный блок $(X_{i+1}X_{i+2}X_{i+3} - V_i) = O$. Тогда

$$(X_1X_2X_3 - V_0) \cdots (X_{3m-2}X_{3m-1}X_{3m} - V_{m-1})(X_{3m+1} - (X_{3m+1})_{2m+1,2m+1}E) \cdots (X_{n+m})_{n,n}E) = O.$$

Раскрывая скобки, получаем требуемое утверждение.

Если любая пара матриц триангулизуема, то можно показать, что достаточно брать не тройки, а пары, поэтому $\mathcal{B} = \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}')$. Мы получаем для любого подмножества, что слова длины $n - 1$ все порождают, поэтому $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}) = M_n(\mathbb{F})$.

В $\mathcal{S}'$ есть нетриангулизуемая тройка матриц A, B, C (например, должны быть матрицы, проекции которых на первый блок $M_2(\mathbb{F})$ его порождают). Пусть $s \leqslant n - 1$, $\mathcal{S}' = \{Y_1, \ldots, Y_s, Z, A, B, C\}$. В алгебре $\mathcal{L}(A, B, C)$ есть пара матриц U, V, что $[U, V]$ не нильпотентна. Для матриц из $M_2(\mathbb{F})$ если коммутатор — ненильпотентная матрица с нулевым следом, то это обратимая диагонализуемая матрица с противоположными собственными числами. Значит, $[U, V]^2$ — скалярная в проекции на любой блок размера 2. Тогда $[[U, V]^2, Z]Y_1 \cdots Y_s$ — нильпотентная матрица для всех $Y_i \in \mathcal{S}$. Из условия $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}) = M_n(\mathbb{F})$ получаем, что $[[U, V]^2, Z]M_n(\mathbb{F})$ содержит базис из матриц со следом 0. Откуда как и в доказательстве леммы 9.10 получим $[[U, V]^2, Z] = 0$ для любой матрицы $Z \in \mathcal{S}$. Следовательно, $[U, V]^2 \in Z(M_n(\mathbb{F})$, как известно если матрица коммутирует со всеми матрицами, то она скалярная. Но с одной стороны $[U, V]^2$ ненулевая (поскольку ненильпотентная) скалярная матрица, а с другой стороны в проекции на блоки размера 1 она нулевая. Из полученного противоречия следует, что блоки размера 1 отсутствуют. □

Теорема 9.16. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $n = n_1k_1 + \ldots n_sk_s$. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A} = (M_{n_1}(\mathbb{F}))_{k_1} \oplus \ldots \oplus (M_{n_s}(\mathbb{F}))_{k_s} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ и конечное подмножество $\mathcal{S} \subset M_n(\mathbb{F})$. Тогда в вышеозначенных обозначениях, $\mathcal{S} \cup \mathcal{A}$ порождает $M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $\hat{\mathcal{S}} \cup \hat{\mathcal{A}}$ порождает $M_g(\mathbb{F})$, $g = k_1 + \ldots + k_s$.

Доказательство. Для блочной матрицы $X = (X_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ обозначим за X_{ij}^E такую матрицу, что все ее блоки, кроме (i,j)-го равны нулю, а оставшийся блок совпадает с X_{ij}. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{S} \cup \mathcal{A})$.

1. Если $S \in \mathcal{S}$, то $S_{ij}^E \in \mathcal{B}$. Следует из условия, что $E_{ii}^E, E_{jj}^E \in \mathcal{A}$.

2. Если $S \in \mathcal{S}$, то $(M_{n_i}(\mathbb{F}) S_{ij} M_{n_i}(\mathbb{F}))_{ij}^E \in \mathcal{B}$, где $A \in M_{n_i}(\mathbb{F})$ действует на S_{ij} как $A \oplus \ldots \oplus A$ (k_i-раз). Следует из условия, что $((M_{n_i}(\mathbb{F}))_{k_i})_{ii}^E, ((M_{n_j}(\mathbb{F}))_{k_j})_{jj}^E \in \mathcal{A}$.

3. Если $S \in \mathcal{S}$, то $\tilde{S} \subset \mathcal{B}$.

Достаточно показать, что $(S_{ij})_{ij}^E \in \mathcal{B}$. Для линейно независимых матриц $B_1, \ldots, B_q$ и произвольных матриц $T_1, \ldots, T_q \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{F})$ найдутся такие $D_p \in M_{n_i}(\mathbb{F}), H_p \in M_{n_j}(\mathbb{F})$, что $\sum\limits_p D_p^T B_\nu H_p) = T_\nu$ (теорема плотности). Тогда результат получается из пункта 2.

4. Положим $\mathcal{L}_{ij} = \langle S_{ij} | S \in \mathcal{S} \cup \mathcal{A} \rangle$. Если $A = (A_{ij}) \in \mathcal{B}$, то $A_{ij} \in \mathcal{T}_{ij}$, где

$$\mathcal{T}_{ij} = \langle L_{i_1 i_2} L_{i_2 i_3} \cdots L_{i_l i_{l+1}} | \qquad l \geqslant 1,\ L_{xy} \in \mathcal{L}_{xy}, i_1 = i, i_{l+1} = j \rangle$$

Обратное тоже верно, если $A \in M_n(\mathbb{F})$ и все A_{ij} имеют указанный вид, то $A \in \mathcal{B}$.

Заметим, что $\mathcal{B}$ порождается $\mathcal{A}$ и всеми матрицами $S_{ij}^E, S \in \mathcal{S}$. Значит, порождается матрицами $((M_{n_i}(\mathbb{F}))_{k_i})_{ii}^E$ и $S_{ij}^E, S \in \mathcal{S}$. По построению $S_{ij}^E, S \in \mathcal{S}$ и $(\mathcal{A})_{ij}^E$ содержатся в $\mathcal{T}_{ij}$. Остается проверить, что $\mathcal{T}_{ij}$ является алгеброй. Это верно, поскольку по построению берутся произведения всех возможных длин. Обратно, все элементы $(\mathcal{T}_{ij})_{ij}^E \in \mathcal{B}$ согласно пунктам 2–3.

В частности, получаем, что 5. $\mathcal{B} = M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $(\mathcal{T}_{ij})_{ij} = M_{n_i k_i, n_j k_j}(\mathbb{F})$ для всех i, j.

Заметим, что $\widehat{\mathcal{A}}$ состоит из диагональных матриц $E_{ii}^E, i = 1, \ldots, s$. Также заметим, что для $S \in \mathcal{S}$ $\tilde{S_{ij}} = \{M_1 \otimes T_1 + \ldots M_q \otimes T_q | T_l \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{F})\}$. Тогда произведение общего вида

$$L_{i_1 i_2} L_{i_2 i_3} \cdots L_{i_l i_{l+1}}$$

выражается в виде линейной комбинации произведений вида

$$(M_{u_1}^{(1)} \otimes T^{(1)}) \cdots (M_{u_l}^{(l)} \otimes T^{(l)}),$$

$T^{(p)} \in M_{i_p, i_{p+1}}(\mathbb{F})$, которые после преобразования принимают вид

$$P = M_{u_1}^{(1)} \cdots M_{u_l}^{(l)} \otimes T^{(1)} \cdots T^{(l)}.$$

Для фиксированной последовательности индексов $i + i_1, i_2, \ldots, i_{l+1} = j$ матрицы T перебираются все возможные, поэтому для фиксированных матриц $M_{u_1}^{(1)}, \ldots, M_{u_l}^{(l)}$ произведения $T^{(1)} \cdots T^{(l)}$ из произведения P порождают все пространство $M_{n_i,n_j}(\mathbb{F})$. Значит,

$$\dim \mathcal{T}_{ij} = n_i n_j \dim \mathcal{M}_{ij},$$

где

$$\mathcal{M}_{ij}\langle M_{h_1}^{(1)}\cdots M_{h_l}^{(l)}\rangle,$$

произведения берутся по всем последовательностям индеков $i+i_1, i_2, \ldots, i_{l+1}=j$, а матрица $M_{h_\nu}^{(\nu)}$ — это одна из матриц из $\tilde{S}_{i_{nu}, i_{nu+1}}$ для какой-то $S\in\mathcal{S}$. Отсюда получаем, что

6. $(\mathcal{T}_{ij})_{ij}=M_{n_ik_i,n_jk_j}(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}_{ij}=M_{k_i,k_j}(\mathbb{F})$.

7. $\mathcal{M}_{ij}=M_{k_i,k_j}(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $\hat{\mathcal{S}}\cup\hat{\mathcal{A}}$ порождает $M_g(\mathbb{F})$, $g=k_1+\ldots+k_s$. Получается применением пунктов 1–6 к $\hat{\mathcal{S}}$ и $\hat{\mathcal{A}}$. □

Теорема 9.17. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $\mathcal{S}$ является неуменьшаемой системой порождающих для $M_n(\mathbb{F})$. Тогда $|\mathcal{S}|\leqslant 2n-2$.

