Структурная теория матриц

О.В. Маркова (МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва)

2024/2025

Версия от 25 сентября 2024г.

1 Напоминание и предварительные сведения

Определение 1.1. *Ассоциативное кольцо с единицей* — это множество R с заданными на нём операциями сложения «+» и умножения « $\cdot$ » так, что

1. R — абелева группа по сложению,
2. R — моноид (полугруппа с единицей 1) по умножению,
3. выполнены две аксиомы дистрибутивности:

$$\forall a, b, c \in R\colon\ \ c(a+b) = ca + cb\ \ \&\ \ (a+b)c = ac + bc.$$

Определение 1.2. *Тело* — кольцо с $1 \neq 0$, в котором всякий ненулевой элемент обратим. *Поле* — коммутативное тело.

Определение 1.3. Поле $\mathbb{F}$ называется *алгебраически замкнутым*, если любой многочлен положительной степени над $\mathbb{F}$ имеет хотя бы один корень в $\mathbb{F}$.

Определение 1.4. Непустое множество V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством* над полем $\mathbb{F}$, если заданы операции сложения $+ : V \times V \to V$ и умножения $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ скаляров из $\mathbb{F}$ на векторы из V такие, что выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall u, v, w \in V,\ (u+v)+w = u+(v+w)$ (*ассоциативность сложения векторов*);
2. $\forall u, v \in V,\ u+v = v+u$ (*коммутативность сложения*);
3. существует вектор 0 такой, что $v + 0 = 0 + v = uv\ \forall v \in V$, (*существование нейтрального по сложению элемента*);

4. для любого $v \in V$ существует вектор $-v$ такой, что $v + (-v) = (-v) + v = 0$ (*существование обратного по сложению, или противоположного элемента*);
5. $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall v, w \in V$, $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ (*дистрибутивность умножения числа на вектор*);
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall v \in V$, $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (*дистрибутивность умножения вектора на число*);
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall v \in V$, $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (*ассоциативность умножения вектора на число*);
8. $\forall v \in V$, $1 \cdot v = v$ (*нейтральность числа 1 по умножению*).

(Напомним, что выполнение аксиом 1–4 определяет, что $(V, +)$ является абелевой группой.)

Определение 1.5. *Базис* векторного пространства — упорядоченная линейно независимая система векторов, через которую выражается (в виде линейной комбинации) произвольный вектор пространства. Число векторов в базисе определено однозначно и называется *размерностью* пространства V, обозначается $\dim V$.

Предложение 1.6. Если V — конечномерное пространство и $V_1, V_2, \ldots$ последовательность его подпространств такая, что $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_k \subseteq \ldots$, иными словами, последовательность вложенных подпространств, то существует номер $N \in \mathbb{N}$, что с этого шага все пространства в цепочке совпадают, т.е. $V_N = V_{N+1} = \ldots$. Если дополнительно известно, что до шага N цепочка была строго возрастающей, т.е. $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_N$, то

$$N \leqslant \dim V_N - \dim V_1 + 1 \leqslant \dim V + 1.$$

Доказательство. Здесь используется конечномерность пространства и монотонность функции размерности для вложенных пространств: $V_k \subset V_{k+1}$ тогда и только тогда, когда $\dim V_k < \dim V_{k+1}$. Имеем неубывающую ограниченную последовательность натуральных чисел $d_k = \dim V_k$, $d_k \leqslant \dim V$ для всех k. Для неё существует номер $N \in \mathbb{N}$, что последовательность становится константной $d_N = d_{N+1} = \ldots$. Равенство размерностей влечёт равенство самих вложенных пространств.

Если известно строгое возрастание, то $\dim V_k - \dim V_{k-1} \geqslant 1$ при $2 \leqslant k \leqslant N$ и получаем оценку

$$\dim V_N - \dim V_1 = \sum_{k=2}^{N} (\dim V_k - \dim V_{k-1}) \geqslant \sum_{k=2}^{N} 1 = N - 1,$$

эквивалентно,

$$N \leqslant \dim V_N - \dim V_1 + 1.$$

Дополнительно мы знаем, что $\dim V_N \leqslant \dim V$, $\dim V_1 \geqslant 0$, откуда $N \leqslant \dim V + 1$. $\square$

2 Основные числовые характеристики матричных подалгебр. Теорема Бернсайда о матричных алгебрах и её следствия о блочной структуре и возможных размерностях собственных подалгебр алгебры матриц над алгебраическими замкнутыми полями.

Определение 2.1. *Алгебра* $\mathcal{A}$ над полем $\mathbb{F}$ — это кольцо со структурой векторного пространства над $\mathbb{F}$, причём выполнено $(ab)\alpha = a(b\alpha) = (a\alpha)b$ для $a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

Пример 2.2. Примеры алгебр: алгебра матриц $M_n(\mathbb{F})$, $\mathcal{L}(V)$— алгебра линейных операторов на векторном пространстве V.

Поскольку алгебра является векторным пространством, одной из основных числовых характеристик алгебры является размерность $\dim \mathcal{A}$.

Определение 2.3. Пусть подмножество $\mathcal{B}$ алгебры $\mathcal{A}$ содержит её единицу и само является алгеброй относительно тех же операций. Тогда $\mathcal{B}$ будем называть *подалгеброй* алгебры $\mathcal{A}$.

Можно, конечно, рассматривать и подалгебры без единицы, например, нулевую. Случаи, когда наличие единицы не предполагается, будем отдельно оговаривать.

Определение 2.4. Назовём подпространство U арифметического пространства $\mathbb{F}^n$ столбцов высоты n *инвариантным относительно подалгебры* $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$, если $Au \in U$ для любых $A \in \mathcal{A}, u \in U$. Подалгебру $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ назовём *неприводимой*, если в $\mathbb{F}^n$ не содержится ненулевых собственных подпространств инвариантных относительно $\mathcal{A}$.

Для всякого ненулевого вектора $v \in \mathbb{F}^n$ множество векторов $\mathcal{A}v = \{Av | A \in \mathcal{A}\}$ является подпростанством $\mathbb{F}^n$, инвариантным относительно $\mathcal{A}$ (непосредственно видно из определения $\mathcal{A}v$). Заметим также, что $v \in \mathcal{A}v$, поскольку $\mathcal{A}$ содержит единичную матрицу, поэтому подпространство $\mathcal{A}v$ ненулевое.

Определение 2.5. Назовём вектор $x \in \mathbb{F}^n$ *циклическим для подалгебры* $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}v = \mathbb{F}^n$.

Через A^T обозначим транспонированную матрицу.

Предложение 2.6. Пусть $\mathcal{A}$ — ненулевая неприводимая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда
1. любой ненулевой вектор $x \in \mathbb{F}^n$ является циклическим для подалгебры $\mathcal{A}$;
2. аналогичное утверждение выполнено для векторов-строк: для любой ненулевой строки x^T, $x \in \mathbb{F}^n$, множество векторов-строк $x^T\mathcal{A} = \{x^TA | A \in \mathcal{A}\}$ совпадает со всем арифметическим пространством строк $\mathbb{F}^n$.

Доказательство. Утверждение пункта 1 непосредственно вытекает из двух предыдущих определений.

