Теория колец

МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва

2023/2024

Версия от 30 апреля 2024г.

1 Ассоциативные кольца. Идеалы. Гомоморфизмы.

Определение 1.1. *Ассоциативное кольцо с единицей* — это множество R с заданными на нём операциями сложения «+» и умножения « $\cdot$ » так, что

1. R — абелева группа по сложению,
2. R — моноид (полугруппа с единицей 1) по умножению,
3. выполнены две аксиомы дистрибутивности:

$$\forall a, b, c \in R\colon\ c(a+b) = ca + cb \ \ \& \ \ (a+b)c = ac + bc.$$

В нашем курсе слово «кольцо» всегда будет означать ассоциативное кольцо с единицей.

Определение 1.2. Пусть подмножество S кольца R содержит его единицу и само является кольцом относительно тех же операций. Тогда S будем называть *подкольцом R*. [1]

Определение 1.3. Элементы a, b кольца R *коммутируют (перестановочны)*, если $ab = ba$. Элемент $z \in R$ называется *центральным*, если он перестановочен с любым элементом кольца R. *Центром* $Z(R)$ кольца называют множество всех его центральных элементов

$$Z(R) = \{z \in R \mid \forall r \in R\colon\ rz = zr\}.$$

Если в кольце R любые два элемента перестановочны, т.е. $Z(R) = R$, то R называют *коммутативным*.

[1] Другими словами, возможно корректное ограничение на S сигнатуры $(+, \cdot, 0, 1)$ исходного кольца.

Определение 1.4. Элемент r кольца R *обратим справа*, если существует *правый обратный* к нему элемент, т.е. такой $s \in R$, что $rs = 1$. Аналогично определяется обратимость слева. *Обратимый* элемент r — это элемент, обратимый и справа, и слева; тогда его левый и правый обратный единственны и совпадают, поэтому в этом случае говорят о *(двустороннем) обратном* r^{-1}.

Доказательство корректности. Если $sr = rt = 1$, то $t = (sr)t = srt = s(rt) = s$. $\square$

Позже будет приведен пример кольца с элементами r, s таких, что $rs = 1 \neq sr$.

Определение 1.5. *Тело* — кольцо с $1 \neq 0$, в котором всякий ненулевой элемент обратим. *Поле* — коммутативное тело.

Пример 1.6.

1. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. В нём обратимы только ± 1.

2. Примеры полей: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_{p^k}$, рациональные функции от нескольких переменных над полем.

3. Пусть в $H = \mathbb{R}^4$ фиксирован произвольный базис $\{1, i, j, k\}$. Введём умножение на элементах базиса: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для всех $a \in \{i, j, k\}$. Продолжим умножение на всё H по линейности; получится *тело кватернионов* $\mathbb{H}$. Это пример тела, не являющегося полем.

4. *Кольцо $n \times n$-матриц* $M_n(R)$ над кольцом R с операциями $(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$, $(A \cdot B)_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}$. Единица кольца — единичная матрица E, для которой $(E)_{ij} = \delta_{ij}$ — символ Кронекера. Отметим, что $M_n(M_k(R)) = M_{nk}(R)$.

Определение 1.7. Построим *кольцо формальных степенных рядов* $R[[t]]$. Рассмотрим множество $\{(r_i)_{i=0}^{\infty} \mid r_i \in R\}$ всех бесконечных последовательностей элементов кольца R и определим операции

$$(r_i)_{i=0}^{\infty} + (s_i)_{i=0}^{\infty} = (r_i + s_i)_{i=0}^{\infty}, \quad (r_i)_{i=0}^{\infty} \cdot (s_i)_{i=0}^{\infty} = \left(\sum_{i=0}^{j} r_i s_{j-i} \right)_{j=0}^{\infty}.$$

В этом случае удобно обозначить $(r_i)_{i=0}^{\infty} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} r_i t^i$. В частности, элементы R коммутируют с t. Подкольцо в $R[[t]]$, состоящее из всех рядов, в которых лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля, называется *кольцом многочленов* от одной переменной $R[t]$.

Замечание 1.8. В алгебре обычно рассматривают суммы только конечного числа слагаемых. В $R[[t]]$ осмысленна запись $(1-t)^{-1} = S = \sum\limits_{i=0}^{\infty} t^i$, поскольку знак суммирования в правой части — это часть определения элемента S. Запись $(1-t)^{-1} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} s_i$, где $s_i = t^i \in R[[t]]$, смысла не имеет.

Определение 1.9. *Прямое произведение* $R \times S$ двух колец R, S — множество пар вида (r, s), в котором сложение и умножение производятся покомпонентно. В общем случае, если $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — произвольное семейство колец, индексированное множеством Λ, то прямое произведение колец этого семейства определяется как множество функций

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda = \left\{ f \colon \Lambda \to \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \mid f(\lambda) \in R_\lambda \right\}$$

с поточечными операциями сложения и умножения. Функцию f часто удобно записывать в виде $f = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} r_\lambda$, где $r_\lambda = f(\lambda)$.

Определение 1.10. *Групповое кольцо* RG группы G — множество формальных сумм $\sum\limits_{g \in G} r_g g$, где лишь конечное число коэффициентов r_g отлично от нуля. Умножение элементов производится в соответствии со структурами кольца и группы. Оно задаётся на произведениях $r_g g \cdot s_h h = r_g s_h g h$ и продолжается на всё RG с сохранением дистрибутивности. Единица кольца — это $1_R 1_G$.

Определение 1.11. Подножество $I \subseteq R$ называется *правым идеалом* кольца R, если

1. I — подгруппа в R по сложению,

2. I замкнуто относительно умножения на элементы R справа:

$$\forall u \in I,\ \forall r \in R\colon\ ur \in I.$$

Аналогично определяется *левый идеал*. *Двусторонний идеал* I, или просто *идеал*, — это подмножество кольца, которое одновременно является и левым, и правым идеалом. Обозначение — $I \lhd R$.

Определение 1.12. Односторонний или двусторонний идеал I назовём *нетривиальным*, если $I \neq \{0\}, R$. Будем говорить, что I *собственный*, если $I \neq R$.

Обратим внимание на простой, но полезный факт: односторонний или двусторонний идеал собственный тогда и только тогда, когда он не содержит 1.

Правый идеал собственный тогда и только тогда, когда он не содержит обратимых справа элементов кольца. Действительно, если элемент u правого идеала I обладает правым обратным $r \in R$, то $1 = ur \in I$.

Пример 1.13.

1. Подмножество матриц с нулевой i-й строкой является правым идеалом в $M_n(R)$, но не левым.

2. Подмножество матриц с нулевым j-м столбцом является левым идеалом в $M_n(R)$, но не правым.

3. В коммутативном кольце любой односторонний идеал является двусторонним.

4. В теле есть только тривиальные односторонние и двусторонние идеалы.

5. В прямом произведении колец $\prod_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$ определен идеал, состоящий из всех функций, которые отличны от нуля лишь в конечном числе точек. Этот идеал называют *прямой суммой колец* $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R_\lambda$, он собственный тогда и только тогда, когда множество Λ бесконечно.

Определение 1.14. Пусть $M \subseteq R$ — некоторое подмножество, не обязательно конечное или счётное. *Правый идеал, порождённый множеством M*, определяется как множество всех возможных правых линейных комбинаций элементов из M с коэффициентами из R:

$$MR = \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i r_i \;\middle|\; m_i \in M,\ r_i \in R,\ n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq R.$$

Левый идеал RM определяется аналогично. *Идеал, порождённый множеством M*, определяется как

$$RMR = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i m_i s_i \;\middle|\; m_i \in M,\ r_i, s_i \in R,\ n \in \mathbb{N} \right\} \lhd R.$$

Если $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$, то для RMR также используется обозначение: $(m_1, \ldots, m_n)$. В случае $M = \{m\}$ будем для краткости опускать фигурные скобки и писать Rm, mR, RmR. Также мы будем считать, что пустое множество $\varnothing$ порождает нулевой идеал (0).

Пример 1.15. Всякий идеал $\mathbb{Z}$ *главный*, то есть может быть порождён одним элементом, а именно наибольшим общим делителем всех своих элементов.

Определение 1.16. Пусть $I \lhd R$ — идеал. Элементы R разбиваются на смежные классы $\{a + I\}$ по аддитивной подгруппе I в R, причём на этих классах корректно определено умножение из R, поскольку при $i, j \in I$ выполнено $(a + i)(b + j) = ab + ib + aj + ij \in ab + I$. Факторгруппа R/I с этой операцией умножения называется *факторкольцом* кольца R по идеалу I.