Доказательство. От противного, допустим что для некоторых n утверждение не выполнено. Тогда среди таких значений, для которых можно было бы построить контрпример, есть минимальное, обозначим его n_{min}. Предпологаем, что есть неуменьшаемая система порождающих $\mathcal{S}\subset M_{n_{min}}(\mathbb{F})$, $|\mathcal{S}|>2n_{min}-2$.

Предположим, что у $\mathcal{S}$ есть такое собственное подмножество $\mathcal{S}'$, что у алгебры $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ в блочном представлении из теоремы 2.12 есть диагональный блок порядка $k\geqslant 3$. Поскольку $k<n_{nim}$, то для алгебры $M_k(\mathbb{F})$ утверждение теоремы справедливо: в $\mathcal{S}'$ можно взять не более $2k-2$ матриц, блоки которых порождают данный диагональный блок, обозначим это подмножество $\mathcal{T}$. Рассмотрим блочно-диагональную подалгебру $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{L}((T))$. Применим теорему 9.16 к $\mathcal{S}$ и $\mathcal{A}$, получаем, что $\hat{\mathcal{S}}\cup\hat{\mathcal{A}}$ порождает $M_g(\mathbb{F})$. Если $g>2$, то применим основную теорему к $M_g(\mathbb{F})$: существует неуменьшаемое подмножество $\mathcal{X}\subset\hat{\mathcal{S}}\cup\hat{\mathcal{A}}$, $|\mathcal{X}|\leqslant 2g-2$, порождающее $M_g(\mathbb{F})$. Для каждого $X\in\mathcal{X}$ берем какую-нибудь из матриц $S=S(X)\in\mathcal{S}$, что $\hat{S}$ содержит X. Полагаем $\mathcal{S}_0=\{S(X)|X\in\mathcal{X}\}$. Имеем $|\mathcal{S}_0\leqslant|\mathcal{X}|\leqslant 2g-2$. Также $\hat{\mathcal{S}}_0\cup\widehat{\mathcal{A}}$ порождает $M_g(\mathbb{F})$, поэтому по теореме 9.16 $\mathcal{S}_0\cup\mathcal{A}$ порождает $M_n(\mathbb{F})$. Значит, $\mathcal{S}_0\cup(T)$ порождает $M_n(\mathbb{F})$. Но тогда $\mathcal{S}=\mathcal{S}_0\cup(T)$. В этом случае,

$$|\mathcal{S}|\leqslant|\mathcal{S}_0|+|\mathcal{T}|\leqslant 2g-2+2k-2\leqslant 2(n_{min}-k+1)-2+2k-2=2n_{min}-2.$$

Противоречие.

Остается возможность $g=2$. Тогда $k=n_{min}-1$. $\mathcal{L}(\mathcal{T})=\begin{pmatrix}M_{n_{min}-1}(\mathbb{F}) & U_{12}\\ O & \mathbb{F}\end{pmatrix}$. Здесь применяем рассуждения как с $n=3$, получаем, что найдутся такие $X,Y\in\mathcal{S}$, что $M_{n_{min}}(\mathbb{F})=\mathcal{L}(\mathcal{T}\cup\{X,Y\})$. Тогда $\mathcal{S}=\mathcal{T}\cup\{X,Y\}$ и

$$|\mathcal{S}|\leqslant 2(n_{min}-1)-2+2=2n_{min}-2.$$

Противоречие.

Если $|\mathcal{S}|\geqslant n+4$, то $\mathcal{S}$ содержит тройку матриц A,B,C, что $\mathcal{L}(\{A,B,C\})$ содержит подалгебру $\mathcal{A}=(M_2(\mathbb{F}))_{m_1}\oplus\ldots\oplus(M_2(\mathbb{F}))_{m_t}$, $n_{min}=2(m_1+\ldots+m_t)$. Повторяя редукцию с $\mathcal{A}$ снова приходим к противоречию.

Остается случай $|\mathcal{S}| \leqslant n_{min}+3$, т.е. только $n_{min}=4$. Собирая предыдущие утверждения, получаем, что для возможного контрпримера
а) $\mathcal{S}$ не содержит собственного подмножества $\mathcal{S}'$ для которого в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ есть подалгебра $M_3(\mathbb{F})$;
б) $\mathcal{S}$ не содержит собственного подмножества $\mathcal{S}'$ для которого $|\mathcal{S}'| \leqslant 3$ и в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ есть подалгебра подобная $(M_2(\mathbb{F}))_2$ или $M_2(\mathbb{F}) \oplus M_2(\mathbb{F})$;
в) алгебра $\mathcal{L}(\{A, B\})$ триангулизуема для любых $A, B \in \mathcal{S}$;
г) $\mathcal{S}$ содержит собственное подмножество $\mathcal{S}'$ для которого $|\mathcal{S}'| = 3$ и в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ есть подалгебра $M_2(\mathbb{F})$. Получаем, что после выполнения преобразования подобия из теоремы 2.12 $\mathcal{L}(\mathcal{S}') = \begin{pmatrix} M_2(\mathbb{F}) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Возьмем в этой алгебре блочно диагональную подалгебру $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} M_2(\mathbb{F}) & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$, по условию (б) блок * может содержать два связанных или независимых блока размера 1. Тогда каждую матрицу $X \in M_4(\mathbb{F})$ представим в блочном виде $X = (X_{ij})$, $X_{ij} \in M_2(\mathbb{F})$.

Обозначим $\mathcal{X}_{22} = \mathcal{L}(\{S_{22} | S \in \mathcal{S}\})$. Предположим, что никакая пара A_{22}, B_{22} не порождает $\mathcal{X}_{22}$. Из этого условия сравнивая размерности получаем $\mathcal{X}_{22} = M_2(\mathbb{F})$. В такой ситуации найдется тройка матриц $P, Q, R \in \mathcal{S}$, что $\langle E_2, P_{22}, Q_{22}, R_{22} \rangle = M_2(\mathbb{F})$. Поскольку $\mathcal{S}$ является системой порождающих, то найдутся такие матрицы $X, Y \in \mathcal{S}$, что $X_{12} M_2(\mathbb{F}) Y_{21} \neq 0$, поэтому можно взять $S \in \mathcal{S} \cup \{E\}$, для которой $X_{12} S_{22} Y_{21} \neq 0$. Возьмем $\mathcal{T} = \mathcal{S}' \cup \{X, Y, S\}$. Тогда $|\mathcal{T}| \leqslant 6 < |\mathcal{S}|$. С другой стороны, $\mathcal{L}(\mathcal{T})$ содержит $\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{F}) & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} O & X_{12} S_{22} \\ Y_{21} & O \end{pmatrix}$, значит, по теореме 9 она содержит подалгебру $M_3(\mathbb{F})$, противоречие с условием (а). Если $\mathcal{X}_{22} \neq M_2(\mathbb{F})$, то она триангулизуема, и поэтому порождается как векторное пространство множеством $\{S_{22} | S \in \mathcal{S} \cup \{E\}\}$. В этом случае также работает предыдущее рассуждение. У нас остается только случай
д) $\mathcal{X}_{22} = M_2(\mathbb{F})$ и найдется пара матриц $P, Q \in \mathcal{S}$, что P_{22}, Q_{22} порождают $M_2(\mathbb{F})$.

Возьмем $\mathcal{T} = \mathcal{S}' \cup \{P, Q\}$. Имеем $|\mathcal{T}| \leqslant 5$, поэтому оно не порождеает $M_4(\mathbb{F})$, с другой стороны $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{T})$ содержит $\mathcal{L}(\mathcal{S}')$ и $\begin{pmatrix} O & O \\ O & \mathcal{X}_{22} \end{pmatrix}$, а значит имеет вид $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} M_2(\mathbb{F}) & * \\ 0 & M_2(\mathbb{F}) \end{pmatrix}$. Сперва допустим, что $\mathcal{A}$ — блочно-диагональная. По условию (б) $|\mathcal{T}| \geqslant 4$. При этом $\mathcal{X}_{22}$ является гомоморфным образом $\mathcal{A}$, с условием (в) получаем противоречие с ее двупорожденностью (условием (д)).

Далее можем считать, что $\mathcal{A}$ содержит матрицу $B = \begin{pmatrix} O & O \\ B_{21} & O \end{pmatrix}$, $B_{21} \neq O$. В $\mathcal{S}$ есть матрица S, у которой $S_{12} \neq O$. Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{T} \cup \{S\})$ содержит подалгебру

$$\begin{pmatrix} M_2(\mathbb{F}) & M_2(\mathbb{F}) S_{12} M_2(\mathbb{F}) \\ M_2(\mathbb{F}) B_{21} M_2(\mathbb{F}) & M_2(\mathbb{F}) \end{pmatrix} = M_4(\mathbb{F}).$$

При этом $|\mathcal{T} \cup \{S\}| \leqslant 6$. Противоречие.