Докажем утверждение 2 от противного. Пусть для некоторой строки подпространство $U = x^T\mathcal{A}$— собственное. Тогда $\dim U = k < n$. Рассмотрим подпространство $U^\perp \subset \mathbb{F}^n$ всех столбцов v, для которых $Uv = 0$ (т.е. $uv = 0$ для любой строки $u \in U$). По теореме о размерности пространства решений однородной системы линейных уравнений имеем $\dim U^\perp = n - \dim U = n - k > 0$. Таким образом, $U^\perp$ — собственное неулевое подпространство пространства $\mathbb{F}^n$. При этом $U^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$. Действительно, если $v \in U^\perp$, $u \in U$, $A \in \mathcal{A}$, то $u(Av) = (uA)v = u'v$, где $u' \in U$, поэтому $u'v = 0$ и $Av \in U^\perp$. Противоречие с неприводимостью алгебры $\mathcal{A}$. $\square$

Теорема 2.7 (Теорема Бернсайда)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $n \geqslant 2$. Тогда единственная ненулевая неприводимая подалгебра алгебры $M_n(\mathbb{F})$ — это вся алгебра $M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — ненулевая неприводимая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$.

I. Покажем, что $\mathcal{A}$ содержит матрицу ранга 1. Для этого рассмотрим ненулевую матрицу $A_0 \in \mathcal{A}$ минимального ранга и докажем, что $\operatorname{rk} A_0 = 1$. Предположим противное: $\operatorname{rk} A_0 \geqslant 2$. Тогда нуйдутся такие векторы $u, v \in \mathbb{F}^n$, что множество их образов $\{A_0u, A_0v\}$ линейно независимо. Вектор A_0u является циклическим для $\mathcal{A}$, поэтому найдётся матрица $A \in \mathcal{A}$, для которой $AA_0u = v$. Отсюда, $A_0v = A_0AA_0u$ и множество $\{A_0u, A_0AA_0u\}$ линейно независимо. Подпространство $A_0\mathbb{F}^n$ ненулевое и является инвариантным относительно A_0 (инвариантность образа линейного оператора), значит также оно инвариантно относительно всех матриц вида A_0B, $B \in M_n(\mathbb{F})$, в частности, относительно A_0A. В случае алгебраически замкнутых полей, в ненулевом инвариантном подпространстве относительно матрицы содержится ненулевой собственный вектор для этой матрицы, т.е. для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{F}$ ограничение матрицы (линейного оператора) $A_0A - \lambda E$ на пространство $A_0\mathbb{F}^n$ является вырожденной матрицей. В силу замкнутости алгебры относительно операций суммы и произведения, имеем $A_1 = (A_0A - \lambda E)A_0 \in \mathcal{A}$. Матрица A_1 ненулевая, поскольку $A_1u = A_0AA_0u - \lambda A_0u = A_0v - \lambda A_0u \neq 0$ в силу линейной независимости множества векторов $\{A_0u, A_0v\}$. С другой стороны, $A_1 = A_0(AA_0 - \lambda E)$, поэтому образ A_1 (пространство $A_1\mathbb{F}^n$) содержится в образе A_0. Причём это включение строгое, в силу вырожденности ограничения $A_0A - \lambda E$ на пространство $A_0\mathbb{F}^n$. Для рангов это означает, что $0 \neq \operatorname{rk} A_1 < \operatorname{rk} A_0$. Противоречие с выбором матрицы A_0.

II. Теперь покажем, что с помощью операций в алгебре из одной матрицы ранга 1 в неприводимой алгебре можно получить все матричные единицы. Зафиксируем индексы $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ и будем строить матричную единицу $E_{i,j}$. Матрица A_0 ненулевая. Возьмём любой её ненулевой столбец, пусть это k-ый столбец a_k.

В силу неприводимости в алгебре $\mathcal{A}$ есть матрица B для которой $Ba_k = e_i = (0, 0, 1, 0 \ldots, 0)^T$, 1 расположена на i-ом месте (использовали утверждение 1 предложения 2.6). У матрицы BA_0 ненулевой k-ый столбец и $\operatorname{rk} BA_0 \leqslant \operatorname{rk} A_0 = 1$, значит, $\operatorname{rk} BA_0 = 1$. Тогда все столбцы этой матрицы пропорциональны её k-му столбцу,

$$BA_0 = (\alpha_1 e_i, \alpha_2 e_i, \ldots, \alpha_n e_i) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью утверждения 2 предложения 2.6, находим в алгебре $\mathcal{A}$ матрицу C такую, что $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)C = (0, 0, 1, \ldots, 0) = e_j^T$. Тогда $BA_0C = E_{i,j}$. Как известно, из матричных единиц с помощью линейных комбинаций получаются все матрицы, т.е. $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$. $\square$

Определение 2.8. Подмножество I алгебры $\mathcal{A}$ называется *(двусторонним) идеалом*, если оно является подпространством соответствующего векторного пространства алгебпры $\mathcal{A}$ и выдерживает умножение на элементы алгебры, т.е. $ax, xa \in I$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $x \in I$.

Отметим, что всякий идеал является подалгеброй (но необязательно подалгеброй с единицей), а обратное неверно. Например, множество диагональных матриц яявляется подалгеброй, но произведение диагональной и недиагональной матрицы не всегда будет диагональной матрицей.

Этот известный факт можно доказать непосредственно над любым полем, но мы отметим, что он также получается как следствие из теоремы Бернсайда.

Следствие 2.9. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $n \geqslant 2$. Тогда в алгебре $M_n(\mathbb{F})$ есть ровно два двусторонних идеала — 0 и $M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Доказательство предлагается в качествеупражнения в задачах к лекции. $\square$

Определение 2.10. *Гомоморфизм $\mathbb{F}$-алгебр* — это отображение между $\mathbb{F}$-алгебрами, которое одновременно является кольцевым гомоморфизмом и линейным отображением векторных пространств. Для алгебр с единицей мы предполагаем, что кольцевой гомоморфизм переводит единицу в единицу.
Изоморфизм= биективный гомоморфизм. *Автоморфизм* = изоморфизм в себя.

Теорема 2.11. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $n \geqslant 2$. Тогда любой автоморфизм алгебры $M_n(\mathbb{F})$ является внутренним, т.е. для любого автоморфизма $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ найдётся обратимая матрица $S \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $\varphi(A) = SAS^{-1}$ для всех $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Пусть $\varphi : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ — некоторый авоморфизм. Как кольцевой гомоморфизм φ переводит идемпотенты в идемпотенты: если $A^2 = A$, то $(\varphi(A))^2 = \varphi(A^2) = \varphi(A)$. Возьмём идемпотентную матрицу A_1 ранга 1. Тогда

$$\dim \{A_1 B A_1 | B \in M_n(\mathbb{F})\} = 1$$

и поскольку φ является биективным линейным отображением векторных пространств, то $1 = \dim \varphi(\{A_1 B A_1 | B \in M_n(\mathbb{F})\}) = \{\varphi(A_1) C \varphi(A_1) | C \in M_n)(\mathbb{F})\}$. Следовательно, $\operatorname{rk} \varphi(A_1) = 1$.