Пример 1.17. *Кольцо вычетов* $\mathbb{Z}_n$ — факторкольцо $\mathbb{Z}$ по идеалу (n). При простом $|n|$ оно является полем.

Определение 1.18. *Гомоморфизм колец* — отображение $\varphi\colon R \to S$, сохраняющее все кольцевые операции[2], то есть $\varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$, $\varphi(r_1 r_2) = \varphi(r_1)\varphi(r_2)$, $\varphi(0) = 0$ (это следует из первого свойства), $\varphi(1) = 1$.

В случае коммутативного R всякий элемент $r \in R$ корректно определяет гомоморфизм $R[t] \to R$ *вычисления* значения многочлена: $\sum r_i t^i \mapsto \sum r_i r^i$. Для некоммутативного R такие отображения гомоморфизмами обычно не являются.

В теории колец также нужны отображения, которые сохраняют сложение и умножение, но не переводят единицу R в единицу S, например, вложение $M_n(R)$ в $M_{n+1}(R)$, заданное как

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такие отображения можно рассматривать как гомоморфизмы *колец без единицы*[3], алгебраических систем несколько иного типа. Для них вместо структуры моноида по умножению достаточно полугруппы. Всякий идеал является кольцом без единицы. Гомоморфизмы, сохраняющие единицу, называют *унитальными*, а другие — неунитальными. В нашем курсе мы по умолчанию будем считать всякий гомоморфизм унитальным, если не указано иного.

Определение 1.19. *Изоморфизм* $\varphi\colon R \to S$ колец — это биективный гомоморфизм. В этом случае обратное отображение автоматически является гомоморфизмом (прямая проверка). В случае, когда между кольцами R, S существует изоморфизм, пишут $R \cong S$.

Теорема 1.20 (о гомоморфизме)**.** Пусть $\varphi\colon R \to S$ — гомоморфизм колец. Тогда *ядро* $\ker\varphi = \varphi^{-1}(0)$ гомоморфизма φ является идеалом кольца R, а *образ* $\varphi(R)$ — это подкольцо в S, и отображение $\pi\colon \varphi(R) \longrightarrow R/\ker\varphi$, $\varphi(r) \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(r))$, есть изоморфизм.

Теорема 1.21 (о соответствии идеалов)**.** Пусть $\varphi\colon R \to S$ — гомоморфизм колец. Тогда φ осуществляет сохраняющее включения взаимно-однозначное соответствие между множеством правых идеалов R, содержащих $\ker\varphi$, и множеством всех правых идеалов кольца $\varphi(R)$.

[2] С точки зрения универсальной алгебры константы $0, 1$ можно понимать как 0-местные операции.

[3] В англоязычных работах для колец без единицы используется термин «rng», который возник как каламбур из фразы «ring without i (identity)».

Определение 1.22. Кольцо называется *простым*, если в нём ровно два идеала: $\{0\}$ и всё кольцо.

Любое тело является простым кольцом.

Коммутативное кольцо просто тогда и только тогда, когда все его ненулевые элементы обратимы, то есть оно является полем:

если есть необратимый элемент $a \neq 0$, то (a) состоит из необратимых элементов и поэтому собственный.

Теорема 1.23 (идеалы матричного кольца)**.** Если $I \lhd M_n(R)$ — идеал, тогда для некоторого идеала $J \lhd R$ выполнено $I = M_n(J)$.

Доказательство. Докажем, что требуемый идеал совпадает с $J_1 = \{(A)_{11} | A \in I\}$. Умножением на *матричные единицы* можно, оставаясь в I, любой элемент матрицы из I перевести в верхний левый угол: $E_{1i}BE_{j1} = B_{ij}E_{11}$, поэтому $I \subseteq M_n(J_1)$. Наоборот, из матриц вида jE_{11}, $j \in J_1$, можно собрать произвольную матрицу X из $M_n(J_1)$, а именно $X = \sum\limits_{i,j=1}^{n} E_{i1}((X)_{ij}E_{11})E_{1j}$, и поэтому $M_n(J_1) \subseteq I$. $\square$

Следствие 1.24. Кольцо матриц над простым кольцом просто. В частности, матричное кольцо над телом просто.

Отметим, что в матричном кольце над телом нет собственных идеалов, но есть собственные односторонние идеалы при $n > 1$.

Определение 1.25. *Частичный порядок* $\leqslant$ на множестве X — это отношение, которое

1. рефлексивно ($x \leqslant x$),
2. антисимметрично ($x \leqslant y,\ y \leqslant x \Rightarrow x = y$),
3. транзитивно ($x \leqslant y,\ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$).

Определение 1.26. Два элемента $x, y \in X$ называются *сравнимыми*, если выполнено по крайней мере одно из условий: $x \leqslant y$, $y \leqslant x$. В противном случае говорят, что x и y *несравнимые*. *Линейный порядок* — частичный порядок, в котором любые два элемента сравнимы. *Цепь* в частично упорядоченном множестве — это линейно упорядоченное подмножество.

Пример 1.27.

1. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ линейно упорядочено стандартным образом.
2. Множество делителей натурального числа n частично упорядочено отношением делимости.

3. Если S — множество, то семейство всех его подмножеств 2^S частично упорядочено относительно отношения включения.

4. Множество всех правых идеалов кольца частично упорядочено относительно отношения включения. То же можно сказать про левые и двусторонние идеалы.

Определение 1.28. Пусть Y — подмножество частично упорядоченного множества X. Элемент $a \in X$ называется *верхней гранью* Y, если для всех $y \in Y$ выполнено $y \leqslant a$. Если для Y существует хотя бы одна верхняя грань, то Y называют *ограниченным сверху*. Если верхняя грань принадлежит Y, то её называют *наибольшим элементом* множества Y. Двойственным образом определяются нижняя грань, наименьший элемент и ограниченность снизу.

Определение 1.29. Элемент m частично упорядоченного множества X называется *максимальным*, если $\forall x \in X$ верна импликация $(m \leqslant x \Rightarrow m = x)$. Другими словами, все элементы из $X \setminus \{m\}$ либо меньше m, либо не сравнимы с ним. Минимальный элемент определяется двойственным образом.

Любой наибольший элемент является максимальным, обратное в общем случае неверно.

Максимальных элементов может быть несколько или не быть вовсе. Наибольший элемент, если существует, единственен.

Теорема 1.30 (лемма Цорна)**.** Пусть в частично упорядоченном множестве $X \neq \varnothing$ для каждого линейно упорядоченного подмножества существует верхняя грань. Тогда в X есть по крайней мере один максимальный элемент.

Определение 1.31. Частично упорядоченное множество X называется *вполне упорядоченным*, если любое его непустое подмножество содержит наименьший элемент.

Теорема 1.32 (Цермело)**.** Любое множество может быть вполне упорядочено.

В системе аксиом теории множеств Цермело — Френкеля лемма Цорна, аксиома выбора и теорема Цермело попарно эквивалентны между собой.

Определение 1.33. Максимальные элементы в множестве всех собственных правых идеалов называют *максимальными правыми идеалами*. Аналогично определяются максимальные левые и двусторонние идеалы.

Из теоремы о соответствии идеалов следует, что идеал $I \lhd R$ максимален тогда и только тогда, когда R/I — простое кольцо.

Теорема 1.34 (Крулль)**.** Пусть $R \neq \{0\}$. Тогда всякий собственный правый идеал I кольца R лежит в некотором максимальном правом идеале. В частности, максимальные правые идеалы существуют. Аналогичные утверждения верны для левых и двусторонних идеалов.

Доказательство. Пусть S — множество всех собственных правых идеалов кольца R, содержащих I. Мы можем ввести частичный порядок на S как отношение включения. Рассмотрим произвольную цепь $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ элементов S. Положим $J = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$. Покажем, что J — собственный правый идеал, содержащий I, т.е., что $J \in S$.

Если $a, b \in J$, то $a \in C_{\lambda_1}$ и $b \in C_{\lambda_2}$. Без ограничения общности можно считать, что $C_{\lambda_2} \subseteq C_{\lambda_1}$. Поэтому $a - b \in C_{\lambda_1} \subseteq J$. Отсюда J — аддитивная подгруппа R. Кроме того, если $r \in R$, то $ar \in C_{\lambda_1} \subseteq J$. Поэтому J — правый идеал. Т.к. все C_λ собственные, то для всех $\lambda \in \Lambda$ выполнено $1 \notin C_\lambda$, откуда $1 \notin J$. Следовательно J собственный. Кроме того, $I \subseteq C_{\lambda_1} \subseteq J$. Поэтому $J \in S$, и J — веи $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ по построению.