$\square$

Задачи к лекции 11.
Во всех задачах поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Задача 1. Докажите следующую теорему о замене для $M_2(\mathbb{F})$: Пусть $\mathcal{S}$ является неуменьшаемой системой порождающих для $M_2(\mathbb{F})$ мощности 3, $A \in M_2(\mathbb{F})$ — произвольная нескалярная матрица. Тогда в $\mathcal{S}$ найдется такая матрица B, что при замене B на A тоже получится система порождающих. В каком случае она будет неуменьшаемой?

Задача 2. В алгебре $M_4(\mathbb{F})$ постройте примеры неумньшаемой системы порождающих мощности k для каждого $2 \leqslant k \leqslant 6$.

Задача 3. В алгебре $M_n(\mathbb{F})$ постройте пример неумньшаемой системы порождающих, удовлетворяющей теореме 9.15. Для своего примера укажите матрицы A, B, C из утверждения этой теоремы.

Задача 4. Пусть пара матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ порождает $M_n(\mathbb{F})$, причем B имеет ранг 1. Докажите, что A — циклическая.

Задача 5. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$ — циклическая матрица. Докажите, что существует $B \in M_n(\mathbb{F})$, такая что пара A, B порождает $M_n(\mathbb{F})$.

Задача 6. Обоснуйте шаг 3 в доказательстве теоремы 9.16: почему для линейно независимых матриц $B_1, \ldots, B_q \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{F})$ и произвольных матриц $T_1, \ldots, T_q \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{F})$ найдутся такие $D_p \in M_{n_i}(\mathbb{F}), H_p \in M_{n_j}(\mathbb{F})$, что $\sum\limits_p D_p^T B_\nu H_p = T_\nu$

10 Системы порождающих, состоящие из матриц с квадратичными минимальными многочленами, в том числе идемпотентов.

Теорема 10.1. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ — матрицы с квадратичными минимальными многочленами, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{A, B\})$. Тогда

$$\dim \mathcal{A} \leqslant \begin{cases} 2n-1, & \text{если} n = 2k+1 \\ 2n, & \text{иначе.} \end{cases}.$$

Доказательство. Допустим, что $A^2 + aA + bE = O$.

Если $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, то можно выделить полный квадрат:

$$(A + \frac{1}{2}aE)^2 = (\frac{1}{4}a^2 - b)E,$$

и сделать замену A на $\frac{1}{d}(A + \frac{1}{2}aE)$, где

$$d^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}a^2 - b, & \text{если } \frac{1}{4}a^2 - b \neq 0 \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Проводим аналогичные преобразования с B. Следовательно, без ограгичения общности можно считать, что $A^2 = O$ или E и $B^2 = O$ или E.

Если $\operatorname{char} \mathbb{F} = 2$, то заметим следующее соотношения для произвольного $c \in \mathbb{F}$:

$$(A + cE)^2 = a(A + cE) + (c^2 + ac + b)E.$$

Возьмем $c \in \mathbb{F}$, являющееся собственным числом A: $c^2 + ac + b = 0$, и сделаем замену A на

$$\begin{cases} A + cE, & \text{если } a = 0 \\ \frac{1}{a}(A + cE), & \text{иначе.} \end{cases}.$$

Проводим аналогичные преобразования с B. Следовательно, без ограгичения общности можно считать, что $A^2 = O$ или A и $B^2 = O$ или B. В ситуации, когда в паре есть идемпотент, договоримся, что $A^2 = A$.

Рассмотрим $C = A - B$ и заметим, что $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\{A, C\})$ и выполнено соотношение

$$AC = C^2 - CA + A^2 - B^2. \tag{19}$$

Положим

$$\mathcal{B} = \{C^k, C^k A | k = 0, \dots, n-1\}.$$

Докажем, что $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B} \rangle$. Заметим, что $A^2 - B^2 = O, \pm E, A, C$. По теореме Гамильтона-Кэли $C\langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$. Из соотношения (19) следует, что $AC \in \langle \mathcal{B} \rangle$, и тогда продолжая по индукции $AC^m \in \langle \mathcal{B} \rangle$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, заключаем, что $\mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle$, т.е. $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B} \rangle$.

По построению в $\mathcal{B}$ содержится $2n$ элементов. Следовательно, $\dim \mathcal{A} \leqslant 2n$ и неравенство превратится в равенство, если и токо если $\mathcal{B}$ линейно независимо. Покажем, что для нечетного $n = 2k+1$ множество $\mathcal{B}$ линейно зависимо, что позволить улучшить оценку размерности до $\dim \mathcal{A} \leqslant |\mathcal{B}| - 1 = 2n - 1$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ — собственные числа A. Разложим минимальный многочлен A на линейные множители: $(A - \alpha_1 E)(A - \alpha_2 E) = O$. Из нечетности размера матриц получаем, что $\dim \ker(A - \alpha_i) \geqslant k+1$ хотябы для одного $i = 1, 2$. Без ограничения общности, $i = 1$. Аналогично имеем $\dim \ker(B - \beta_1) \geqslant k+1$ для $\beta_1 \in \mathbb{F}$. В этом случае, получаем, что $\ker(A - \alpha_1) \cap \ker(B - \beta_1) \neq 0$, т.е. у матриц A и B есть общий собственный вектор $v \neq 0$,

$$Av = \alpha_1 v, \;\; Bv = \beta_1 v.$$

Считая v первым базисным вектором, получем блочный вид матриц

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & O \\ \bar{a} & A_1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \beta_1 & O \\ \bar{a} & B_1 \end{pmatrix},$$

где $\bar{a} = (a_{21}, \ldots, a_{n1})^T, \bar{b} = (b_{21}, \ldots, b_{n1})^T$. Пусть $C_1 = A_1 - B_1$, $\mu_1(x)$ обозначает минимальный многочлен матрицы C_1. Из блочно-треугольного вида следует, что $\mu_1(C)(A - \alpha_1 E) = O$. Раскрывая скобки в этом выражении, получаем нетривиальное линейное соотношение между элементами $\mathcal{B}$. $\square$

Пример 10.2. Покажем, что представленные в теореме оценки достижимы. Для $n = 2$ все нескалярные матрицы имеют квадратные минимальные многочлены и можно взять систему из двух порождающих для $M_2(\mathbb{F})$, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $n = 2k, k \geqslant 2$. Возьмем многочлен $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ степени k, такой, что $p(0) \neq 0$ и $p(1) \neq 0$. Пусть $X \in M_k(\mathbb{F})$ — сопровождающая матрица многочлена $p(x)$. Положим

$$A = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} X & X \\ E - X & E - X \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}).$$

Непосредственно проверяется, что $B^2 = B$. По построению $A, B \in M_2(\mathbb{F}[X])$, и значит, $\mathcal{A} \subseteq M_2(\mathbb{F}[X])$. Заметим, что X — циклическая матрица, поэтому $\dim \mathbb{F}[X] = k$, $\dim_{\mathbb{F}} M_2(\mathbb{F}[X]) = 4 \dim \mathbb{F}[X] = 4k = 2n$.

Умножения с разных сторон на A и $E-A$ позволяют получить матрицы с отдельными блоками как у B. В частности, $\begin{pmatrix} X & O \\ O & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & O \\ O & X \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$. Отсюда следует, что на диагонали можно получить любой многочлен от X. Из условия $p(0), p(1) \neq 0$ следует, что X и $E-X$ обратимы, поэтому вне диагонали тоже можно получить все значения, т.е. $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{F}[X])$.

Пример 10.3. Пусть $n = 2k+1, k \geqslant 1$. Возьмем матрицы $A_1 = \operatorname{diag}(0, A), B_1 = \operatorname{diag}(1, B) \in M_n(\mathbb{F})$, где A, B — матрицы из предыдущего примера. Достаточно проверить, что $E_{11} \in \mathcal{A}$.

Для $k=1$ $B^2 = E$, поэтому $B_1^2 = E$. Заметим также, что $BAB = E_{22}$, Поэтому $B_1A_1B_1 = E_{33}$ и $E_{11} = E - A_1 - B_1A_1B_1 \in \mathcal{A}$.

Для $k > 1$ имеем $p(A_1B_1A_1) = p(0)E_{11}$.

Теорема 10.4. Алгебру матриц $M_2(\mathbb{F})$ можно породить 2 идемпотентами тогда и только тогда, когда $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$. Над $\mathbb{F}_2$ ее можно породить 3 идемпотентами.