Идемпотентом ранга 1 является, например, матричная единица E_{11}. Она также является жордановой матрицей, поэтому любая идемпотентная матрица ранга 1 с ней сопряжена. В частности, $\varphi(E_{11}) = T^{-1} E_{11} T$. Без ограничения общности, в дальнейшем доказательстве вместо автоморфизма φ рассмотрим его композицию с сопряжением матрицей T. Для краткости, обозначим её снова за φ. В этом случае $\varphi(E_{11}) = E_{11}$.

Чтобы задать матрицу S, построим линейный оператор на $\mathbb{F}^n$, матрица которого и будет искомой. Зададим оператор σ правилом: для любой матрицы $B \in M_n(\mathbb{F})$ $\sigma(Be_1) = \varphi(B)e_1$, т.е. первый столбец матрицы B переводим в первый столбец $\varphi(B)$. Проверим корректонсть. Пусть $Be_1 = Ce_1$. Тогда $(B - C)e_1 = 0$. Поскольку e_1 — единственный ненулевой столбкц матрицы E_{11}, то $(B - C)E_{11} = O$. Применим к этому матричному равенству автоморфизм φ:

$$\varphi(B - C)\varphi(E_{11}) = \varphi(O) \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(B) - \varphi(C))E_{11} = O \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(B) - \varphi(C))e_1 = 0,$$

т.е. $\varphi(B)e_1 = \varphi(C)e_1$. Линейность σ очевидно следует по построению из линейности φ. Покажем, что σ является инъективным отображением. Действительно, пусть $\varphi(B)e_1 = 0$. Тогда $\varphi(B)E_{11} = O$, $\varphi(BE_{11}) = O$, и $BE_{11} = O$ в силу биективности φ. Таким образом, $Be_1 = 0$. Инъективный линейный оператор на конечномерном пространстве является биективным отображением.

Осталось показать, что сопряжение с помощью матрицы σ совпадает с действием автоморфизма φ. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$ — произвольная матрица. Имеем

$$\sigma(ABe_1) = \varphi(AB)e_1 = \varphi(A)\varphi(B)e_1 = \varphi(A)\sigma(Be_1),$$

или в матричной форме

$$SABe_1 = \varphi(A)SBe_1.$$

Когда B пробегает множество всех матриц, столбец $y = Be_1$ пробегает всё множество $\mathbb{F}^n$, т.е. $SAy = \varphi(A)Sy$ для любого $y \in \mathbb{F}^n$, откуда

$$SA = \varphi(A)S,$$

или в итоге

$$\varphi(A) = SAS^{-1}.$$

□

Теорема 2.12. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле. Пусть $\mathcal{A}$ подалгебра с единицей в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда существует базис пространства $\mathbb{F}^n$, в котором любая матрица $A \in \mathcal{A}$ представляется в блочно-верхнетреугольном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \dots & & A_{2k} \\ 0 & 0 & A_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & A_{kk} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{F}), i = 1, \dots, k$, $n_1 + \dots + n_k = n$, и множество $\{1, \dots, k\}$ есть объединение попарно непересекающихся множеств $J_1, J_2, \dots, J_l$, причем
1. $\{A_{ii} : A \in \mathcal{A}\} = M_{n_i}(\mathbb{F})$, $i = 1, \dots, k$;
2. если $i, j \in J_s$, то $A_{ii} = A_{jj}$ для всех $A \in \mathcal{A}$;
3. если $i \in J_r$, $j \in J_s$ и $r \neq s$, то $\{(A_{ii}, A_{jj}) : A \in \mathcal{A}\} = M_{n_i}(\mathbb{F}) \oplus M_{n_j}(\mathbb{F})$;
4. если $i \in J_s$, то существует такая матрица $A \in \mathcal{A}$, что $A_{ii} = E$ и $A_{jj} = 0$ для всех $j \notin J_s$.

Доказательство. Если $\mathcal{A}$— неприводимая подалгебра, то по теореме Бернсайда 2.7 $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{F})$ и утверждение верно для $k = 1$ и $n_1 = n$.

Пусть у алгебры $\mathcal{A}$ есть ненулевые собственные инвариантные подпространств. Рассмотрим всевозможные цепочки вложенных подпространств вида $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = \mathbb{F}^n$, где все V_i инвариантны относительно алгебры $\mathcal{A}$. Согласно предложению 1.6 $m \leqslant n$ (начали нумерацию с 0), поэтому можно выбрать цепочку максимальной длины. Пусть $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = \mathbb{F}^n$ такова, что её длина максимальна. В конечномерном пространстве у любого подпространства есть дополнение, т.е. для каждого $i = 1, \dots, m$ существует подпространство $W_i \subseteq V_i$ такое, что $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$. Тогда $V = V_m = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$. Ввиду инвариантности всех пространств V_i относительно $\mathcal{A}$ и определения их дополннений W_i, в базисе пространства $\mathbb{F}^n$, являющегося объединением базисов пространств W_i, все матрицы из алгебры $\mathcal{A}$ имеют блочно-верхнетреугольный вид. Пусть также $n_i = \dim W_i$.

Для каждого индекса $i = 1, \dots, m$ определён линейный оператор проецирования $\mathbb{F}^n$ на W_i параллельно $\bigoplus\limits_{j \neq i} W_j$, пусть $P_i \in M_n(\mathbb{F})$ его матрица в выбранном базисе. Имеем $P_i = \operatorname{diag}(0, \dots, 0, E, 0, \dots, 0)$ и $P_1 + \dots + P_m = E$. Рассмотрим далее подалгебру $\mathcal{A}_i = \{P_i A|_{W_i} | A \in \mathcal{A}\} \subseteq M_{n_i}(\mathbb{F})$, т.е. $\mathcal{A}_i$ — ограничение алгебры $\mathcal{A}$ на подпространство

W_i. Такое ограничение будет алгеброй, поскольку V_{i-1} и V_i инварианты относительно $\mathcal{A}$.

Докажем утверждение 1. Алгебра $\mathcal{A}_i$ является неприводимой. Действительно, если бы имелось собственное ненулевое инвариантное подпространство $U_i \subset W_i$ для $\mathcal{A}_i$, то $V_{i-1} \oplus U_i$ было бы инвариантным подпространством для алгебры $\mathcal{A}$, лежащим строго между V_{i-1} и V_i, что противоречит максимальности длины цепочки $V_0 = \{0\} \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = \mathbb{F}^n$. Тогда по теореме Бернсайда 2.7 $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$.

Для доказательства утверждений 2–4 будем рассматривать пары алгебр $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$ при $i \neq j$. Обозначим $A_{ii} = P_i A|_{W_i}$. Скажем, что алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ *независимы*, если в алгебре $\mathcal{A}$ есть такая матрица A, что $A_{ii} = E$, а $A_{jj} = O$. Это условие симметрично, т.к. если $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ независимы, то $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_i$ также независимы (с матрицей $E - A \in \mathcal{A}$). Иначе, назовём алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ *связанными*.