Таким образом, множество S удовлетворяет условиям леммы Цорна, значит, в S имеется по крайней мере один максимальный элемент. $\square$

В нулевом кольце нет максимальных идеалов.

Пример 1.35. Макисмальные идеалы кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ — это в точности идеалы вида $(p) = p\mathbb{Z}$, где p — простое число.

Для колец без единицы теорема неверна, например, максимальных идеалов нет в *кольце с нулевым умножением* (все попарные произведения элементов нулевые), аддитивная группа которого изоморфна $\mathbb{Q}$ (см. предложение 3.5 далее).

Предложение 1.36. Пусть $R \neq \{0\}$. Для элемента $a \in R$ следующие условия эквивалентны:

1. a необратим справа,
2. a лежит в некотором собственном правом идеале,
3. a лежит в некотором максимальном правом идеале.

Доказательство.
1) $\Rightarrow$ 2). Если a необратим справа, то $aR = \{ar \colon r \in R\}$ не содержит 1, а значит, является собственным.
2) $\Rightarrow$ 3). Теорема Крулля.
3) $\Rightarrow$ 1). От противного, если a обратим справа, то 1 попадает в идеал. Это противоречит тому, что максимальный идеал собственный. $\square$

Необратимый элемент некоммутативного кольца не обязан лежать в собственном двустороннем идеале (пример — матричное кольцо над полем).

Задачи к лекции 1.

Задача 1. Докажите теорему о гомоморфизме для колец.

Задача 2. Докажите теорему о соответствии идеалов.

Задача 3. Найдите обратимые элементы в групповом кольце а) $\mathbb{F}_2\mathbb{Z}_2$, б) $\mathbb{F}_2\mathbb{Z}_3$, в) $\mathbb{F}_2\mathbb{Z}_6$.

Задача 4. Найдите обратимые элементы в кольце $R[[t]]$ формальных степенных рядов над коммутативным кольцом R.

Задача 5. Покажите, что в бесконечном кольце множество обратимых элементов может быть как конечно, так и бесконечно. Приведите пример кольца мощности не меньше 3, в котором 1 — единственный обратимый элемент.

Задача 6. Найдите центр кольца матриц $M_n(R)$, $n > 1$, если а) R — поле, б) R — некоммутативное тело, в) R — произвольное кольцо.

Задача 7. Покажите, что если H — подгруппа группы G, то групповое кольцо RH является подкольцом кольца RG.

Задача 8. Найдите центр группового кольца RG. Когда оно является коммутативным?

Задача 9. Опишите идеалы в кольце $\mathbb{F}[[t]]$ формальных степенных рядов над полем.

Задача 10. Пусть $\varphi\colon M_n(R) \to S$ — гомоморфизм. Верно ли, что его образ тоже изоморфен матричному кольцу над некоторым кольцом T?

2 Модули над кольцами.

Определение 2.1. *Правым модулем* $M = M_R$ над кольцом R, или правым R-модулем, называется абелева группа $(M, +)$ с определёнными на ней операциями умножения справа на элементы кольца R, которые удовлетворяют тождествам

$$\forall a, b \in M,\ r, s \in R,\ a(rs) = (ar)s,\ (a+b)r = ar + br,\ a(r+s) = ar + as,\ a \cdot 1 = a.$$

Симметрично определяется левый модуль ${}_RM$.

Пример 2.2. Приведём примеры модулей:

1. Векторное пространство над полем.

2. Всякая абелева группа обладает естественной структурой $\mathbb{Z}$-модуля.

3. Кольцо R может пониматься как правый R_R или левый ${}_RR$ модуль над собой. Такие модули называют *регулярными*.

4. Любой правый (левый) идеал кольца является правым (левым) модулем.
5. Представления группы G над полем $\mathbb{F}$ соответствуют модулям над групповым кольцом $\mathbb{F}G$.

Определение 2.3. *Гомоморфизм правых R-модулей* — отображение $\varphi\colon M_R \to N_R$, для которого

$$\forall a, b \in M,\ r \in R,\ \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(ar) = \varphi(a)r.$$

Гомоморфизмы левых модулей определяются аналогично. Для левых модулей мы будем писать гомоморфизм справа: $(a)\varphi$. Гомоморфизм модулей называется *изоморфизмом*, если он является биективным отображением. Модули, между которыми имеется изоморфизм, называются *изоморфными* (обозначение $M \cong N$).

Определение 2.4. Пусть M — правый R-модуль. Его аддитивная подгруппа N называется *подмодулем*, если

$$\forall r \in R \ \ \forall u \in N\colon \ ur \in N.$$

Обозначение: $N \leqslant M$. *Фактормодуль* M/N — это аддитивная факторгруппа M/N с операцией умножения на элементы кольца R, заданной как $(m+N)r = mr + N$.

Пример 2.5. Подмодули R_R — это в точности правые идеалы кольца R.

Теорема 2.6 (о гомоморфизме модулей)**.** Пусть $\varphi\colon M \to N$ — гомоморфизм модулей. Тогда $\ker\varphi \leqslant M$, $\varphi(M) \leqslant N$ и отображение $\pi\colon \varphi(M) \to M/\ker\varphi$, $\varphi(m) \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(m))$, есть изоморфизм.

Теорема 2.7 (о соответствии подмодулей)**.** Пусть $\varphi\colon M \to N$ — гомоморфизм модулей. Тогда φ осуществляет сохраняющее включения взаимно-однозначное соответствие между множеством подмодулей M, содержащих $\ker\varphi$, и множеством всех подмодулей $\varphi(M)$.

Определение 2.8. Модуль M есть *внутренняя прямая сумма* семейства своих подмодулей $\{M_i \mid i \in I\}$, если всякий элемент $m \in M$ однозначно представляется в виде суммы $\sum\limits_{i\in I} m_i$, где $m_i \in M_i$ и количество ненулевых m_i конечно. Обозначение: $M = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$.

Определение 2.9. Пусть $\{M_i\}_{i\in I}$ — семейство правых R-модулей. Рассмотрим аддитивную абелеву группу $\prod\limits_{i\in I} M_i$ всех отображений вида $f\colon I \to \bigsqcup\limits_{i\in I} M_i$, для которых $f(i) \in M_i$. Полагаем $(f_1 + f_2)(i) = f_1(i) + f_2(i)$. Зададим умножение справа на элементы R: $(fr)(i) = f(i)r$. Таким образом мы определили модуль $\prod\limits_{i\in I} M_i$, называемый *прямым произведением* модулей $\{M_i\}_{i\in I}$. Часто бывает удобно записывать функцию f в виде $f = \prod\limits_{i\in I} m_i$, где $m_i = f(i)$.

Определение 2.10. *Внешняя прямая сумма* $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ правых R-модулей $\{M_i\}_{i \in I}$ — это подмодуль $\prod\limits_{i \in I} M_i$, состоящий из всех функций f таких, что $f(i) \neq 0$ лишь для конечного числа индексов i. Мы также будем использовать обозначение $f = \bigoplus_{i \in I} m_i$, где $m_i = f(i)$. Заметим, что прямая сумма отличается от прямого произведения только в случае бесконечного числа модулей M_i. В дальнейшем мы будем использовать специальное обозначение для суммы n копий одного и того же модуля $M_R^n = \underbrace{M_R \oplus \ldots \oplus M_R}_{n \text{ раз}}$, где n — натуральное число (в общем случае произвольный кардинал). В частности, R_R^n — сумма n копий регулярного модуля.

Определение 2.11.

- *Система порождающих* $S = \{m_i \mid i \in I\}$ правого R-модуля M — такое подмножество M, что всякий $m \in M$ представляется в виде $\sum\limits_{i \in I} m_i r_i$ (среди r_i лишь конечное число ненулевых). Обозначение $SR = M$, $\langle S \rangle_R = M$ или $\langle S \rangle = M$. Нулевой модуль порождается пустым множеством. Модуль называется *циклическим*, если он порождается одним элементом m, в этом случае будем писать $M = mR$.

- Подмножество $S = \{m_i \mid i \in I\}$ правого модуля M *линейно независимо* (справа), если любая конечная сумма вида $\sum\limits_{i \in I} m_i r_i$, где есть ненулевые $r_i \in R$, также ненулевая. Пустое множество считается линейно независимым.