Доказательство. 1. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$. Рассмотрим $A \in M_2(\mathbb{F}_2)$, $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, A^2 = A$, $A \neq O, E$. Тогда $\det A = 0$, $ad + bc = 0$, и над $\mathbb{F}_2$ это означает, что либо $ad = bc = 1$, либо $ad = bc = 0$. Если $ad = bc = 1$, то $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $A^2 = O \neq A$. Пусть дальше $ad = bc = 0$. Если $a = d = 0$, то $A^2 = O$. Значит, $a + d = 1$, $d = 1 - a$.

Пусть $B^2 = B$. Она удовлетворяет тем же условиям. Также чтобы породить матричную алгебру, A и B не могут быть одновременно верхне- или нижнетреугольными, поэтому можно считать, что $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & 1-b \end{pmatrix}$. В этом случае,

$$AB = (1-b)A + (1-a)B + (1-a)(1-b)E,$$

$$BA = bA + aB + abE.$$

Поэтому $\mathcal{L}(\{A, B\}) = \langle E, A, B \rangle$ и $\dim \mathcal{L}(\{A, B\}) \leqslant 3$.

Построим пример 3-х идемпотентных порождающих:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для них $\langle E, A, B, C \rangle = M_2(\mathbb{F})$.

2. Пусть $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$. Тогда в поле найдется элемент $\alpha \neq 0, -1$. Положим $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $AB = (\alpha+1)E_{11}$, и $\langle E, A, B, AB \rangle = M_2(\mathbb{F})$.

□

Теорема 10.5. При $n \geqslant 3$ алгебру матриц $M_n(\mathbb{F})$ можно породить 3 идемпотентами и это минимальное количество идемпотентных порождающих.

Доказательство. Заметим, что для множества $\mathcal{S}$ матриц из $M_n(\mathbb{F})$ размерность линейной оболочки $\langle \mathcal{S} \rangle$ не изменится, если рассмотреть матрицы над расширением $\mathbb{F}$. Поэтому при $n \geqslant 3$ 2 идемпотента могут порождать алгебру размерности не большей $2n$ по теореме 10.1.

Построим пример 3-х идемпотентных порождающих.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant 2k-1 \leqslant n} E_{2k-1,2k-1} + \sum_{2 \leqslant 2k \leqslant n} E_{2k-1,2k},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \sum_{2 \leqslant 2k \leqslant n} E_{2k,2k} + \sum_{3 \leqslant 2k+1 \leqslant n} E_{2k,2k+1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяем, что $A^2 = A, B^2 = B, C^2 = C$.

Рассмотрим A и B. Заметим, что $A + B = J_n(1)$ — циклическая матрица, $A + B - E = J_n(0)$ и отсюда получаем соотношения,

$$C(2E - A - B) = C(E - J_n(0)) = C - CJ_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E_{n1}.$$

Матрицы $J_n(0)$ и E_{n1} содержатся в алгебре $\mathcal{A}$, порожденной A, B, C, при этом эта пара порождает $M_n(\mathbb{F})$. Значит, $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$. □

Задачи к лекции 12.

Задача 1. Покажите, что в алгебре матриц $M_2(\mathbb{F}_2)$ существуют порождающие A, B такие, что а) $A^2 = A$, $B^2 = O$, б) $A^2 = B^2 = O$.

Задача 2. В алгебре диагональных матриц $D_n(\mathbb{F}_2)$ любая матрица является идемпотентом. Определите, какая у неё минимальная мощность системы порождающих.

Во задачах далее поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Задача 3. Покажите, что при $n = 3, 4$ алгебру верхнетреугольных матриц $T_n(\mathbb{F})$ а) можно породить тремя идемпотентами; б) это минимальное количество, т.е. двумя идемпотентами она не порождается.

Задача 4. Покажите, что в алгебре матриц $M_3(\mathbb{F})$ не существует системы порождающих из 3-х идемпотентов A, B, C таких, что любая линейная комбинация $\alpha A + \beta B + \gamma C$ имеет степень минимального многочлена не выше 2.

Задача 5. Покажите, что при $n \geqslant 3$ в алгебре матриц $M_n(\mathbb{F})$ существует пара порождающих A, B таких, что у A квадратичный минимальный многочлен, а у B — кубический.

11 Функция длины алгебры. Гипотеза Паза о длине матричной алгебры. Её доказательство для матриц малых порядков. Оценки длины систем порождающих матричной алгебры, содержащих матрицы заданного ранга.

Пусть $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_k\} \subset M_n(\mathbb{F})$ — конечное подмножество.

Определение 11.1. *Длина* слова $A_{i_1} \ldots A_{i_t}$, где $A_{i_j} \in \mathcal{S}$, равна t. Будем считать E (пустое слово) словом от элементов $\mathcal{S}$ *длины* 0.

Пусть $\mathcal{S}^i$ обозначает множество всех слов в алфавите $\mathcal{S}$ длины не большей i, $i \geqslant 0$.

Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle E \rangle$ для алгебр с единицей, иначе будем считать $\mathcal{L}_0(\S) = 0$. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\{A_1, \ldots, A_k\}$. $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$ — алгебра с единицей, порожденная множеством $\mathcal{S}$.

Из конечномерности $\mathcal{A}$ получаем, что найдется такой номер h, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$. Если для некоторого $h \geqslant 0$ выполнено $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$$

и также $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geqslant h$.

Обозначение 11.2. Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\deg a$ обозначает степень минимального многочлена элемента a над полем $\mathbb{F}$. Из конечномерности алгебры $\mathcal{A}$ следует, что для любого $a \in \mathcal{A}$ справедлива оценка $\deg a \leqslant \dim \mathcal{A}$.

Тогда положим

$$m(\mathcal{S}) = \max\{\deg w, w \in \mathcal{S}\},$$

$$m(\mathcal{A}) = \max_{\mathcal{S}} m(\mathcal{S}) = \max_{a \in \mathcal{A}}\{\deg a\}.$$

Определение 11.3. *Длиной множества* $\mathcal{S}$ называется число $l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\mathcal{S})\}$.

Пример 11.4. Если в качестве $\mathcal{S}$ взять базис, то получим длину 1 (произведения не потребуется).

Заметим, что $\dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) \leqslant \dim \mathcal{L}(\mathcal{S}) \leqslant n^2$, поэтому последовательность $\{\dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S})\}$, $i = 0, 1, \dots$ сначала строго возрастает, т.е. $\dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) < \dim \mathcal{L}_{i+1}(\mathcal{S})$, затем стабилизируется на шаге p.

Длину можно тривиально оценить сверху $l(\mathcal{S}) \leqslant \dim \mathcal{L}(\mathcal{S}) - 1 \leqslant n^2 - 1$.

Определение 11.5. *Длиной алгебры* $\mathcal{A}$ называется число $l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

В последнем определении перебираются ВСЕ системы порождающих данной алгебры. Этим определяется трудность вычисления длины алгебры.

Для длины алгебры получается тривиальная оценка $l(\mathcal{A}) \leqslant \dim \mathcal{A} - 1$.

Лемма 11.6. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей над $\mathbb{F}$. Тогда $l(\mathcal{A}) = \dim \mathcal{A} - 1$ тогда и только тогда, когда существует элемент $A \in \mathcal{A}$ степени $\deg A = \dim \mathcal{A}$, порождающий алгебру $\mathcal{A}$. Как следствие, алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна.

Доказательство. Достаточность: если алгебра $\mathcal{A}$ порождена одним элементом A степени $\deg A = \dim \mathcal{A}$, то возьмем в $\mathcal{A}$ систему порождающих $\mathcal{S} = \{A\}$. Получаем, что для любого $k \geqslant 0$ выполнено $\mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}}, A, A^2, \dots, A^k \rangle$ и следовательно, $l(\mathcal{A}) \geqslant l(\mathcal{S}) = \deg A - 1 = \dim \mathcal{A} - 1$.

Необходимость:

Положим $n = \dim \mathcal{A}$.

При $n = 1$ алгебра $\mathcal{A} = \mathbb{F}$, $l(\mathcal{A}) = l(\mathbb{F}) = 0$, и требуемым порождающим элементом является единица.

Рассмотрим случай $n \geqslant 2$. Пусть $l(\mathcal{A}) = n-1$. Рассмотрим систему порождающих $\mathcal{S}$ для $\mathcal{A}$ длины $l(\mathcal{S}) = l(\mathcal{A})$. Предположим, что $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 3$. Тогда

$$\dim \mathcal{L}_{n-2}(\mathcal{S}) = \dim \mathcal{L}_0(\mathcal{S}) + \sum_{k=1}^{n-2}(\dim \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) - \dim \mathcal{L}_{k-1}(\mathcal{S})) =$$
$$\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + \sum_{k=2}^{n-2}(\dim \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) - \dim \mathcal{L}_{k-1}(\mathcal{S})) \geqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + \sum_{k=2}^{n-2} 1 =$$
$$\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + n - 3 \geqslant n = \dim \mathcal{A}. \quad (20)$$

Откуда $\mathcal{L}_{n-2}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$ и $l(\mathcal{S}) \leqslant n-2$. Противоречие.

