

Программа курса «Структурная теория матриц», осенний семестр 2024/2025 г.

Лектор — доцент, к.ф.-м.н. О. В. Маркова

1. Основные числовые характеристики матричных подалгебр. Теорема Бернсайда о неприводимых матричных алгебрах. Описание автоморфизмов матричной алгебры. Теорема о блочно-треугольной структуре собственных подалгебр алгебры матриц над алгебраическими замкнутыми полями.
2. Треугольные матричные подалгебры. Одновременная триангулируемость семейств матриц и порождённых ими алгебр. Лемма о триангулируемости. Триангулируемость коммутативных и нильпотентных семейств матриц. Теорема МакКоя (критерий триангулируемости пары матриц).
3. Централизатор матрицы, его размерность. Описание централизатора жордановой матрицы. Теорема о втором централизаторе.
4. Коммутативные матричные подалгебры. Теорема Шура (верхняя граница размерности коммутативной алгебры). Построение алгебр максимальной размерности (алгебры Шура).
5. Максимальные по включению коммутативные матричные подалгебры. Теорема Лаффи (нижняя граница размерности максимальной по включению коммутативной алгебры). Построение максимальной по включению коммутативной алгебры размерности, меньшей порядка матриц (алгебры Куртера).
6. Одно- и двупорождённые коммутативные матричные подалгебры. Обобщенная теорема Гамильтона–Кэли (для пары матриц). Теорема Герштенхабера (верхняя граница размерности двупорождённой коммутативной алгебры).
7. Циклические матрицы и порождённые ими алгебры. Описание с точностью до подобия и связь с числом разбиений. Описание двупорождённых коммутативных алгебр максимальной размерности.
8. Возможные обобщения коммутативности. Матрицы, коммутирующие с точностью до множителя. Описание обобщенного централизатора жордановой матрицы. Нормальная форма Дрейзина.
9. Системы порождающих. Неуменьшаемые системы порождающих полной матричной алгебры. Описание неуменьшаемых систем порождающих максимальной мощности в алгебре матриц второго порядка. Лемма о нетриангулируемом подмножестве в неуменьшаемой системе мощности не менее $n + 2$. Теорема об увеличении размера диагонального блока.
10. Неуменьшаемые системы порождающих полной матричной алгебры, их максимальная мощность (теорема о возможном понижении порядка матричной алгебры с использованием тензорного произведения).
11. Неуменьшаемые системы порождающих полной матричной алгебры, их максимальная мощность (доказательство основного результата в случае матриц порядков 3 и 4).
12. Неуменьшаемые системы порождающих полной матричной алгебры, их максимальная мощность (доказательство основной теоремы).
13. Системы порождающих, состоящие из матриц с квадратичными минимальными многочленами, в том числе идемпотентов. Размерность алгебры, порожденной парой матриц с квадратичными минимальными многочленами. Минимальное число идемпотентных порождающих для полной матричной алгебры.

14. Функция длины алгебры. Гипотеза Паза о длине матричной алгебры. Её доказательство для матриц малых порядков. Оценки длины систем порождающих матричной алгебры, содержащих матрицы заданного ранга.
15. Доказательство гипотезы Паза при наличии в системе порождающих циклической матрицы.
16. Длина блочнотреугольных матричных алгебр. Длина коммутативных алгебр. Алгебры, порождённые циклическими матрицами, как коммутативные алгебры максимальной длины.
17. Длина треугольных матричных алгебр. Построение примера, показывающего, что длина подалгебры бывает больше длины алгебры на любое неотрицательное число.