- *Базис* модуля M — это система его порождающих S, которая удовлетворяет любому из двух эквивалентных условий: 1) S линейно независима; 2) представление любого $m \in M$ в виде линейной комбинации $\sum\limits_{i \in I} m_i r_i$ единственно. В этом случае $M = \bigoplus\limits_{i \in I} m_i R$, где $\{m_i\}$ — одноэлементный базис модуля $m_i R$.

- *Свободный R-модуль* — модуль, обладающий базисом.

Пример 2.12. Приведем примеры свободных модулей.

1. Нулевой модуль 0 считается свободным, его базис — пустое множество.

2. Свободная абелева группа = свободный $\mathbb{Z}$-модуль.

3. Векторное пространство над полем.

4. Регулярный модуль R_R, его базис — это $\{1\}$.

5. Множество матриц $M_n(R)$ — свободный правый или левый R-модуль с базисом из матричных единиц.

Предложение 2.13. Правый модуль M свободен тогда и только тогда, когда он изоморфен прямой сумме копий модуля R_R по некоторому индексному множеству I. При этом достаточно взять I, равномощное выбранному базису M.

Доказательство.
($\Rightarrow$) Пусть $\{m_i\}_{i\in I}$ — базис M. Тогда любое $m \in M$ представимо единственным образом в виде $m = \sum_{i\in I} m_i r_i$. Рассмотрим $N = \bigoplus_{i\in I} R_R$ и определим отображение $\varphi : M \to N$ по правилу $\varphi(\sum_{i\in I} m_i r_i) = \bigoplus_{i\in I} r_i$. Тогда $\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$ и $\varphi(ar) = \varphi(a)r$. Значит, φ — гомоморфизм. Отображение φ инъективно, т.к. разложение по базису $\{m_i\}_{i\in I}$ единственно. Кроме того, φ сюръективно по построению.
($\Leftarrow$) Следует из того, что внешняя прямая сумма является внутренней прямой суммой проекций на каждое прямое слагаемое. □

Замечание 2.14. Отметим, что у свободных модулей над некоммутативным кольцом могут быть базисы разных мощностей. В частности, существуют такие кольца R, что имеется изоморфизм правых модулей $R_R \cong R_R^2$ (откуда $R_R \cong R_R^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$).

Предложение 2.15. Всякий правый модуль M_R изоморфен фактормодулю некоторого свободного модуля F_R. При этом можно считать, что мощность одного из базисов F_R совпадает с мощностью выбранного порождающего подмножества M_R.

Доказательство. Пусть M порождается множеством S, положим $F_R = \bigoplus\limits_{s\in S} R_R$. Отображение $\varphi\colon F_R \to M$, $\bigoplus\limits_{i\in I} r_i \mapsto \sum\limits_{i\in I} m_i r_i$ — сюръективный гомоморфизм правых R-модулей, его образ изоморфен фактору F_R по $\ker\varphi$. □

Предложение 2.16. Все модули над телом свободны.

Доказательство. Пусть M — правый модуль над телом R. Пусть Ω — семейство всех линейно независимых подмножеств M, упорядоченное по включению. Заметим, что $\Omega \neq \varnothing$, т.к. $\varnothing \in \Omega$. Рассмотрим произвольную цепь $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ элементов Ω. Положим $C = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$.

Покажем, что C линейно независимо. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — любые n элементов множества C для произвольного натурального n. Предположим, что $\sum_i m_i r_i = 0$ для некоторых элементов кольца $r_i \in R$. Выберем $C_{\lambda_1}, \ldots, C_{\lambda_n}$ такие, что $m_i \in C_{\lambda_i}$. Поскольку $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — цепь, то без ограничения общности можно считать, что $C_{\lambda_i} \subseteq C_{\lambda_1}$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда $m_i \in C_{\lambda_1}$ для $i = 1, \ldots, n$. Так как C_{λ_1} линейно независимо, то $r_1 = \ldots = r_n = 0$. Отсюда C — линейно независимо в силу произвольности $m_1, \ldots, m_n$ и n.

Значит, Ω содержит максимальный элемент S по лемме Цорна. Покажем, что S — базис M. Т.к. S линейно независимо, то достаточно показать, что S порождает M. Возьмём произвольный $m \in M$, не лежащий в S. Тогда множество $S \cup \{m\}$ линейно зависимо в силу максимальности S. Значит, для некоторых $m_1, \dots, m_k \in S$ существуют $r_0, r_1, \dots, r_k \in R$, не все равные нулю, что $mr_0 + \sum_{i=1}^k m_i r_i = 0$. Заметим, что $r_0 \neq 0$, т.к. иначе мы бы получили линейную зависимость элементов S, что невозможно в силу $S \in \Omega$. Наконец воспользуемся тем, что R — тело. Тогда r_0 обратим, откуда $m = \sum_{i=1}^k m_i r_i r_0^{-1}$. Мы показали, что S порождает M в силу произвольности $m \in M$. □

Задачи к лекции 2.

Задача 1. Пусть R — кольцо, $a, v \in R$, v — обратимый элемент, не равный 1, причём $av = a$. Верно ли, что $a = 0$?

Задача 2. Докажите теорему о гомоморфизме для модулей.

Задача 3. Докажите теорему о соответствии подмодулей.

Задача 4. Предъявите взаимно-однозначное соответствие левых идеалов матричного кольца над кольцом R с подмодулями в ${}_R R^n$.

Задача 5. Покажите, что у конечно порождённого правого модуля над телом все базисы содержат одинаковое количество элементов.

Задача 6. Приведите пример модуля, не имеющего базиса.

Задача 7. Приведите пример свободного модуля, имеющего два базиса разных мощностей.

Задача 8. Верно ли, что подмодуль свободного модуля является свободным?

Задача 9. Приведите примеры конечно порождённого не свободного и свободного не конечно порождённого модулей.

3 Неприводимые модули. Кольцо эндоморфизмов.

Определение 3.1. *Неприводимый (простой) модуль* M — это модуль, в котором ровно два различных подмодуля: $\{0\}$, M.

Нулевой модуль не считаем неприводимым.

Пример 3.2.

1. Векторное пространство над полем неприводимо тогда и только тогда, когда оно одномерно.

2. Неприводимые модули групповой алгебры $\mathbb{F}G$ соответствуют неприводимым представлениям группы G.

3. Правый идеал $I \leqslant R_R$ неприводим $\Leftrightarrow$ I — *минимальный* правый идеал (в множестве всех ненулевых идеалов). Кольцо не обязано содержать минимальные правые идеалы (пример — $\mathbb{Z}$).

Предложение 3.3. Пусть $M_R \neq 0$. Следующие условия эквивалентны:
1) M неприводимый;
2) для всех $0 \neq m \in M$ выполнено $mR = M$;
3) $M \cong R_R/N$ для некоторого максимального правого идеала N.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) наличие нетривиальных подмодулей равносильно наличию нетривиальных подмодулей вида Rm.

3) $\Rightarrow$ 1) По теореме о соответствии идеалов.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть $0 \neq m \in M$, тогда отображение φ: $R_R \mapsto M$, $r \mapsto mr$, — сюръективный гомоморфизм R-модулей, его образ изоморфен $R_R/\ker\varphi$ и неприводим по 1), поэтому $\ker\varphi$ — максимальный правый идеал. □

Следствие 3.4. Неприводимые $\mathbb{Z}$-модули — это в точности конечные циклические группы простого порядка.

Предложение 3.5. Аддитивная абелева группа $\mathbb{Q}$ не содержит максимальных подгрупп, то есть для всякой собственной подгруппы $G_1 \lneq \mathbb{Q}$ существует подгруппа G_2 такая, что $G_1 \lneq G_2 \lneq \mathbb{Q}$.

Доказательство. Предположим, что G — максимальная подгруппа. Тогда $\mathbb{Q}/G$ — неприводимый $\mathbb{Z}$-модуль, т.е. циклическая группа простого порядка p. Для любого $s+G \in \mathbb{Q}/G$ выполнено $p(s+G) = 0+G$. Пусть f — рациональное число, не лежащее в G. Положим $s = f/p \in \mathbb{Q}$, тогда $f + G = p(s + G) = 0 + G$. Значит, $f \in G$. Противоречие. □

Отметим, что для конечно порожденных модулей такого примера построить нельзя.

Теорема 3.6. Пусть M — конечно порождённый правый R-модуль. Тогда любой собственный подмодуль $N \leqslant M$ содержится в некотором максимальном подмодуле.