Пусть алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ связанные. Покажем, что в этом случае матрицы A_{ii} и A_{jj} одновременно нулевые или ненулевые. Допустим найдется матрица $A \in \mathcal{A}$ такая, что $A_{ii} \neq O$, но $A_{jj} = O$. Рассмотрим множество всех таких матриц $I = \{A_{ii} | A \in \mathcal{A} \text{ и } A_{jj} = O\}$. Заметим, что I является линейным подпространством и замкнуто относительно умножения на матрицы из $\mathcal{A}_i$ с любой стороны, т.е. является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$. Поскольку $I \neq 0$, то $I = M_{n_i}(\mathbb{F})$. Тогда I содержит единичную матрицу, а в этом случае алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ будут независимыми. Противоречие.

Пусть $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ связанные, и $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$ связанные. Предположим, что $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_k$ независимые. Тогда есть матрица $A \in \mathcal{A}$ такая, что $A_{ii} = E$, а $A_{kk} = O$. В силу связанности $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ имеем $A_{jj} \neq O$, противоречие с доказанным выше для связанных алгебр $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_k$.

Тогда множества $\{J_s\}$ составляем таким образом, что i и j попадают в одно множество J_l, если и только если $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ связанные — в качестве J_1 берём все индексы алгебр, связанных с $\mathcal{A}_1$, если J_1 не покрывает все множество индексов, повторяем процесс для какого-то $i_2 \notin J_1$ и т.д.

Утверждение 4 получается из определения независимых алгебр: при $i \in J_s$ умножаем матрицы с E в i-ом блоке и O в j-ом блоке по всем $j \notin J_s$. Также из этого определения следует утверждение 2: множество пар $(A_{ii}, A_{jj}) \subseteq M_{n_i}(\mathbb{F}) \oplus M_{n_j}(\mathbb{F})$ и из условия независимости содержит пары (E, O) и (O, E), далее применяем утверждение 1 и свойство замкнутости алгебры относительно умножения на ее элементы.

Определим отображение $\varphi : \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$ правилом $\varphi(A_{ii}) = A_{jj}$. Докажем, что отображение φ задано корректно. Действительно, пусть $A \neq B \in \mathcal{A}$, $A_{ii} = B_{ii}$. Тогда $(A - B)_{ii} = O$. И по доказанному свойству $(A - B)_{jj} = O$ и $A_{jj} = B_{jj}$. Это же рассуждение доказывает инъективность отображения φ. По построению видно, что φявляется сюръективным гомоморфизмом алгебр, а значит, и изоморфизмом. Изоморфизм алгебр влечёт равенство их размерностей, а поскольку $\mathcal{A}_i = M_{n_i}(\mathbb{F})$ и $\mathcal{A}_j = M_{n_j}(\mathbb{F})$, то $n_i = n_j$. Таким образом, алгебры $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ можно отождествить, при этом φ будет автоморфизмом матричной алгебры $M_{n_i}(\mathbb{F})$. По теореме 2.11 тогда найдётся обратимя матрица $S \in M_{n_i}(\mathbb{F})$, что $A_{ii} = S^{-1}A_{jj}S$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

Фиксируем множество J_s. Пусть i_s — его минимальный элемент. Тогда пусть $j \in J_s$, $j \neq i_s$. Пусть S определённая выше матрица, соответсвующая индексам i_s и j. Тогда достроим её до обратимой матрицы $T \in M_n(\mathbb{F})$: $T = \operatorname{diag}(E, E, \ldots, S, E \ldots, E)$, S расположена на j-ом месте. Тогда в алгебре $T^{-1}\mathcal{A}T$ все матрицы останутся блочно-треугольные и при этом $A_{i_s,i_s} = A_{jj}$. Далее берём композицию таких T по всем $j \in J_s$, $j \neq i_s$. Получаем утверждение 3. $\square$

Следствие 2.13. Если $\mathcal{A}$ — собственная подалгебра алгебры $M_n(\mathbb{F})$, то $\dim \mathcal{A} \leqslant n^2 - n + 1$.

Доказательство. Если в блочном представлении алгебры $\mathcal{A}$ 3 и более диагональных блока, то подалгебра с двумя блоками $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ является собственной подалгеброй в $M_{n_1+n_2}(\mathbb{F})$, поэтому её размерность не максимальная. Остаётся случай двублочной алгебры.

В случае двух блоков для достижения максимума размерности нужно минимизировать выражение $k(n-k)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Минимум достигается при $k = 1$. $\square$

Задачи к лекции 1.

Задача 1. Докажите, что ненулевой двусторонний идеал матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ является неприводимой подалгеброй (здесь наличие единицы в подалгебре не предполагаем).

Задача 2. Приведите пример собственной ненулевой неприводимой подалгебры в а) $M_2(\mathbb{R})$, б) $M_4(\mathbb{R})$.

Задача 3. Покажите, что в алгебре $M_3(\mathbb{C})$ есть подалгебры всех размерностей от 1 до 7.

Задача 4. Покажите, что в алгебре $M_4(\mathbb{C})$ есть подалгебры всех размерностей от 1 до 13.

Задача 5. Есть ли в алгебре $M_5(\mathbb{C})$ подалгебра, содержащая единичную матрицу, размерности 20?

Задача 6. Назовём матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$ *полумагической*, если есть такое число $S = S(A) \in \mathbb{C}$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = S(A)$ для всех $j = 1, \ldots, n$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = S(A)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ (все строчные и столбцовы суммы элементов матрицы равны между собой). Проверьте, что множество полумагических матриц является подалгеброй алгебры $M_n(\mathbb{C})$ и определите её блочный вид в смысле теоремы 2.12.

3 Треугольные матричные подалгебры. Одновременная триангулизуемость семейств матриц и порождённых ими алгебр. Теорема МакКоя (критерий триангулизуемости).

Подалгебру всех верхнетреугольных матриц в $M_n(\mathbb{F})$ обозначим за $T_n(\mathbb{F})$.

Определение 3.1. Множество матриц $\{A_i | i \in I\} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ называется *триангулизуемым*, если существует обратимая матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $C^{-1}A_iC \in T_n(\mathbb{F})$ для всех $i \in I$. Эквивалентным образом говорят, что матрицы $A_i \in M_n(\mathbb{F})$, $i \in I$, *одновременно триангулизуемы*, если триангулизуемо множество $\{A_i | i \in I\}$.

Рассмотрим линейное пространство V над полем $\mathbb{F}$ и его подпространство N.

Определение 3.2. *Факторпространством* V/N называется факторгруппа абелевой группы V по подгруппе N, т.е. множество смежных классов $[x] = x + N$ с операцией сложения и операцией умножения на число, заданной правилом: $\lambda[x] = [\lambda x]$.

Пусть на пространстве V задан линейный оператор A и подпространство N инвариантно относительно A. Тогда ему можно сопоставить линейный оператор $\tilde{A}$ на факторпространстве V/N, полагая $\tilde{A}[x] = [Ax]$ (определение корректно в силу инвариантности N). Для краткости назовём $\tilde{A}$ фактором оператора A.

Определение 3.3. Рассмотрим семейство линейных операторов $\mathcal{B} \subset \mathrm{Ł}(V)$. Пусть $N \subset M \subseteq V$ — подпространства инвариантные относительно $\mathcal{B}$. *Семейством факторов семейства* $\mathcal{B}$ *относительно* $\{M, N\}$ называется множество всех факторов $\tilde{B}$ на факторпространстве M/N. Будем говорить, что некоторое свойство *наследуется факторами*, если любое семейство факторов семейства, обладающего данным свойством, также им обладает.