Если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 1$, то $\dim \mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S})$ и $l(\mathcal{S}) = 0 < n-1$.

Следовательно, $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 2$, т.е. существует элемент $A \in \mathcal{S}$ такой, что $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}}, A\rangle$. Тогда по определению длины

$$\dim \mathcal{A} = n = \dim \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}) = \dim \langle 1_{\mathcal{A}}, A, A^2, \dots, A^{n-1}\rangle.$$

Следовательно, $\deg A = \dim \mathcal{A}$ и алгебра $\mathcal{A}$ порождена элементом A.

□

Следствие 11.7. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$ размерности $\dim \mathcal{A} = n$. Тогда $l(\mathcal{A}) = n-1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей.

Следствие 11.8. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — некоммутативная алгебра с единицей над $\mathbb{F}$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant \dim \mathcal{A} - 2$.

Лемму 9.14 в терминах длины можно переформулировать так

Лемма 11.9. Для любой системы порождающих $\mathcal{S}$ для $M_2(\mathbb{F})$ верно, что $l(\mathcal{S}) \leqslant 2$ и $l(M_2(\mathbb{F})) = 2$.

Доказательство. Оценка достигается на системе порождающих, состоящей из матриц $E_{1,2}$ и $E_{2,1}$. □

Центральной задачей исследования длины стала проблема Паза 1984 г. вычисления длины полной матричной алгебры как функции порядка матриц ([1]).

Гипотеза 11.10. [Гипотеза Паза] $l(M_n(\mathbb{F})) = 2n-2$.

Известно, что она верна для $n \leqslant 6$.

[1] A. Paz, An Application of the Cayley–Hamilton thm to Matrix Polynomials in Several Variables. Linear Multilinear Algebra, **15**(1984), 161–170

Пример 11.11. Пара $A = J_n(0)$ (жорданова клетка) и $B = E_{n1}$ (матричная единица), порождает $M_n(\mathbb{F})$ и имеет длину $2n-2$.

Слова вида $A^{n-1}BA^{n-2}$ составляют базис $M_n(\mathbb{F})$.

Определение 11.12. Скажем, что слово $v \in \mathcal{S}^k$ длины k *сократимо*, если $v \in \mathcal{L}_{k-1}(\mathcal{S})$, т.е. выражается в виде линейной комбинации слов меньшей длины, иначе скажем, что v— *несократимо.*

Лемма 11.13. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда $l(M_3(\mathbb{F})) = 4$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = \{A_1, \dots, A_k\}$ — система порождающих алгебры $M_3(\mathbb{F})$. Можно считать, что все элементы $\mathcal{S}$ линейно независимы и $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = |\mathcal{S}|+1 = k+1$.

Если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \leqslant 2$, то $\mathcal{S} = \{A_1\}$ и по теореме Гамильтона–Кэли $\dim \mathcal{L}(\mathcal{S}) \leqslant 3 < 9 = \dim M_3(\mathbb{F})$, т.е. $\mathcal{S}$ не является системой порождающих. Значит, $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 3$.

Заметим, что если $\dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) < \dim M_3(\mathbb{F})$, то $\dim \mathcal{L}_{i+1}(\mathcal{S}) \geqslant \dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) + 1$. Следовательно, если $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \geqslant 6$ и $l(\mathcal{S}) \geqslant 4$, то $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \geqslant 7$, $\dim \mathcal{L}_3(\mathcal{S}) \geqslant 8$ и $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9$, т.е. $l(\mathcal{S}) = 4$. Значит, для систем порождающих $\mathcal{S}$ с $|\mathcal{S}| \geqslant 5$ справедлива оценка $l(\mathcal{S}) \leqslant 4$.

Пусть $3 \leqslant \dim L_1(\mathcal{S}) \leqslant 5$. Предположим, что $l(\mathcal{S}) \geqslant 5$ и приведем это утверждение к противоречию.

Если $l(\mathcal{S}) > 4$, то в $\mathcal{S}^5$ найдется несократимое слово $B = A_{i_1} \dots A_{i_5}$. Из несократимости B следует, что и его подслова $A_{i_1}A_{i_2}$, $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$, и $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}$ также несократимы, и значит $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) \geqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + 3$.

I. Допустим, что $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) = \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + 1$. В этом случае все слова в $\mathcal{L}_2(\mathcal{S})$ представляются в виде линейной комбинации $A_{i_1}A_{i_2}$ и слов длины меньшей 2. Но тогда слово B есть линейная комбинация сократимого по теореме Гамильтона–Кэли слова $A_{i_1}^3 A_{i_2} A_{i_5}$ и слов длины меньшей 5, т.е. B сократимо. Противоречие.

II. Пусть теперь $\dim \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \geqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S})+2$. В этом случае $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) \geqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S})+4$.

При $\dim L_1(\mathcal{S}) = 5$ получаем, что $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9 = \dim M_3(\mathbb{F})$, $\mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = M_3(\mathbb{F})$, а значит, B сократимо. Противоречие.

Пусть $\dim L_1(\mathcal{S}) \leqslant 4$.

1. Предположим, что все слова в $\mathcal{L}_3(\mathcal{S})$ представляются в виде линейной комбинации $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ и слов длины меньшей 3. Тогда получим, что слово B представляется в виде линейной комбинации сократимого слова $A_{i_1}^3 A_{i_2} A_{i_3}$ и слов длины меньшей 5, т.е. B сократимо. Противоречие.

2. Пусть в $\mathcal{L}_3(\mathcal{S})$ есть несократимое слово, не представляющееся в виде линейной комбинации $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ и слов длины меньшей 3. Следовательно, $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) \geqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) + 5$.

   При $\dim L_1(\mathcal{S}) = 4$ получаем, что $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9 = \dim M_3(\mathbb{F})$, $\mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = M_3(\mathbb{F})$, а значит, B сократимо. Противоречие.

Пусть $\dim L_1(\mathcal{S}) = 3$. Далее возможны два случая: либо $i_1 = i_2$, либо они различны.

(a) Если $i_1 = i_2$, то либо все слова в $\mathcal{L}_4(\mathcal{S})$ представляются в виде линейной комбинации слова $A_{i_1}^2 A_{i_3} A_{i_4}$ и слов длины меньшей 4, либо $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9$. А тогда слово B либо представляется в виде линейной комбинации сократимого слова $A_{i_1}^3 A_{i_3} A_{i_4}$ и слов длины меньшей 5, либо $B \in \mathcal{L}_4(\mathcal{S})$, поскольку $\mathcal{L}_4(S) = M_3(\mathbb{F})$. То есть B не может быть несократимо. Противоречие.

(b) Если $i_1 \neq i_2$, то либо $\dim \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = 9$ и $B \in \mathcal{L}_4(\mathcal{S}) = M_3(\mathbb{F})$, либо слово B представляется линейной комбинацией сократимого по пункту i слова $A_{i_1}^2 A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4}$ и слов меньшей длины, т.е. также получается, что B сократимо. Противоречие.

Следовательно, все слова длины 5 в $\mathcal{S}^5$ сократимы и $l(\mathcal{S}) \leqslant 4$. Тогда получаем оценку $l(M_3(\mathbb{F})) = \max\limits_{\mathcal{S}} l(\mathcal{S}) \leqslant 4$.

Эта оценка достигается на системе порождающих, состоящей из матриц $E_{1,2}$ и $E_{1,2} + E_{2,3} + E_{3,1}$. □

Лемма 11.14. Пусть $\mathcal{S}$ — система порождающих $M_n(\mathbb{F})$, $\mathcal{X} \subseteq M_{n,m}(\mathbb{F})$ — конечное множество, and $\mathcal{I} = M_n(\mathbb{F})\mathcal{X}$ — левый $M_n(\mathbb{F})$-модуль, порожденный $\mathcal{X}$. Тогда $\mathcal{L}_k(\mathcal{S})\mathcal{X} = \mathcal{I}$ для всех $k \geqslant k_0 = \dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{I}) - \dim_{\mathbb{F}}(\langle \mathcal{X} \rangle)$.