Доказательство. Пусть M порождён элементами $m_1, \ldots, m_n$. Зададим Ω — множество собственных подмодулей M, содержащих N. Заметим, что подмодуль $L \leqslant M$ является собственным тогда и только тогда, когда он не содержит одновременно все элементы $m_1, \ldots, m_n$. Отсюда

$$\Omega = \{K \leqslant M \mid N \leqslant K,\ \{m_i\}_{i=1}^n \not\subseteq K\}.$$

Если $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольная цепь в Ω, то положим $L = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$. Тогда для произвольных $m_1, m_2 \in L_\lambda$, найдутся индексы $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, что $m_1 \in L_{\lambda_1}$, $m_2 \in L_{\lambda_2}$. Так как $\{L_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — это цепь, то без ограничения общности можно считать, что $L_{\lambda_2} \subseteq L_{\lambda_1}$. Отсюда $m_1, m_2 \in L_{\lambda_1}$, но L_{λ_1} — подмодуль в M. Значит, $m_1 - m_2 \in L_{\lambda_1} \subseteq L$, откуда L — аддитивная подгруппа в M. Также для любого $r \in R$ выполнено $rm_1 \in L_{\lambda_1} \subseteq L$. Значит, L — подмодуль в M.

Так как для всех $\lambda \in \Lambda$ выполнено $\{m_i\}_{i=1}^n \not\subseteq L_\lambda$, то получаем $\{m_i\}_{i=1}^n \not\subseteq L$.

Итак, $L \in \Omega$, а значит, выполнены условия леммы Цорна и в M существует максимальный подмодуль. $\square$

Теорема 3.7. Следующие условия для кольца $R \neq \{0\}$ эквивалентны.

1) R — тело.

2) R содержит ровно два правых идеала: 0 и R.

3) R_R — неприводимый модуль.

4) 0 — максимальный правый идеал.

5) Каждый ненулевой элемент R обратим справа.

6) Все правые R-модули свободны.

7) Все конечно порождённые правые R-модули свободны.

8) Все циклические правые R-модули свободны.

9) Существует свободный неприводимый правый R-модуль.

2')–9') Левые аналоги условий 2)–9).

Доказательство. Поскольку 1) симметрично, достаточно доказать эквивалентность условий 1)–9).

1) $\Rightarrow$ 2) Идеал, содержащий обратимые элементы, несобственный.

2) $\Leftrightarrow$ 3), 2) $\Rightarrow$ 4) Сразу из определений.

4) $\Rightarrow$ 5) Если $r \neq 0$ не обратим справа элемент, то rR — нетривиальный правый идеал.

5) $\Rightarrow$ 1) Возьмём ненулевой $r \in R$, тогда, согласно 5), найдётся такой $s \in R$, что $rs = 1$. Снова пользуясь 5), выберем для s такое $t \in R$, что $st = 1$. Заметим, что $t = 1t = (rs)t = r(st) = r$. Поэтому $sr = rs = 1$, т.е. r обратим.

1) $\Rightarrow$ 6) Доказано ранее.

6) $\Rightarrow$ 7) $\Rightarrow$ 8) Получается сразу.

8) $\Rightarrow$ 9) По теореме Крулля существует максимальный правый идеал N. Тогда R/N — неприводимый модуль. По предложению 3.3 он циклический, а значит, свободный в силу 8).

9) $\Rightarrow$ 3) Пусть M — свободный неприводимый модуль, в частности, $M \neq 0$. Выберем произвольный базис M и возьмём в нём любой элемент m. Тогда отображение $r \mapsto mr$ задаёт изоморфизм модулей $R_R \cong mR$. С другой стороны, $M = mR$ ввиду неприводимости. Таким образом, $R_R \cong M$, а значит, R_R неприводим.

$\square$

Определение 3.8. *Алгебра* R над коммутативным кольцом K — это кольцо со структурой K-модуля, причём выполнено $(sr)k = s(rk) = (sk)r$ для $r, s \in R$, $k \in K$. *Гомоморфизм K-алгебр* — это отображение между K-алгебрами, которое одновременно является кольцевым и K-модульным гомоморфизмом.

Пример 3.9. Примеры K-алгебр: $M_n(K)$, $K[[t]]$, $K[t]$, KG. Всякое кольцо можно понимать как $\mathbb{Z}$-алгебру. Также любое кольцо является алгеброй над своим центром.

Определение 3.10. *Свободная n-порождённая алгебра* $K\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ над коммутативным кольцом K — множество конечных формальных K-линейных комбинаций $\sum\limits_I \lambda_I x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, $\lambda_I \in K$, *слов* от x_i, где $I = (i_1, \ldots, i_k)$ — конечные упорядоченные наборы натуральных чисел от 1 до n (набор может быть пустым). Умножение слов $x_{i_1} \cdots x_{i_k} \cdot x_{j_1} \cdots x_{j_m}$ производится конкатенацией, элементы K перестановочны со словами; на всё кольцо умножение продолжается в соответствии с дистрибутивностью. Единица алгебры соответствует пустому слову и отождествляется с 1_K.

Определение 3.11. *Кольцо эндоморфизмов* $\operatorname{End} M_R$ — множество всех гомоморфизмов $M_R \to M_R$, на котором заданы операции сложения $(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m)$ и умножения $(\varphi\psi)(m) = \varphi(\psi(m))$. Роль единицы кольца выполняет тождественное отображение id_M, нуля — нулевое отображение.

Для левых модулей аналогично $(m)(\varphi + \psi) = (m)\varphi + (m)\psi$, $(m)(\varphi\psi) = ((m)\varphi)\psi$.

Замечание 3.12. При вычислениях в модулях удобно писать эндоморфизмы и скаляры по разные стороны от элемента модуля. Поскольку операторы привычнее писать слева от аргументов, далее мы будем рассматривать преимущественно правые модули M_R, хотя многие рассуждения естественным образом переносятся и на левые.

Кроме того, мы будем использовать записи вида $\varphi m r$, $\varphi \in \operatorname{End} M_R$, $m \in M$, $r \in R$, где, заметим, расстановка скобок не требуется.

Теорема 3.13. Пусть $M_R = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i$ — конечная прямая сумма. Тогда $\operatorname{End} M_R$ изоморфно кольцу *формальных матриц*, в которых на местах с индексами (i, j) записаны произвольные гомоморфизмы $M_i \to M_j$.

Доказательство. Пусть π_i — естественная проекция из M на M_i, ι_i: — естественное вложение M_i в M. Заметим, что $\pi_i \iota_j = \delta_{ij} \mathrm{id}_{M_j}$ (символ Кронекера), $\sum\limits_{i=1}^{n} \iota_i \pi_i = \mathrm{id}_M$.

Для $f \in \operatorname{End} M_R$ рассмотрим “матрицу” (семейство отображений) $\varphi(f) = (f_{ij})$, где $f_{ij}\colon M_i \to M_j$, $f_{ij} = \pi_j f \iota_i$. Напротив, для семейства отображений $g_{ij}\colon M_i \to M_j$ также определён эндоморфизм $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \iota_j g_{ij} \pi_i \in \operatorname{End} M_R$. Это взаимно обратные операции: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \iota_j (\pi_j f \iota_i) \pi_i = \mathrm{id}_M f \mathrm{id}_M = f$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \pi_j (\iota_j g_{ij} \pi_i) \iota_i = \mathrm{id}_{M_j} g_{ij} \mathrm{id}_{M_i} = g_{ij}$, при этом $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$, $(\varphi(fg))_{ij} = \sum (\varphi(f))_{ik} (\varphi(g))_{kj}$. $\square$

При $M_1 \cong \ldots \cong M_n \cong N$ получаем следующий результат.

Следствие 3.14. $\operatorname{End} N_R^n \cong M_n(\operatorname{End} N_R)$.

Теорема 3.15. $\operatorname{End} R_R \cong R$, $\operatorname{End} {}_R R \cong R$.

Для второго изоморфизма важно соглашение, что гомоморфизмы левых модулей пишутся справа.

Доказательство. Рассмотрим отображения $m_r \in \operatorname{End} R_R$, сопоставляющее $x \mapsto rx$, тогда $m_r + m_s = m_{r+s}$, $m_r m_s = m_{rs}$, $m_1 = \mathrm{id}_{R_R}$, откуда отображение $m\colon r \mapsto m_r$ является гомоморфизмом колец R и $\operatorname{End} R_R$. Его ядро тривиально: если $m_r = 0$, то $0 = m_r(1) = r \cdot 1 = r$. Пусть $\varphi \in \operatorname{End} R_R$, тогда для всех $r \in R$ выполнено $\varphi(r) = \varphi(1 \cdot r) = \varphi(1) r = m_{\varphi(1)}(r)$. Поэтому $m : R \to \operatorname{End} R_R$ является биективным гомоморфизмом, откуда $R \cong \operatorname{End} R_R$.