Пример такого свойства: коммутативность.

Лемма 3.4 (Лемма о триангулизуемости)**.** Пусть P – набор свойств, каждое из которых наследуется факторами. Пусть $\dim V \geqslant 2$. Если любое семейство операторов на V, обладающее свойствами P, приводимо (обладает собственным ненулевым инвариантным подпространством), то любое семейство операторов на V, обладающее свойствами P, триангулизуемо.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольное семейство операторов, обладающее свойствами P. Выберем цепочку инвариантных подпространств $M_0 = \{0\} \subset M_1 \subset \ldots \subset M_m = V$ относительно $\mathcal{B}$ максимальной длины (см. предложение 1.6 и доказательство теоремы 2.12).

Допустим, что для некоторого k $\dim M_k/M_{k-1} > 1$. Тогда по предположению семейство факторов семейства $\mathcal{B}$ относительно $\{M_k, M_{k-1}\}$ обладает общим инвариантным подпространством L. Но в этом случае множество $\{x \in M_k | [x] \in L\}$ будет инвариантным подпространством относительно $\mathcal{B}$, лежащим строго между M_{k-1} и M_k. Противоречие с максимальностью цепочки.

Тогда как в доказательстве теоремы 2.12, рассмотрим дополнения подпространств M_{k-1} до M_k, их размерности равны 1, а значит в блочнотрегольном виде матриц все блоки будут иметь размер 1, т.е. матрицы будут треугольными. $\square$

Теорема 3.5. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Любое семейство коммутирующих операторов триангулизуемо.

Доказательство. Воспользуемся леммой о триангулизуемости 3.4. Свойство коммутативности наследуется факторами, поэтому достаточно проверить, что у коммутативного семейства операторов на пространстве размерности большей 1 есть нетривиальное инвариантное подпространство.

Пусть $\mathcal{B}$ — семейство коммутирующих операторов на пространстве V. Если все линейные операторы скалярные, то относительно них инвариантно любое подпространство. Пусть теперь $B \in \mathcal{B}$ — нескалярный. В силу алгебраической замкнутости поля у B есть собственное число λ и собственное подпространство $M \subset V$. Тогда для любых $C \in \mathcal{B}$ и $x \in M$, имеем $BCx = CBx = \lambda Cx$, $Cx \in M$, M инвариантно относительно $\mathcal{B}$. $\square$

Через $\sigma(A)$ обозначим спектр = множество всех собственных значений матрицы (оператора) A.

Поскольку у любой трегольной матрицы собственными числами являются диагональные элементы, а диагональными элементами суммы(произведения) треугольных матриц являются суммы(произведения) диагональных элементов исходных матриц, то для триангулизуемого семейства $\{A_1, \ldots, A_k\}$ и многочлена $p(x_1, \ldots, x_k)$ от некоммутирующих переменных верно, что

$$\sigma(p(A_1, \ldots, A_k)) \subset p(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_k)), \tag{1}$$

где $p(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_k))$ обозначает множество всех значений $p(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $\lambda_j \in \sigma(A_j)$.

Определение 3.6. *Внешнее добавление единицы*: если $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей $1_\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_0$ — подпространство в $\mathcal{A}$, замкнутое относительно умножения, но $1_\mathcal{A} \notin \mathcal{A}_0$ ($\mathcal{A}_0$ — подалгебра без единицы), то $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \oplus \langle 1_\mathcal{A} \rangle$ с естественным умножением $(A + \alpha 1_\mathcal{A})(B + \beta 1_\mathcal{A}) = AB + \alpha B + \beta A + \alpha\beta 1_\mathcal{A}$ для $A, B \in \mathcal{A}_0$ будет подалгеброй с единицей, содержащей в себе алгебру $\mathcal{A}_0$ и $\dim \mathcal{A}_1 = \dim \mathcal{A}_0 + 1$.

Теорема 3.7. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Любая подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$, состоящая из нильпотентных операторов (это алгебра без единицы), триангулизуема.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ алгебра, в которой все матрицы нильпотентны. Пусть $N \subset M$ — инвариантные пространства относительно $\mathcal{A}$. Если $A \in \mathcal{A}$ и $A^k = 0$, то $\tilde{A}^k = 0$ и семейство факторов $\mathcal{A}$ относительно M/N тоже состоит из нильпотентных матриц.

В алгебре $\mathcal{A}_1$ с добаленной единицей все матрицы будут вида "нильпотентная плюс скалярная". Заметим, что на пространстве размерности хотя бы 2 не все матрицы имеют такой вид (например, E_{11} не такая), поэтому по теореме Бернсайда алгебра $\mathcal{A}_1$ будет приводима, и её инвариантное пространство будет инвариантным относительно $\mathcal{A}$. Следовательно, все факторалгебры алгебры $\mathcal{A}$ на факторпространствах размерности 2 и выше — приводимы и применима лемма о триангулизуемости. $\square$

Теорема 3.8. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Подалгебра $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ триангулизуема тогда и только тогда, когда все матрицы-коммутаторы $AB - BA$, $A, B \in \mathcal{A}$ нильпотентны.

Доказательство. "$\Rightarrow$" Пусть $\mathcal{A}$ — триангулизуема и $A, B \in \mathcal{A}$. Тогда согласно соотношению (1) собственные числа матрицы $AB - BA$ имеют вид $\alpha\beta - \beta\alpha$, $\alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)$. В поле $\mathbb{F}$ $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$, значит, $\sigma(AB - BA) = \{0\}$ и матрица $AB - BA$ нильпотентна.

"$\Leftarrow$" Если $n \geqslant 2$, то в алгебре $M_n(\mathbb{F})$ есть матрицы, коммутаторы которых ненильпотентны. Например, для $n = 2$ можно взять $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $(AB - BA)^2 = -E$. Для $n \geqslant 3$ дополняем рассмотренные матрицы нулями.

Свойство, что коммутаторы всех матриц нулевые, наследуется факторами. Поэтому, все факторалгебры алгебры $\mathcal{A}$ на факторпространствах размерности 2 и выше должны быть собственными подалгебрами, они приводимы по теореме Бернсайда и применима лемма о триангулизуемости. $\square$

Определение 3.9. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *конечнопорожденной*, если все её элементы могут быть представлены в виде конечных линейных комбинаций (с коэффициентами из $\mathbb{F}$) конечных произведений некоторого конечного множества её элементов, называемого *системой порождающих*. Легко видеть, что любая конечномерная алгебра порождается своим базисом, т.е. является конечнопорожденной.

Теорема 3.10 (теорема Маккоя)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда матрица $p(A, B)(AB - BA)$ нильпотентна для любого многочлена $p(x, y)$ от некоммутирующих переменных.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ — подалгебра, порождённая матрицами A, B

"$\Rightarrow$" Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулизуемы. Тогда согласно соотношению (1) собственные числа матрицы $p(A, B)(AB - BA)$ имеют вид $p(\alpha, \beta)(\alpha\beta -$

$\beta\alpha)$, $\alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)$. В поле $\mathbb{F}$ $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$, значит, $\sigma(p(A,B)(AB - BA)) = \{0\}$ и матрица $p(A,B)(AB - BA)$ нильпотентна.