Доказательство. Цепочка включенных подпространств:

$$\mathbb{F}\mathcal{X} \subseteq \mathcal{L}_1(\mathcal{S})\mathcal{X} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{L}_h(\mathcal{S})\mathcal{X} = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})\mathcal{X} = \ldots = \mathcal{L}(\mathcal{S})\mathcal{X} = \mathcal{I}$$

стабилизируется, когда получается весь модуль. Тогда утверждение следует из роста размерностей $\mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ до стабилизации. □

Теорема 11.15. [Паппачена, 1997] Пусть $\mathcal{S}$ — конечная система порождающих для $M_n(\mathbb{F})$.

1) Если для некоторого k пространство $\mathcal{L}_k(\mathcal{S})$ содержит матрицу ранга $r > 0$, то $l(\mathcal{S}) \leqslant rn + n - r + k - 1$.

2) Если $\mathcal{S}$ содержит матрицу с различными собственными числами, то $l(\mathcal{S}) \leqslant 2n - 2$.

Доказательство. 1) Пусть $A \in \mathcal{L}_k(\mathcal{S})$ имеет ранг r. Рассмотрим левый идеал $\mathcal{I} = M_n(\mathbb{F})A$. Из условия на ранг следует, что $\dim \mathcal{I} = rn$. Тогда по лемме 11.14 $\mathcal{L}_h(\mathcal{S})A = \mathcal{I}$ при $j = rn - 1$. Поскольку $A \in \mathcal{L}_k(\mathcal{S})$, то $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{L}_{rn+k-1}(\mathcal{S})$.

Преобразованием подобия можно добиться того, что $\mathcal{I}$ состоит из матриц, у которых первые r столбцов ненулевые, а остальные — нулевые.

Пусть $\mathcal{R}_i$ — правый идеал кольца $M_n(\mathbb{F})$, состоящий из матриц с ненулевой i-ой строкой, положим $\mathcal{R}_i' = \mathcal{R}_i \cap \mathcal{I}$. Тогда $\dim \mathcal{R}_i = n$, $\dim \mathcal{R}_i' = r$, и по лемме 11.14

$\mathcal{R}M_n(\mathbb{F}) = \mathcal{R}_i = \mathcal{R}'_i\mathcal{L}_{n-r}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_{rn+n-r+k-1}(\mathcal{S})$. Поскольку $M_n(\mathbb{F}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathcal{R}_i$, то $M_n(\mathbb{F}) = \mathcal{L}_{rn+n-r+k-1}(\mathcal{S})$.

2) Матрица A с n разными собственными числами является циклической, $\dim \mathbb{F}[A] = n$ и в новом базисе $\mathbb{F}[A] = D_n(\mathbb{F})$ — алгебра диагональных матриц. Тогда $E_{ii} \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$, $E_{ii}M_n(\mathbb{F}) = \mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{L}_{2n-2}(\mathcal{S})$, и поскольку $M_n(\mathbb{F}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathcal{R}_i$, то $M_n(\mathbb{F}) = \mathcal{L}_{2n-2}(\mathcal{S})$. $\square$

Далее покажем, что это утверждение можно распространить на любую циклическую матрицу.

Задачи к лекции 13.

Задача 1. Для каждого $k = 1, 2, 3, 4$ приведите пример системы порождающих алгебры $M_3(\mathbb{F})$ длины k.

Задача 2. Пусть $n \geqslant 3$. Найдите длину системы порождающих $\mathcal{S} = \{E_{12}, E_{21}, E_{23}, E_{32}, \ldots, E_{n-1,n}, E$
из примера 9.7.

Задача 3. Найдите длину пары $\{C, D\} \subset M_n(\mathbb{C})$, где $D = \mathrm{diag}\,(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1})$, где ε — первообразный корень степени n из единицы, $C = E_{12} + E_{23} + \ldots + E_{n-1,n} + E_{n,1}$.

Задача 4. Покажите, что в случае, когда $\alpha \in \mathbb{C}^*$ не является корнем из единицы, длина пары $\{C, D(\alpha)\} \subset M_n(\mathbb{C})$, где $D(\alpha) = \mathrm{diag}\,(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$, меньше, чем у пары $\{C, D\} \subset M_n(\mathbb{C})$ из предыдущей задачи.

Задача 5. Пусть $\mathbb{F}$ — бесконечное поле, $n \in \mathbb{N}$. Покажите, что для любой пары матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ слово $A^{n-1}BA^{n-1}$ — сократимо.

12 Доказательство гипотезы Паза при наличии в системе порождающих циклической матрицы.

Лемма 12.1. Пусть $\mathcal{S}$ — система порождающих $M_n(\mathbb{F})$, пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ и $m_1, m_2, \ldots m_k$ — различные элементы множества $\{1, 2, \ldots, m\}$. Рассмотрим множество матриц $\mathcal{X} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\} \subseteq M_{n,m}(\mathbb{F})$, таких, что у матрицы C_i ненулевые элементы находятся только в столбцах с номерами $m_1, m_2, \ldots, m_i$, и столбец m_i у нее ненулевой. Обозначим через $\mathcal{I}$ левый $M_n(\mathbb{F})$-модуль $M_n(\mathbb{F})\mathcal{X}$.

Тогда $\mathcal{I} = \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})\langle C_1, C_2, \ldots, C_k\rangle$ и содержит все матричные единицы с 1 в столбцах с номерами $m_1, m_2, \ldots, m_k$. (Аналогичное утверждение верно для строк и правых модулей.)

Доказательство. Доказываем индукцией по k. Пусть $\mathcal{X}_l := \{C_1, C_2, \ldots, C_l\}$ для всех $l = 1, 2, \ldots, k$. *База индукции* ($k = 1$): вычисляем левый модуль

$$\mathcal{I}_1 = M_n(\mathbb{F})\mathcal{X}_1 = \langle E_{1,m_1}, E_{2,m_1}, \ldots, E_{n,m_1}\rangle.$$

Поскольку $\dim_{\mathbb{F}}\mathcal{I}_1 - \dim_{\mathbb{F}}\langle C_1\rangle = n-1$, получаем $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})C_1 = \mathcal{I}_1$ по лемме 11.14.

Шаг индекции: Рассмотрим левый модуль $\mathcal{I}_k = M_n(\mathbb{F})\mathcal{X}_k$ и оператор проектирования $P : \mathcal{I}_k \to \mathbb{F}^n$ на m_k-ый столбец, который переводит матрицу $X = (x_{i,j})$ в

$$P(X) = \begin{pmatrix} x_{1,m_k} \\ x_{2,m_k} \\ \vdots \\ x_{n,m_k} \end{pmatrix}.$$

По предположению $P(C_k) \neq 0$, откуда $P(\mathcal{I}_k) = \mathbb{F}^n$. Из равенств $\dim_{\mathbb{F}}P(\mathcal{I}_k) - \dim_{\mathbb{F}}\langle P(C_k)\rangle = n-1$, следует, что $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})P(C_k) = \mathbb{F}^n$ (по лемме 11.14). В частности, для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует матрица $F_i \in \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})$ такая, что $F_iP(C_k) = e_i$ и

$$F_iC_k = E_{i,m_k} + M_i$$

для некоторой $M_i \in M_n(\mathbb{F})$ с ненулевыми элементами в столбцах $m_1, \ldots, m_{k-1}$. По предположению индукции $M_i \in \mathcal{I}_{k-1}$ и значит, $E_{i,m_k} = F_iC_k - M_i$ содержится в $\mathcal{I}_k$. □

Теорема 12.2. Пусть $\mathbb{F}$ алгебраически замкнутое поле, $n \in \mathbb{N}$. Если система порождающих $\mathcal{S}$ матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ содержит циклическую матрицу A, то $l(\mathcal{S}) \leqslant 2n-2$.

Доказательство. Если $T \in M_n(\mathbb{F})$ обратима, то очевидно $l(\mathcal{S}) = l(T^{-1}\mathcal{S}T)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что матрица A — жорданова.

Допустим, что у A есть k различных $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратностей n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда

$$A = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

Пусть E_i и N_i обозначают блочно-диагональные матрицы с ненулевыми элементами только в i-ом блоке, i-ый блок E_i — единичная матрица E_{n_i}, i-ый блок N_i — жорданова клетка J_{n_i}. Множество многочленов от A содержит $\mathcal{X}_i = \{E_i, N_i, \ldots, N_i^{n_i-1}\}$, также верно, что

$$\mathcal{X}_i \subseteq \langle I, A, \ldots, A^{n-1}\rangle \subseteq \mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S}), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Множество $\mathcal{X}_i$ удовлетворяет условиям леммы 12.1 для $C_j = N_i^{n_i-j}$ и $m_j = (n_1 + \ldots + n_{i-1}) + n_i - j + 1$, $j = 1, \ldots, n_i$. Откуда $M_n(\mathbb{F})\mathcal{X}_i$ cjdgflftn с $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})\mathcal{X}_i$ и содержит все матричные единицы с 1 в столбцах $(n_1 + \ldots + n_{i-1}) + j$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$. В итоге получаем, что $\mathcal{L}_{n-1}(\mathcal{S})\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{L}_{2n-2}(\mathcal{S})$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$, $\mathcal{L}_{2n-2}(\mathcal{S}) = M_n(\mathbb{F})$ и $l(\mathcal{S}) \leqslant 2n-2$.