В случае ${}_R R$ полагаем симметрично $(x) m_r = xr$ для всех $x \in R$, и все проверки проводятся аналогично. □

Замечание 3.16. Если в предыдущей теореме R — это алгебра над коммутативным кольцом K, то указанные изоморфизмы являются изоморфизмами K-алгебр.

Определение 3.17. Кольцо R^{opp}, *противоположное* к R, — это кольцо с той же абелевой группой по сложению, умножение в котором « $\cdot_{\mathrm{opp}}$» производится в обратном порядке: $x \cdot_{\mathrm{opp}} y = y \cdot x$.

Замечание 3.18. Если бы мы писали гомоморфизмы левых модулей слева, то в предыдущей теореме $\operatorname{End} {}_R R$ оказалось бы изоморфно R^{opp}.

Задачи к лекции 3.

Задача 1. Приведите пример ненулевого модуля, у которого нет неприводимого подмодуля.

Задача 2. Пусть N_R — неприводимый R-модуль. Найдите все неприводимые подмодули модуля $M_R = N_R^3$.

Задача 3. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$ со счётным базисом. Положим $R = \operatorname{End}_{\mathbb{F}}(V)$. Покажите, что $R \cong M_n(R)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Задача 4. Докажите, что кольцо $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Z}_4 & \mathbb{Z}_4 \\ 0 & \mathbb{Z}_2 \end{smallmatrix}\right)$ не изоморфно своему противоположному. Найдите кольцо без единицы наименьшей мощности, не изоморфное своему противоположному.

Задача 5. Покажите, что правый (левый) модуль над кольцом R является левым (правым) модулем над кольцом R^{opp}.

Задача 6. Найдите противоположное к кольцу матриц $M_n(R)$. Проверьте, верно ли, что $(M_n(R))^{\mathrm{opp}} \cong M_n(R^{\mathrm{opp}})$.

Задача 7. Покажите, что в утверждении о модулярности условие $K \subseteq N$ является существенным.

4 Артиновы и нётеровы модули и кольца.

Предложение 4.1 (модулярность)**.** Пусть K, L, N — подмодули правого R-модуля M_R такие, что $K \subseteq N$. Тогда выполнено[4] $K + (L \cap N) = (K + L) \cap N$.

Доказательство. Заметим, что $K + (L \cap N) \subseteq K + L$, а также $K + (L \cap N) \subseteq N$ в силу того, что $K \subseteq N$. Поэтому $K + (L \cap N) \subseteq (K + L) \cap N$. Обратно, возьмем $n \in (K + L) \cap N$. Тогда $n = k + l$, где $k \in K$, $l \in L$, и $l = n - k \in L \cap (N + K) = L \cap N$, т.к. $K \subseteq N$. Таким образом, $m = k + l \in K + (L \cap N)$. □

Определение 4.2. Модуль M *артинов*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) нет бесконечной строго убывающей цепочки подмодулей $M_1 \supset M_2 \supset \dots$;

2) всякая бесконечная нестрого убывающая цепочка $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ подмодулей *стабилизируется (обрывается)*, т.е. существует такое n, что $M_n = M_{n+1} = \dots$;

3) любое непустое семейство подмодулей M содержит минимальный (по включению) элемент.

Доказательство корректности.

2) $\Rightarrow$ 1) Получается сразу.

1) $\Rightarrow$ 3) Пусть S — непустое семейство подмодулей в M, которое не содержит минимального элемента. Выберем любой $M_1 \in S$. Т.к. M_1 не минимальный, то можем взять такой $M_2 \in S$, что $M_2 \subset M_1$. Далее рассматриваем $M_3 \subset M_2$ и т.д. Получается бесконечная строго убывающая цепочка, противоречие.

3) $\Rightarrow$ 2) Бесконечная нестрого убывающая цепочка обязана стабилизироваться, начиная с минимального элемента.

□

Определение 4.3. Модуль M *нётеров*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1) нет бесконечной строго *возрастающей* цепочки подмодулей $M_1 \subset M_2 \subset \dots$;

2) всякая бесконечная нестрого *возрастающая* цепочка $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ подмодулей M стабилизируется;

3) всякое непустое семейство подмодулей M содержит *максимальный* (по включению) элемент.

---

[4] Это соотношение легче запомнить в виде $(K + L) \cap N = K \cap N + L \cap N$, где $K \cap N = K$ в силу $K \subseteq N$.

Определения артинова и нётерова модуля двойственны в теоретико-множественном смысле.

Предложение 4.4. Пусть $N \leqslant M$ — подмодуль. Модуль M артинов (нётеров) тогда и только тогда, когда N и M/N оба артиновы (нётеровы).

Доказательство артинова случая. Пусть M артинов. Тогда всякая нестрого убывающая цепочка подмодулей N является цепочкой подмодулей M, и N также артинов. Если $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots$ — цепочка подмодулей M/N, то $\pi^{-1}(L_1) \supseteq \pi^{-1}(L_2) \supseteq \ldots$ — цепочка подмодулей M, где $\pi : M \to M/N$ — естественная проекция. Вторая цепочка обрывается, поэтому обрывается и первая.

Пусть N, M/N артиновы, $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ — подмодули M. Рассмотрим цепочки $M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \ldots$ в N и $(M_1 + N)/N \supseteq (M_2 + N)/N \supseteq \ldots$ в M/N. Пусть обе стабилизируются на n-м шаге или ранее. Тогда при $i \geqslant n$ из $(M_i+N)/N = (M_n+N)/N$ следует $M_i + N = M_n + N$. Остаётся воспользоваться свойством модулярности $M_n = M_n \cap (M_n + N) = M_n \cap (M_i + N) = M_i + (M_n \cap N) = M_i + (M_i \cap N) = M_i$. □

Доказательство нётерова случая двойственно вышеприведённому.

Следствие 4.5. Прямая сумма конечного числа модулей артинова (нётерова) тогда и только тогда, когда все слагаемые артиновы (нётеровы).

Доказательство. Доказывается индукцией по числу слагаемых, поскольку

$$(M_1 \oplus \ldots \oplus M_n)/M_n \cong M_1 \oplus \ldots \oplus M_{n-1}$$

при $n > 1$, с использованием вышеприведенного критерия. □

Предложение 4.6. Модуль нётеров тогда и только тогда, когда каждый его подмодуль конечно порождён.

Доказательство. Для $x_1, \ldots, x_n \in M$ обозначим через $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ подмодуль, порождённый этими элементами. Пусть подмодуль $N \leqslant M$ не конечно порождён. Значит, найдутся $x_1 \in N \setminus \{0\}$, $x_2 \in N \setminus \langle x_1 \rangle$, $x_3 \in N \setminus \langle x_1, x_2 \rangle$, и так далее. Тогда $\langle x_1 \rangle \subset \langle x_1, x_2 \rangle \subset \ldots$ — строго возрастающая цепочка подмодулей в M.

Пусть все подмодули M конечно порождены, и $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ — цепочка подмодулей M. Рассмотрим $N = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$. По условию этот подмодуль порождён конечным числом элементов, скажем, $x_1, \ldots, x_n$. Каждый x_i обязан принадлежать некоторому M_{j_i}, значит, все x_i принадлежат M_k, где $k = \max\{j_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Поэтому $N = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \subseteq M_i \subseteq N$ при $i \geqslant k$. Следовательно $M_i = N$ при $i \geqslant k$, и цепочка $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ стабилизируется на шаге k. □

Предложение 4.7. Эндоморфизм φ артинова (нётерова) модуля является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен (сюръективен).

Доказательство. Пусть $\varphi \in \operatorname{End} M$, $\varphi\colon M \to M$ сюръективен, M нётеров. Цепь подмодулей $0 \subseteq \ker\varphi \subseteq \ker\varphi^2 \subseteq \ldots$ стабилизируется на конечном шаге n. Так как $\varphi^n(M) = \varphi(M) = M$, для $k \in \ker\varphi$ имеем $k = \varphi^n(m)$, однако тогда $m \in \ker\varphi^{n+1} = \ker\varphi^n$, то есть $k = 0$, и $\ker\varphi = 0$.