“$\Leftarrow$” По лемме о триангулизуемости достаточно проверить, что при $n \geqslant 2$ алгебра $\mathcal{A}$ является приводимой. Если $AB = BA$, то утверждение следует из доказательства теоремы 3.5. Пусть $AB - BA \neq O$. Выберем такой вектор $x \in \mathbb{F}^n$, что $(AB - BA)x \neq 0$. Для ненулевого вектора $(AB - BA)x$ всегда найдётся матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $C(AB - BA)x = x$. Если бы алгебра $\mathcal{A}$ была неприводима, то по теореме Бернсайда $A = M_n(\mathbb{F})$ и $C \in \mathcal{A}$. Но с другой стороны, по построению элементы алгебры $\mathcal{A}$ представляются как линейные комбинации произведений матриц A, B, т.е. $C = p(A,B)$ для некоторого многочлена от некоммутирующих переменных. Из условия $p(A,B)(AB - BA)x = x$ тогда следует, что матрица $p(A,B)(AB - BA)$ ненильпотентна. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Следствие 3.11. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Если $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и $AB = O$, то матрицы A и B одновременно триангулизуемы.

Доказательство. Условие $AB = O$ влечёт $(p(A,B)(AB - BA))^2 = O$. □

Аналогичный критерий справедлив и для произвольного семейства матриц.

Теорема 3.12. Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто. Множество $\mathcal{A} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ триангулизуемо тогда и только тогда, когда матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})$ нильпотентна для любых значений индекса $m \in \mathbb{Z}_+$ и матриц $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}} \in \mathcal{A}$.

Доказательство. “$\Rightarrow$” Пусть семейство $\mathcal{A}$ триангулизуемо. Тогда согласно соотношению (1) $\sigma(A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})) = \{0\}$ и матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(A_{i_{m+1}}A_{i_{m+2}} - A_{i_{m+2}}A_{i_{m+1}})$ нильпотентна.

“$\Leftarrow$” По лемме о триангулизуемости достаточно проверить, что при $n \geqslant 2$ множество $\mathcal{A}$ является приводимым. Для коммутативного семейства утверждение следует из доказательства теоремы 3.5. Пусть теперь в $\mathcal{A}$ есть некоммутирующие матрицы A и B. По условию для любых значений индекса $m \in \mathbb{Z}_+$ и матриц $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}, A_{i_{m+1}}, A_{i_{m+2}} \in \mathcal{A}$ матрица $A_{i_1} \cdots A_{i_m}(AB - BA)$ нильпотентна, в частности, является матрицей с нулевым следом. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B}$, порождённую семейством $\mathcal{A}$. Поскольку след является линейной функцией, то матрица $C(AB - BA)$ будет с нулевым следом для всякой матрицы $C \in \mathcal{B}$. Отсюда по теореме Бернсайда получаем, что $\mathcal{B}$ приводима, поскольку в полной матричной алгебре можно найти такую матрицу D, что $\operatorname{tr}(D(AB - BA)) \neq 0$. □

Дополнение к лекции 2:

Теорема 3.13 (теорема Лаффи)**.** Пусть поле $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнуто и $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Если $\operatorname{rk}(AB - BA) = 1$, то A и B одновременно триангулизуемы.

Доказательство. По лемме о триангулизуемости достаточно показать наличие общего инвариантного подпространства для A и B при $n \geqslant 2$.

Возьмём собственное число $\lambda \in \sigma(B)$. Ядро и образ $B-\lambda E$ ненулевые инвариантные подпространства для B. Покажем, что по крайней мере одно из них инвариантно относительно A.

По условию образ $AB-BA$ имеет размерность 1, значит, порождается некоторым вектором $y \in \mathbb{F}^n$.

Пусть $\ker(B-\lambda E)$ не инвариантно относительно A. Это означает, что найдётся такой вектор $x \in \mathbb{F}^n$, что $(B-\lambda E)x = 0$, а $(B-\lambda E)Ax \neq 0$. Имеем

$$A(B-\lambda E)x - (B-\lambda E)Ax = (AB-BA)x = \beta y \neq 0.$$

Отсюда $(B-\lambda E)Ax = \gamma y \neq 0$ и y принадлежит образу $(B-\lambda E)$. Тогда для произвольного вектора $z \in \mathbb{F}^n$ получаем

$$A(B-\lambda E)z = (B-\lambda E)Az + \delta y,$$

откуда любой вектор $A(B-\lambda E)z$ попадает в образ $B-\lambda E$ и образ $B-\lambda E$ инвариантен относительно A. $\square$

Задачи к лекции 2.

Задача 1. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Покажите, что подалгебра $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$ триангулизуема тогда и только тогда, когда любая пара матриц из $\mathcal{A}$ триангулизуема.

Задача 2. К доказательству теоремы 3.12: поясните, почему для ненулевой матрицы C с нулевым следом всегда найдется такая матрица $D \in M_n(\mathbb{F})$, что $\mathrm{tr}(DC) \neq 0$.

Задача 3. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $n \geqslant 2$ и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Найдите критерий того, что матрицы A и A^T одновременно триангулизуемы.

Задача 4. Докажите следующее уточнение теоремы Маккоя 3.10: Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда матрица $w(A,B)(AB-BA)$ нильпотентна для любого **одночлена** $w(x,y)$ от некоммутирующих переменных.

Задача 5. Проверьте, является ли триангулизуемой пара матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, $A \in M_n(\mathbb{F})$ треугольная матрица и пара матриц A, B триангулизуема. Верно ли, что можно подобрать преобразование, приводящее матрицы к треугольному виду, так, чтобы матрица A осталась неизменной?

4 Централизатор матрицы, его размерность. Теорема о втором централизаторе.

Определение 4.1. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Если $AB = BA$, то говорят, что матрицы A и B *перестановочны.*

Определение 4.2. Пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$. Множество всех матриц, перестановочных с A, называют *централизатором* матрицы A. Обозначим его $\mathcal{C}(A)$.

Аналогично, централизатор $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ подмножества $\mathcal{X} \subseteq M_n(\mathbb{F})$ — это пересечение централизаторов всех элементов множества $\mathcal{X}$, т.е. матрицы, перестановочные со всеми матрицами из $\mathcal{X}$.

Замечание 4.3. Заметим, что для любых матриц $B, C \in \mathcal{C}(A)$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ верно, что

$$A \cdot BC = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = BC \cdot A,$$
$$(\alpha B + \beta C)A = A(\alpha B + \beta C),$$

централизатор замкнут относительно линейных комбинаций и произведений, т.е. является подалгеброй алгебры матриц. При этом любая матрица A перестановочна с собой и единичной матрицей, следовательно, $\mathbb{F}[A] \subseteq \mathcal{C}(A)$.

Для размерности централизатора отсюда следует оценка, что $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant \deg \mu_A(t)$ ($\mu_A(t)$ — минимальный многочлен матрицы A). Далее мы покажем, что эту оценку можно улучшить до $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$ и опишем матрицы, ддля которых выполнено равенство $\dim \mathcal{C}(A) = n$.

Также если $AB = BA$, то $C^{-1}ACC^{-1}BC = C^{-1}ABC = C^{-1}BAC = C^{-1}BCC^{-1}AC$, и централизаторы подобных матриц тоже сопряжены той же матрицей C. Соответсвенно, задачу вычисления размерности достаточно решить для одной из матриц, подобных данной, выберем для этого жорданову матрицу.