□

13 Длина треугольных и коммутативных алгебр

Теорема 13.1. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{F}$ длин $l_{\mathcal{A}}$ и $l_{\mathcal{B}}$, соответственно. Тогда выполнены следующие неравенства:

$$\max\{l_{\mathcal{A}}, l_{\mathcal{B}}\} \leqslant l(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \leqslant l_{\mathcal{A}} + l_{\mathcal{B}} + 1. \tag{21}$$

Доказательство. Обозначим $p = l_{\mathcal{A}},\ q = l_{\mathcal{B}}$.

Для того, чтобы доказать нижнюю оценку возьмем системы порождающих $\{a_1, \ldots, a_k\}$ и $\{b_1, \ldots, b_m\}$ для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с длинами p и q соответственно. Тогда множество $\{(a_1, 0), \ldots, (a_k, 0), (0, b_1),$ будет системой порождающих в $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ длины не меньшей $\max\{p, q\}$.

Возьмем в $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ произвольную систему порождающих $SS = \{(c_1, d_1), \ldots, (c_n, d_n)\}$ и докажем, что всякое слово от элементов SS длины $p + q + 2$ сократимо. Заметим, что множество $c_1, \ldots, c_n$ является системой порождающих для алгебры $\mathcal{A}$, множество $d_1, \ldots, d_n$ является системой порождающих для алгебры $\mathcal{B}$. Обозначим $N = p + q + 2$. Пусть $v = (c_{i_1}, d_{i_1}) \ldots (c_{i_N}, d_{i_N}) = (c_{i_1} \ldots c_{i_N}, d_{i_1} \ldots d_{i_N}),\ i_j \in \{1, \ldots, n\},\ j = 1, \ldots, N$. Так как длина алгебры $\mathcal{A}$ равна p, то слово $c_{i_1} \ldots c_{i_{p+1}}$ сократимо, т.е. $c_{i_1} \ldots c_{i_{p+1}} = \alpha_1 c_{i_1} \ldots c_{i_p} + \ldots + \alpha_{M-1} c_n + \alpha_M 1_{\mathcal{A}}$. Так как длина алгебры $\mathcal{B}$ равна q, то слово $d_{i_{p+2}} \ldots d_{i_N}$ сократимо, т.е. $d_{i_{p+2}} \ldots d_{i_N} = \beta_1 d_{i_{p+2}} \ldots d_{i_{N-1}} + \ldots + \beta_{K-1} d_n + \beta_K 1_{\mathcal{B}}$. Подставляя выражения для $c_{i_1} \ldots c_{i_{p+1}}$ и $d_{i_{p+2}} \ldots d_{i_N}$ в v, получим

$$\{(c_{i_1} \ldots c_{i_{p+1}},\ d_{i_1} \ldots d_{i_{p+1}}) - \alpha_1 (c_{i_1} \ldots c_{i_p},\ d_{i_1} \ldots d_{i_p}) - \ldots -$$

$$\alpha_{M-1}(c_n, d_n) - \alpha_M (1_A, 1_B)\}\{(c_{i_{p+2}} \ldots c_{i_N},\ d_{i_{p+2}} \ldots d_{i_N}) - \beta_K (1_A, 1_B) -$$

$$\beta_{K-1}(c_n, d_n) - \ldots - \beta_1 (c_{i_{p+2}} \ldots c_{i_{N-1}},\ d_{i_{p+2}} \ldots d_{i_{N-1}})\} = (0, x)(y, 0) = 0.$$

Значит слово v представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины. Так как v было выбрано произвольно, то $l(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \leqslant p + q + 1$.

□

По индукции оценки в предыдущей теореме обобщаются на произвольное число слагаемых.

Следствие 13.2. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и пусть $k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ — конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{F}$ длин $l_1, \ldots, l_k$, соответственно. Пусть $\mathcal{A} = \bigoplus\limits_{j=1}^{k} \mathcal{A}_j$. Тогда выполнены следующие неравенства:

$$\max\{l_1, \ldots, l_k\} \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} l_j + k - 1.$$

Следствие 13.3. Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра блочно-треугольных матриц, т.е., все матрицы из $\mathcal{A}$ имеют вид

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,k} \\ \hline 0 & A_{2,2} & \dots & A_{2,k} \\ \hline & & \ddots & \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{k,k} \end{array}\right),$$

где $A_{i,j} \in M_{n_i,n_j}(\mathbb{F})$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, причем все матрицы $A_{i,i}$ образуют подалгебру в $M_{n_i}(\mathbb{F})$ длины l_i, $i = 1, \ldots, k$. Тогда для $l(\mathcal{A})$ выполнены следующие неравенства:

$$\max\{l_1, \ldots, l_k\} \leqslant l(\mathcal{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} l_j + k - 1. \tag{22}$$

Отсюда легко вытекает следующий результат:

Следствие 13.4. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — произвольная подалгебра алгебры $T_n(\mathbb{F})$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leqslant n - 1$. В частности, $l(T_n(\mathbb{F})) = n - 1$.

Доказательство. Любая подалгебра треугольной матричной алгебры является блочно-треугольной алгеброй, все блоки которой имеют единичный размер. Т.к. $l(\mathbb{F}) = 0$, имеем оценку $l(\mathcal{A}) \leqslant 0 + n - 1 = n - 1$.

Для $T_n(\mathbb{F})$ возьмем систему порождающих $\mathcal{S} = \{E_{11}, \ldots, E_{nn}, E_{1,2}, \ldots, E_{n-1,n}\}$. Слово $E_{1,n} = E_{1,2}E_{2,3} \ldots E_{n-1,n}$ не может быть представлена как произведение меньшего, чем $n - 1$ числа элементов SS.

□

Лемма 13.5. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $C \in M_n(\mathbb{F})$ — циклическая матрица. Тогда матрица $C + \alpha E$ является циклической для любого $\alpha \in \mathbb{F}$.

Лемма 13.6. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра блочно-диагональных матриц с блоками $\mathcal{A}_i \subseteq M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда из равенства $l(\mathcal{A}) = n - 1$ следует, что $l(\mathcal{A}_i) = n_i - 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Из коммутативности $\mathcal{A}$ следует, что все $\mathcal{A}_i$ коммутативны. Значит, для каждого i справедливо $l(\mathcal{A}_i) \leqslant n_i - 1$. Предположим, найдется номер $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ такой, что $l(\mathcal{A}_{i_0}) < n_{i_0} - 1$. Тогда по следствию 13.3 получаем

$$l(\mathcal{A}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} l(\mathcal{A}_j) + k - 1 < \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) + k - 1 = n - 1.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. □

Предложение 13.7. Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_2(\mathbb{F})$ имеет максимальную длину тогда и только тогда, когда она порождена циклической матрицей.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}$ — некоторая матрица. Если матрица A не является циклической, т.е. $\dim(\langle E, A\rangle) = 1$, то $A = aE,\ a \in \mathbb{F}$. Следовательно, если найдется $A \in \mathcal{A},\ A \neq aE$, то $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей A. В этом случае $l(\mathcal{A}) = 1$, т.е. алгебра $\mathcal{A}$ максимальна по включению. Подалгебра, порожденная только единичной матрицей, имеет длину 0. □

Предложение 13.8. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, в котором есть по крайней мере n различных ненулевых элементов, и V — подпространство в $\mathbb{F}^n$ и для всех $i = 1, \ldots, n$ найдется такой $v^i \in V$, что $v^i_i \neq 0$. Тогда найдется $v \in V$, что $v_i \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n.

База индукции. При $n = 1$ утверждение верно.

Шаг индукции. Допустим, что $n > 1$ и для $n-1$ утверждение доказано. Это означает, что существует $v^0 \in V$, что $v^0_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, n-1$. Если и $v^0_n \neq 0$, то положим $v = v^0$. В противном случае найдется $v^1 \in V,\ v^1_n \neq 0$. Рассмотрим $v^0 + av^1,\ a \in \mathbb{F},\ a \neq 0$. Пусть $y_i(x) = v^1_i x + v^0_i,\ i = 1, \ldots, n-1$. При каждом i $v^0_i \neq 0$, значит уравнение $y_i(x) = 0$ имеет в $\mathbb{F}$ не более одного решения. Следовательно, если $X = \{x \in \mathbb{F} |\ \exists i \in \{1, \ldots, n-1\}\ y_i(x) = 0\}$, то $|X| \leqslant n-1$. Из условия на число элементов поля следует, что найдется $a \in \mathbb{F},\ a \neq 0$, что $v^0_i + av^1_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, n$. Вектор $v^0 + av^1$ и есть искомый. □

Предложение 13.9. Пусть $k, m, n \in N,\ n = k + m$, $\mathbb{F}$ поле, содержащее не менее $\left[\dfrac{n^2}{4}\right] + 1$ различных элементов, где $[.]$ обозначает целую часть числа. Рассмотрим подалгебры $\mathcal{A} \subseteq M_k(\mathbb{F})$, $\mathcal{B} \subseteq M_m(\mathbb{F})$, порожденные циклическими матрицами. Обозначим $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ — блочно-диагональную подалгебру в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathcal{C}$ порождена циклической матрицей.