Доказательство для случая инъективного эндоморфизма артинового модуля проводится аналогично, только теперь нужно расматривать цепочку образов, а не ядер. $\square$

Предложение 4.8 (лемма Фиттинга)**.** Пусть модуль M одновеременно артинов и нётеров, $\varphi \in \operatorname{End} M$. Тогда для некоторого n выполнено $M = \varphi^n(M) \oplus \ker\varphi^n$ (произведение эндоморфизмов — их композиция).

Доказательство. Пусть цепочки $M \supseteq \varphi(M) \supseteq \varphi(\varphi(M)) \supseteq \ldots$ и $0 \subseteq \ker\varphi \subseteq \ker(\varphi\circ\varphi) \subseteq \ldots$ стабилизируются на n-м шаге или ранее. Тогда для любого $x \in \varphi^n(M) \cap \ker\varphi^n$ выполнено $x = \varphi^n(y)$, $0 = \varphi^n(x) = \varphi^{2n}(y)$, откуда $y \in \ker\varphi^{2n} = \ker\varphi^n$. Поэтому $x = 0$, а значит, сумма подмодулей $\varphi^n(M)$ и $\ker\varphi^n$ действительно прямая.

В силу $\varphi^n(M) = \varphi^{2n}(M)$, для каждого элемента $m \in M$ найдётся такой $p \in M$, что $\varphi^n(m) = \varphi^{2n}(p)$. Тогда можно представить элемент m в виде $m = \varphi^n(p) + (m - \varphi^n(p))$, где второе слагаемое лежит в $\ker\varphi^n$. Поэтому сумма $\varphi^n(M) \oplus \ker\varphi^n$ составляет весь модуль M. $\square$

Определение 4.9. Кольцо R *артиново (нётерово) справа*, если R_R — артинов (нётеров) R-модуль. Левые аналоги определяются симметрично. Кольцо называется *артиновым (нётеровым)*, если оно артиново (нётерово) и справа, и слева.

В силу того, что подмодули R_R — это в точности правые идеалы кольца R, то условия обрыва цепочек подмодулей следует интерпретировать как условия обрыва цепочек правых идеалов.

Следствие 4.10. Кольцо R нётерово справа тогда и только тогда, когда каждый его правый идеал конечно порождён.

Следствие 4.11. Если в кольце все правые идеалы главные, т.е. порождены одним элементом, то кольцо нётерово справа.

Пример 4.12. $\mathbb{Z}$ нётерово, но $\mathbb{Z}$ не является артиновым кольцом, т.к. $(2) \supset (4) \supset \ldots \supset (2^n) \supset \ldots$ — бесконечная строго убывающая цепочка идеалов.

Пример 4.13. Кольцо $R = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{smallmatrix}\right)$ артиново и нётерово справа: его ненулевые правые идеалы исчерпываются R, $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $\mathbb{R}$-подпространствами $\mathbb{R}$-двумерного векторного пространства $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{smallmatrix}\right)$. Однако R не артиново и не нётерово слева, так как его левым идеалом является, в частности, всякое $\mathbb{Q}$-линейное подпространство в $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Предложение 4.14. Конечно порождённый правый модуль M над артиновым справа (нётеровым справа) кольцом R артинов (нётеров).

Доказательство. Если M порождается n элементами, то из предложений 2.13, 2.15 следует, что $M \cong F/K$, где $F = R_R^n$. Согласно следствию 4.5, F_R артинов (нётеров) как сумма модулей с таким же свойством. Поэтому и его фактормодуль M артинов (нётеров) по предложению 4.4. □

Следствие 4.15. Подмодуль конечно порождённого правого модуля M_R над нётеровым справа кольцом конечно порождён.

Доказательство. Все подмодули нётерова модуля M_R конечно порождены. □

Теорема 4.16 (Гильберт, о базисе)**.** Пусть R — нётерово справа кольцо. Тогда $R[x]$ также нётерово справа.

Без доказательства. Если успеем, докажем более общий результат. □

Далее приведены классические теоремы об изоморфизме модулей. Теорему о гомоморфизме модулей также называют *первой теоремой Нётер об изоморфизме.*

Предложение 4.17 (Вторая теорема Нётер об изоморфизме)**.** Пусть N, K — подмодули модуля M. Тогда $(N+K)/K \cong N/(N \cap K)$.

Доказательство. Рассмотрим канонический эпиморфизм $\pi : N + K \to (N+K)/K$ и естественный мономорфизм $\iota : N \to N + K$. Положим $\phi = \pi \circ \iota$. Заметим, что $\ker \phi = N \cap K$ и $\phi(N) = \pi(N) + 0 = \pi(N) + \pi(K) = \pi(N+K)$. Остаётся применить к ϕ теорему о гомоморфизме. □

Предложение 4.18 (Третья теорема Нётер об изоморфизме)**.** Рассмотрим модули $K \leqslant N \leqslant M$. Тогда $(M/K)/(N/K) \cong M/N$.

Доказательство. Пусть $\pi_1 : M \to M/K$ — естественная проекция. Заметим, что т.к. $K \leqslant N$, то $N/K \leqslant M/K$ и $\pi_1(N) = N/K$. Рассмотрим естественную проекцию $\pi_2 : \pi_1(M) \to \pi_1(M)/\pi_1(N)$. Положим $\phi = \pi_2 \circ \pi_1$. Тогда $\ker \phi = \phi^{-1}(0 + \pi_1(N)) = \pi_1^{-1}(\pi_2^{-1}(0 + \pi_1(N))) = \pi_1^{-1}(\pi_1(N)) = N$. Также ϕ — сюръекция как композиция двух сюръекций. Остаётся применить к ϕ теорему о гомоморфизме. □

Лемма 4.19 (Цассенхауз)**.** Пусть даны модули $N' \leqslant N \leqslant M$ и $K' \leqslant K \leqslant M$. Тогда

$$(N' + (N \cap K))/(N' + (N \cap K')) \cong (K' + (N \cap K))/(K' + (N' \cap K)).$$

Доказательство. Обозначим $X = N \cap K$, $Y = N' + (N \cap K')$. В силу $K' \subseteq K$

$$X + Y = N' + (N \cap K') + (N \cap K) = N' + (N \cap K).$$

Поэтому левая часть в утверждении леммы совпадает с $(X+Y)/Y$. Согласно второй теореме об изоморфизме $(X+Y)/Y \cong X/(X \cap Y)$. Пользуясь $K' \subseteq K$, $N' \subseteq N$ и свойством модулярности, вычислим

$$X \cap Y = (N \cap K) \cap (N' + (N \cap K')) = (N' \cap K) + (N \cap K').$$

Мы показали, что левая часть изоморфна $(N\cap K)/((N'\cap K)+(N\cap K'))$. В предыдущем рассуждении можно везде заменить N на K и N' и K'. Тогда получится, что правая часть в утверждении леммы изоморфна тому же выражению. $\square$

Задачи к лекции 4.

Задача 1. Приведите пример конечно порождённого модуля, который не является нётеровым.

Задача 2. Приведите пример артинова модуля, который не является конечно порождённым.

Задача 3. Докажите, что любой артинов правый модуль над артиновым справа кольцом является конечно порождённым.

Задача 4. Докажите, что кольцо R артиново справа тогда и только тогда, когда каждый конечно порождённый правый R-модуль артинов.

Задача 5. Докажите предложение 2.6 для артиновых модулей: эндоморфизм φ артинова модуля является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он инъективен.

Задача 6. Покажите, что подкольцо артинова (нётерова) кольца не обязательно артиново (нётерово).

Задача 7. Покажите, что для любого $n \geqslant 1$ кольцо матриц $M_n(R)$ над артиновым (соотв. нётеровым) справа кольцом R также является артиновым (соотв. нётеровым) справа.

Задача 8. Пусть $R = \mathbb{F}[x]$ — кольцо многочленов над полем. Покажите, что само кольцо R не является артиновым кольцом, но для любого $0 \neq I \lhd R$ факторкольцо R/I — артиново.

Задача 9. Пусть в условиях леммы Фиттинга модуль M — конечномерное векторное пространство над полем. Соответственно, эндоморфизм φ — линейный оператор. Охарактеризуйте наименьшее n, для которого выполнено утверждение леммы, в терминах линейной алгебры.

5 Композиционные ряды. Теорема Жордана — Гёльдера. Теорема плотности. Примитивные кольца.