Обозначение 4.4. Через $M_{k,l}(\mathbb{F})$ обозначим пространство прямоугольных $k \times l$ матриц над полем $\mathbb{F}$. Пусть $m = \min\{k, l\}$.

При $k < l$. Для чисел $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{F}$ положим

$$T(y_1, \dots, y_m) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ 0 & 0 & 0 & y_1 & \dots & y_{m-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, при $k \geqslant l$ для чисел $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{F}$ положим

$$T(y_1, \ldots, y_m) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ 0 & y_1 & \ddots & y_{m-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & & y_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложение 4.5. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, $A \in M_n(\mathbb{F})$ жорданова матрица вида $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, где $A_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ — жорданова клетка (числа λ_i могут совпадать). Рассмотрим матрицу $X \in \mathcal{C}(A)$. Разобьём X на m^2 блоков X_{kl} размеров $n_k \times n_l$ в соответствии с блочным разбиением A. Тогда
1. $X_{rr} = T(y_{r,r;1}, \ldots, y_{r,r;n_r})$;
2. если $\lambda_r = \lambda_s$, то либо $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \ldots, y_{r,s;n_r})$ и $X_{sr} = T(y_{s,r;1}, \ldots, y_{s,r;n_r})$, либо $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \ldots, y_{r,s;n_s})$ и $X_{sr} = T(y_{s,r;1}, \ldots, y_{s,r;n_s})$ в зависимости от соотношения n_r и n_s;
2. если $\lambda_r \neq \lambda_s$, то $X_{rs} = O$ и $X_{rs} = O$.

Доказательство. Из условия $AX = XA$ получаем уравнения на юлоки:

$$A_r X_{rs} = X_{rs} A_s$$

for all $r, s \in \{1, \ldots, m\}$.

Для фиксированных $r, s \in \{1, \ldots, m\}$ матрица X_{rs} определяется одним уравнением

$$A_r X_{rs} = X_{rs} A_s. \tag{2}$$

Упростим обозначения: $(X_{rs})_{ij} = y_{ij}$, $i = 1, \ldots, n_r, j = 1, \ldots, n_s$.

Если расписать уравнение (2) поэлементно, получим

$$\lambda_r y_{ij} + y_{i+1,j} = \lambda_s y_{ij} + y_{i,j-1}, \text{ если } i \neq n_r, j \neq 1, \tag{3}$$

$$\lambda_r y_{n_r,j} = \lambda_s y_{n_r,j} + y_{n_r,j-1}, \text{ если } j \neq 1, \tag{4}$$

$$\lambda_r y_{i,1} + y_{i+1,1} = \lambda_s y_{i,1}, \text{ если } i \neq n_r, \tag{5}$$

$$\lambda_r y_{n_r,1} = \lambda_s y_{n_r,1}. \tag{6}$$

1. $\mathbf{s = r}$.
Поскольку если $AX = XA$, то $(A - \lambda_r E)X = X(A - \lambda_r E)$, поэтому можно считать, что $\lambda_r = 0$. Последовательно используя (4), получим, что $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r,2} = 0, \ldots, y_{n_r,n_r-1} =$

0. Последовательно используя (5), далее получаем, что $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r-1,1} = 0, \ldots, y_{2,1} = 0$. В конце используя (3), находим, что

$$y_{i+1,j} = y_{i,j-1},$$

следовательно, X_{rr} — верхнетреугольная матрицы вида, указанного в пункте 1.

2. Пусть $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ и $\lambda_r = \lambda_s$. Последовательно применяя (4), находим $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r,2} = 0, \ldots, y_{n_r,n_r-1} = 0$. Затем последовательно применяя (5), находим $y_{n_r,1} = 0$, $y_{n_r-1,1} = 0, \ldots, y_{2,1} = 0$. В заключении применяем (3), имеем

$$y_{i+1,j} = y_{i,j-1},$$

откуда X_{rs} является прямоугольной верхнетреугольной матрицей $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \ldots, y_{r,s;n_r})$, либо $X_{rs} = T(y_{r,s;1}, \ldots, y_{r,s;n_s})$ в зависимости от размера. Меняя r, s местами получаем аналогичный вывод для X_{sr}.

3. Пусть $\mathbf{r} \neq \mathbf{s}$ и $\lambda_r \neq \omega\lambda_s$. Тогда из уравнения (6) выводим $(\lambda_r - \lambda_s)y_{n_r,1} = 0$, значит, $y_{n_r,1} = 0$. Затем последовательно применяя (4), получаем $y_{n_r,2} = 0$, $y_{n_r,3} = 0, \ldots, y_{n_r,n_r} = 0$. Далее, используя (5), получаем $y_{n_r-1,1} = 0$, $y_{n_r-2,1} = 0, \ldots, y_{1,1} = 0$. И в конце с помощью (3) начиная с $n_r - 1$-ой строки и 2-го столбца, окончательно делаем вывод

$$X_{rs} = 0.$$

□

Определение 4.6. Матрица $A \in M_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если её минимальный многочлен совпадает с характеристическим. В терминах жордановой нормальной формы это условие означает, что каждому собственному числу соответствует одна жорданова клетка.

Следствие 4.7. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$, более того, равенство $\dim \mathcal{C}(A) = n$ выполнено тогда и только тогда, когда матрица A — циклическая.

Доказательство. Считаем размерность централизатора в предположении, что матрица A приведена к ЖНФ. Посчитаем размерность пространства D, порождённого блочно-диагональными матрицами из централизатора. Поскольку коэффициенты диагональных блоков X_{rr} матрицы X в предложении 4.5 находятся независимо для блоков, то $\dim D = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim \langle T(y_{r,r;1}, \ldots, y_{r,r;n_r}) | y_{r,r;1}, \ldots, y_{r,r;n_r} \in \mathbb{F} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} n_r = n$. Таким образом, поскольку $D \subseteq \mathcal{C}(A)$, то $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$. Последнее неравенство обращается в равенство, когда все внедиагональные блоки нулевые. Согласно пунктам 2 и 3 предложения 4.5 это выполнено тогда и только тогда, когда у разных жордановых клеток собственные числа различны, т.е. как раз для циклической матрицы A. □

Следствие 4.8. Циклические матрицы — это в точности такие матрицы, для которых $\mathcal{C}(A) = \mathbb{F}[A]$.

Доказательство. Согласно предыдущему следствию, $\dim \mathcal{C}(A) \geqslant n$. С другой стороны, по теореме Гамильтона–Кэли $\dim \mathbb{F}[A] = \deg \mu_A(t) \leqslant n$, поэтому совпадение этих алгебр возможно если и только если, $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathbb{F}[A] = n$. Снова применяем следствие 4.7. □

Следствие 4.9. $\mathcal{C}(A) = M_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $A = \lambda E$.

Доказательство. Согласно предложению 4.5 если у матрицы A есть хотя бы 2 различных собственных числа λ_r и λ_s, то в централизаторе у всех матриц будут нулевые блоки X_{rs}, поэтому он не может быть пространством всех матриц.