Доказательство. Рассмотрим $A_k \in \mathcal{A}$, $B_m \in \mathcal{B}$ — циклические матрицы. Тогда $A = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_m \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ и $E' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$.

Обозначим $C(\alpha) = A + B + \alpha E'$. Покажем, что существует такое $\alpha \in \mathbb{F}$, что множества собственных значений матриц A и $B + \alpha E'$ не пересекаются, и соответственно, матрица $C(\alpha)$ — циклическая.

Действительно, пусть $\bar{\mathbb{F}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}$. Обозначим $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — множество собственных значений матрицы A и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ — множество собственных значений матрицы B. Положим

$$\bar{X} = \{\beta_j - \gamma_i \mid i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, m\} \subseteq \bar{\mathbb{F}}$$

и $X = \bar{X} \cap \mathbb{F}$. Имеем

$$|X| \leqslant |\bar{X}| \leqslant k \cdot m = k(n-k) \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right].$$

Тогда по условию на мощность поля $\mathbb{F}$ найдется $\alpha_0 \in \mathbb{F}$, $\alpha_0 \notin X$, и в таком случае множество собственных чисел матрицы A не пересекается с множеством собственных чисел матрицы $B + \alpha_0 E'$. Следовательно, $\chi_{C(\alpha_0)}(t) = \chi_A(t)\chi_{(B+\alpha_0 E')}(t) = \mu_A(t)\mu_{(B+\alpha_0 E')}(t) = \mu_{C(\alpha_0)}(t)$ и матрица $C(\alpha_0) \in \mathcal{C}$ — циклическая.

Таким образом, алгебра $\mathcal{C}$ порождена матрицей C.

□

Теорема 13.10. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$ триангулизуема, поэтому $l(\mathcal{A}) \leqslant n-1$.

Теорема 13.11. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$ имеет максимальную длину $n-1$ тогда и только тогда, когда она порождена циклической матрицей.

Доказательство. Достаточность следует из леммы из предыдущей лекции.

Необходимость. Пусть $l(\mathcal{A}) = n-1$. Покажем, что в этом случае $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей. Доказательство проведем индукцией по порядку матриц n.

База индукции: При $n = 1$ любая подалгебра с единицей $\mathcal{A}$ в $M_1(\mathbb{F})$ совпадает с $M_1(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$ и порождена циклическим элементом 1. При $n = 2$ утверждение следует из предложения 13.7.

Шаг индукции: предположим, что для коммутативных подалгебр в $M_k(\mathbb{F})$, $k < n$ выполнено утверждение теоремы. Далее рассмотрим два случая:

1. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ содержит матрицу с несколькими различными собственными значениями. Как было показано в доказательстве теоремы Шура, в алгебре $\mathcal{A}$ найдется нетривиальный идемпотент — матрица A. Имеем $A^2 = A$ и $A \neq 0, E$, следовательно A имеет ровно два различных собственных значения 0 и 1, причем в жордановой форме матрицы A все клетки имеют размер 1×1. Пусть 1 как собственное число A имеет кратность s, $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Тогда по теореме о жордановой нормальной форме найдется такая невырожденная матрица $V \in M_n(\mathbb{F})$, что $E'_s = V^{-1}AV = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0_{n-s} \end{pmatrix}$. По предложению 4.5 все матрицы, перестановочные с E'_s также являются блочно-диагональными и состоят из двух блоков.

Обозначим $\mathcal{A}_V = V^{-1}\mathcal{A}V = \{V^{-1}AV | A \in \mathcal{A}\}$. Очевидно, что $l(\mathcal{A}) = l(\mathcal{A}_V)$, и $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}_V$ порождена циклической матрицей.

Матрица $E'_{n-s} = \begin{pmatrix} 0_s & 0 \\ 0 & E_{n-s} \end{pmatrix} = E - E'_s \in \mathcal{A}_V$. Таким образом, получаем, что $\mathcal{A}_V = E'_s\mathcal{A}_V \oplus E'_{n-s}\mathcal{A}_V$ — блочно-диагональная подалгебра $M_n(\mathbb{F})$ с двумя ненулевыми блоками.

Из леммы 13.6 получаем, что блоки $\mathcal{A}_V$ имеют длины $s-1$ и $n-s-1$ соответственно. Тогда по предположению индукции они порождены циклическими матрицами. Алгебраически замкнутое поле $\mathbb{F}$ бесконечно, алгебры $E'_s\mathcal{A}_V$ и $E'_{n-s}\mathcal{A}_V$ удовлетворяют условию предложения 13.9, следовательно, существует циклическая матрица $C \in \mathcal{A}_V$. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей VCV^{-1}.

2. Пусть у каждой матрицы в алгебре ровно одно собственное значение. По теореме о триангулизуемости, найдется такая невырожденная матрица $V \in M_n(\mathbb{F})$, что $\mathcal{A}_V = V^{-1}\mathcal{A}V \subseteq T_n(\mathbb{F})$. Любая матрица $C \in \mathcal{A}_V$ представляется в виде $C = \gamma E + C_N$, C_N— нильтреугольная.

Если для любого $k = 1, \ldots, n$ в J есть матрица $C_k = \{c_{ij}^{(k)}\}$, для которой $c_{k,k+1}^{(k)} \neq 0$, то из предложения 13.8 получаем, что существует линейная комбинация матриц C_k — матрица $C = \{c_{ij}\}$ такая, что все элементы $c_{k,k+1} \neq 0$. Матрицы $E, C, \ldots, C^n - 1$ линейно независимы, поскольку при $m < n$ для $C^m = \{c_{ij}^{(m)}\}$ выполнено $c_{ij}^{(m)} = 0$, $j < i+m$ и $c_{i,i+m}^{(m)}$ равны некоторым произведениям $c_{i,i+1}^{(1)} = c_{i,i+1} \neq 0$. Значит, матрица C — циклическая, она порождает алгебру $\mathcal{A}_V$. Следовательно, $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей VCV^{-1}.

Предположим существует $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ такое, что для любой $B = \{b_{ij}\} \in J$ выполнено $b_{l,l+1} = 0$. Пусть $B_k = \{b_{ij}^{(k)}\} \in J$, $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда у матрицы $B_1B_2\ldots B_{n-1}$ отличным от нуля может быть только последний элемент в первой строке, он равен $b_{12}^{(1)}b_{23}^{(2)}\ldots b_{n-1,n}^{(n-1)}$. Но по нашему предположению какой-то из сомножителей всегда равен нулю. Это означает, что произведение любых $n-1$ нильпотентных матриц в $\mathcal{A}$ равно 0. Тогда, $l(\mathcal{A}) = l(\mathcal{A}_V) \leqslant n-2$, что противоречит ее максимальности.

$\square$

Следствие 13.12. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Если коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$ в $M_n(\mathbb{F})$ имеет длину $n-1$, то она является максимальной по включению.

Доказательство. По теореме 13.11 если $l(\mathcal{A}) = n-1$, то $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей, тогда из теоремы Герштенхабера следует, что $\mathcal{A}$ — максимальная по включению коммутативная подалгебра. $\square$

Задачи к лекции 14.

Во всех задачах поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто.

Задача 1. Вычислите длину алгебры Куртера (пример 5.12).

Задача 2. Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{k,m} \oplus \langle E \rangle$ — коммутативная алгебра из задачи 5 к лекции 5. Вычислите ее длину.

Задача 3. Для алгебры $T_n(\mathbb{F})$ постройте пример системы порождающих длины $n-1$, содержащей циклическую матрицу.

Задача 4. Постройте пример пары порождающих $\mathcal{S} = \{A, B\}$ полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$, такой что A — циклическая и $l(\mathcal{S}) < 2n - 2$.

Задача 5. Найдите длины блочно-диагональных подалгебр $\mathcal{A}_1 = \mathbb{F} \oplus T_3(\mathbb{F})$ и $\mathcal{A}_2 = T_2(\mathbb{F}) \oplus T_2(\mathbb{F})$ матричной алгебры $M_4(\mathbb{F})$.