Пусть у A есть ровно одно собственное число λ. Если $A \neq \lambda E$, то в ЖНФ A есть клетка размера не меньше 2. Пусть клетки в ЖНФ A упорядочены по убыванию размеров. Тогда $n_1 \geqslant 2$ и $n_1 \geqslant n_2$. Тогда размерность проекции централизатора на блок размера $n_1 + n_2$ будет равна: $n_1 + n_2 + 2n_2 < n_1^2 + n_2 + 2n_1n_2 \leqslant n_1^2 + n_2^2 + 2n_1n_2 = (n_1+n_2)^2$, значит опять размерность меньше размерности пространства всех матриц. □

Далее рассмотрим последующие централизаторы. Например, двойной централизатор $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ — множество всех матриц, которые коммутируют со всеми матрицами, коммутирующими с A.

В общем случае для любого подмножества $\mathcal{X}$: $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{X}))$, а теорема о двойном централизаторе дает условия когда это включение обращается в равенство. Заметим, что λE коммутируют со всеми матрицами, а степени матрицы A коммутируют с матрицами из централизатора A, поэтому всегда $\mathbb{F}[A] \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$. Поэтому в матричном случае, конечно, не говорят о равенстве $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ и $\{A\}$, но о совпадении $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))$ с $\mathbb{F}[A]$.

Теорема 4.10. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Тогда $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = \mathbb{F}[A]$, т.е. любая матрица C коммутирующая со всеми матрицами, коммутирующими с A, представляется в виде многочлена от A.

Доказательство. Как и в предложении Достаточно доказать теорему в предположении, что $A \in M_n(\mathbb{F})$ — жорданова матрица. Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, где $A_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ — жорданова клетка (числа λ_i могут совпадать). Любую матрицу $X \in M_n(\mathbb{F})$ на m^2 блоков X_{kl} размеров $n_k \times n_l$ в соответствии с блочным разбиением A.

Заметим, что первый централизатор $\mathcal{C}(A)$ содержит диагональные матрицы

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \operatorname{diag}(\alpha_1 E_{n_1}, \ldots, \alpha_m E_{n_m}).$$

Следовательно, $CD(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)C$. Поскольку соотношение выполнено для всех α_i и матрицы $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ являются жордановыми, для каждой пары

$r, s, r \neq s$ применяя предложение 4.5 для $\alpha_r \neq \alpha_s$, заключаем, что C — блочно-диагональная матрица.

Также верно, что $AC = CA$, поэтому диагональные блоки матрицы C имеют вид $C_{rr} = T(c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r})$.

Пусть теперь $X \in \mathcal{C}(A)$ — блочная матрица, определенная в предложении 4.5. Из уравнения $CX = XC$ поблочно получаем

$$C_{rr} X_{rs} = X_{rs} C_{ss}. \tag{7}$$

Если у клеток A_r и A_s собственные числа λ_r и λ_s различны, то $X_{rs} = O$ и это соотношение тривиально. Пусть $\lambda_r = \lambda_s$. Выберем порядок чисел r, s так, чтобы $n_r \leqslant n_s$.

$$\begin{pmatrix} c_{r,1} & c_{r,2} & \ldots & c_{r,n_r} \\ 0 & c_{r,1} & \ldots & c_{r,n_r-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{r,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \ldots & y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \cdots & y_{r,s;n_r} \\ 0 & 0 & 0 & y_{r,s;1} & \cdots & y_{r,s;n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & y_{r,s;1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \ldots & y_{r,s;1} & y_{r,s;2} & \cdots & y_{r,s;n_r} \\ 0 & 0 & 0 & y_{r,s;1} & \cdots & y_{r,s;n_r-1} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & y_{r,s;1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{s,1} & c_{s,2} & \ldots & c_{s,n_s} \\ 0 & c_{s,1} & \ldots & c_{s,n_s-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{s,1} \end{pmatrix}$$

Умножая первую строку на последний столбец получаем уравнение:

$$c_{r,1} y_{r,s;n_r} + c_{r,2} y_{r,s;n_r-2} + \cdots + c_{r,n_r} y_{r,s;1} = c_{s,n_r} y_{r,s;1} + c_{s,n_r-1} y_{r,s;2} + \cdots + c_{s,1} y_{r,s;n_r}.$$

Поскольку это уравнение должно быть выполнено для всех $y_{r,s;1}, y_{r,s;2}, \ldots, y_{r,s;n_r} \in \mathbb{F}$, то подставляя $y_{r,s;n_r-i+1} = 1$, а остальные нули, получаем $c_{r,i} = c_{s,i}$ для всех $i = 1, \ldots, n_r$. Эти соотношения полностью определеяют структуру матрицы C. Осталось показать, что алгебра $\mathbb{F}[A]$ состоит в точности из всех матриц такого вида.

Сперва рассмотрим случай, когда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = \lambda$. Пусть без ограничения общности $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_m$. Россмотрим матрицы $B_j = (A - \lambda E)^j \in \mathbb{F}[A]$, $j = 0, \ldots, n_1 - 1$. Они составляют базис алгебры $\mathbb{F}[A]$, поскольку линейно независимы по построению (диагональ единиц смещается на одну позицию вверх на каждом шаге) и их количество совпадает с размерностью $\mathbb{F}[A]$ ($\dim \mathbb{F}[A] = \deg \mu_A(t) = n_1$— максимальный размер жордановой клетки). Тогда

$$C = \sum_{j=0}^{n_1-1} c_{1,j} B_j \in \mathbb{F}[A].$$

Пусть теперь у матрицы A есть $k \geqslant 2$ собственных чисел. Расположим жордановы клетки A таким образом, чтобы все одинаковые собственные числа стояли рядом, $A = J_1 \oplus \ldots \oplus J_k$, в жордановой матрице J_i собраны все клетки с λ_k. Тогда $\mu_A(t) = \prod_{i=1}^{k} \mu_{J_i}(t)$. Положим $f_l(t) = \prod_{i=1, i\neq l}^{k} \mu_{J_i}(t)$. Тогда $f_l(J_q) = O$ при $q \neq l$ и $f_l(J_l)$ является обратимой матрицей, поскольку среди корней $f_l(t)$ нет λ_l. Тогда у матриц $(A - \lambda_l E)^j f_l(A)$, j проходит значения от 0 до максимального размера жордановой клетки для λ_l без единицы, вне l-го диагонального блока стоят 0, а в l-ом блоке стоит базис алгебры $\mathbb{F}[J_l]$, т.к. $f_l(J_l)$ обратима. Значит утверждение верно и в этом случае.

$\square$

Задачи к лекции 3.

Задача 1. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$ — матрица ранга 1. а) Найдите явный вид централизатора A в жордановой форме. б) Вычислите $\dim \mathcal{C}(A)$.

Задача 2. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. Найдите максимальную размерность централизатора нескалярной матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Задача 3. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Покажите, что $\mathcal{C}(A)$ является коммутативной подалгеброй тогда и только тогда, когда A — циклическая матрица.

Задача 4. Найдите централизатор матрицы $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 5. Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто и $A \in M_n(\mathbb{F})$. Используя теорему о двойном централизаторе найдите а) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)))$, б) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(\mathcal{C}(A))))$.

Задача 6. Найдите, для каких комплексных матриц $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^2)$.