Определение 5.1. Пусть $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n$ — цепь подмодулей. Её i-м *фактором* будем считать фактормодуль M_i/M_{i-1}, $i = 1, \ldots, n$. Скажем, что цепь подмодулей $M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \ldots \subseteq M'_{n'}$ является *уплотнением* исходной цепи, если $n' \geqslant n$, $M_0 = M'_0$, $M_n = M'_{n'}$ и $(M_i)_{i=0}^n$ является подпоследовательностью в $(M'_j)_{j=0}^{n'}$.

Теорема 5.2 (Шрайер)**.** Пусть даны две цепи подмодулей: $N = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_m = M$ и $N = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_n = M$. Тогда существуют уплотнения обеих цепей одной и той же длины k и такая подстановка σ на множестве $\{1, \ldots, k\}$, что i-й фактор уплотнения первой цепи изоморфен $\sigma(i)$-му фактору уплотнения второй цепи.

Доказательство. Вставим между модулями M_i и M_{i+1} подмодули

$$M_{i,j} = M_i + (M_{i+1} \cap N_j),\ j = 0, \ldots, n.$$

Заметим, что $M_i = M_{i,0}$ и $M_{i+1} = M_{i,n}$. Аналогично между модулями N_j и N_{j+1} добавим

$$N_{i,j} = N_j + (N_{j+1} \cap M_i),\ i = 0, \ldots, m.$$

Тогда по лемме Цассенхауза выполнено $M_{i,j+1}/M_{i,j} \cong N_{i+1,j}/N_{i,j}$. □

Отметим, что теорема не исключает наличия нулевых факторов в уплотнениях. Однако их будет одинаковое число. Поэтому если в теореме Шрайера исходные цепи строго возрастали, то можно считать, что уплотнения тоже строго возрастают.

Определение 5.3. *Композиционный ряд* правого модуля M — цепочка подмодулей $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$, в которой все факторы — неприводимые модули.

Композиционный ряд не может содержать повторяющихся подмодулей, в силу того, что нулевой модуль не является неприводимым.

Отметим, что поскольку фактор M_i/M_{i-1} неприводим, не существует такого модуля N, что $M_{i-1} \subsetneq N \subsetneq M_i$. Поэтому любое строго возрастающее уплотнение композиционного ряда совпадает с ним самим.

Композиционный ряд определён неоднозначно (это верно даже для векторного пространства над полем).

Композиционный ряд не всегда существует, например, его нет у $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$.

Из теоремы Шрайера сразу получаем следующий результат.

Следствие 5.4 (Жордан, Гёльдер)**.** Пусть M_R обладает композиционным рядом. Тогда выполнено следующее:

1) Любая конечная строго возрастающая цепочка подмодулей может быть уплотнена до некоторого композиционного ряда.

2) Длины всех композиционных рядов равны, и наборы факторов двух композиционных рядов могут быть упорядочены так, что соответствующие факторы будут попарно изоморфны.

Определение 5.5. Если модуль M обладает некоторым композиционным рядом $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$, то будем говорить, что *(композиционная) длина* модуля равна n. Обозначение $l(M) = n$.

Следствие 5.6. Наличие композиционного ряда у модуля M равносильно одновременной артиновости и нётеровости M.

Доказательство. Бесконечная строго возрастающая или убывающая цепочка подмодулей не могла бы быть включена в конечный композиционный ряд.

Обратно, пусть модуль нётеров и артинов. Тогда в силу артиновости у него есть минимальный ненулевой подмодуль M_1. Затем выберем минимальный элемент M_2 в множестве всех подмодулей, строго содержащих M_1. Продолжаем процесс. Заметим, что на некотором шаге k множество подмодулей, строго содержащих M_k, будет пусто: иначе мы бы получили бесконечную строго возрастающую цепочку, что противоречило бы нётеровости. Значит, $M_k = M$. □

Пример 5.7. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Тогда композиционная длина V совпадает с размерностью.

Лемма 5.8. Пусть M — левый или правый модуль над кольцом R и $S = \mathrm{End}\,_R(M)$. Тогда существует канонический гомоморфизм колец $\varphi : R \to \mathrm{End}\,_S(M)$.

Доказательство. Пусть M — левый R-модуль. Для любого $r \in R$ определим отображение $\varphi(r) : M \to M$ правилом $\varphi(r)(x) = rx$ для любого $x \in M$. Для произвольных $x \in M$ и $s \in S$ имеем

$$\varphi(r)((x)s) = r \cdot (x)s = (rx)s = (\varphi(r)(x))s,$$

т.е. $\varphi(r)$ — эндоморфизм правого S-модуля.

По определению φ является гомоморфизмом аддитивных групп соответствующих колец. Для любых $r_1, r_2 \in R$ и $x \in M$ проверим, что

$$\varphi(r_1r_2)(x) = r_1r_2x = \varphi(r_1)(r_2x) = \varphi(r_1)\varphi(r_2)(x),$$

т.е. $\varphi : R \to \mathrm{End}\,_S(M)$ — гомоморфизм колец.

Для правого R-модуля M определение гомоморфизма φ аналогично: $(x)\varphi(r) = xr$. □

Лемма 5.9 (Шур)**.** Кольцо эндоморфизмов простого модуля является телом.

Доказательство. Пусть V — простой правый модуль и $f : V \to V$ — его эндоморфизм. Если $f \neq 0$, то $\ker f \neq V \Rightarrow \ker f = 0 \Rightarrow V \cong f(V) \neq 0 \Rightarrow f(V) = V$, т.е. f — изоморфизм, стало быть, он обратим в кольце $\mathrm{End}\,(V)$. □

Определение 5.10. Подкольцо S кольца линейных преобразований левого векторного пространства V над телом D называется *плотным*, если для любой конечной линейно независимой над D системы элементов $x_1, \ldots, x_n \in V$ и произвольного набора элементов $y_1, \ldots, y_n \in V$ существует такой элемент $s \in S$, что $x_is = y_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$.

Топологический термин “плотное подкольцо” объясняется следующим образом: кольцо $\mathrm{End}\,(V)$ всех эндоморфизмов левого модуля над произвольным кольцом можно снабдить топологией, используя в качестве базы окрестностей нуля можества вида

$$U(v_1, \ldots, v_n) = \{\varphi \in \mathrm{End}\,(v) | (v_1)\varphi = \ldots = (v_n)\varphi = 0\}$$

для произвольных конечных помножеств $\{v_1, \ldots, v_n\}$ модуля V. Определение плотного подкольца в точности означает, что S плотно в этой топологии.

Теорема 5.11 (Теорема плотности)**.** Пусть M — простой правый модуль над кольцом R, $D = \mathrm{End}\,_R(M)$. Тогда M — левый D-модуль (векторное пространство V над телом), и любой элемент $r \in R$ определяет D-линейное отображение $\varphi_r : M \to M$, заданное правилом $m \mapsto mr$ и отображение $r \mapsto \varphi_r$ является гомоморфизмом колец $R \to \mathrm{End}\,_D(M)$, причём образ этого отображения является плотным подкольцом.

Доказательство. Легко видеть, что если $d \in D$, $r \in R$ и $m \in M$, то $(dm)\varphi_r = (d(m))\varphi_r = d(m)r = d(mr) = d((m)\varphi_r)$, т.е. отображение φ_r является D-линейным. То, что отображение $r \mapsto \varphi_r$ является гомоморфизмом колец, мы уже проверили в лемме.

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение:

Если V — конечномерное подпространство пространства ${}_DM$, и $m \in M \setminus V$, то существует элемент $r \in R$ такой, что $mr \neq 0$ и $Vr = 0$.

Проведём доказательство индукцией по размерности пространства V. Если $\dim_D V = 0$, утверждение очевидно. Пусть $\dim_D V = n > 0$, $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V и V_0 — подпространство, порождённое $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Положим $K = \mathrm{Ann}\,_R(V_0) = \{r \in R : V_0 r = 0\}$. Заметим, что по предположению индукции (применённому к $m = e_n$) имеем $e_n K \neq 0$. Но тогда $e_n K = M$, так как модуль M простой. Допустим, что из $Vr = 0$ следует $mr = 0$. Определим отображение $t : M \to M$ следующим правилом: если $x = e_n k$, где $k \in K$, то $t(x) = mk$. Проверим корректность этого определения. Если $k' \in K$ и $e_n k = e_n k'$, то $V(k - k') = 0$ и, по допущению, $mk = mk'$. Ясно, что $t \in D$ и для любого $k \in K$ имеем $mk = t(e_n k) = t(e_n)k$, откуда $(m - t(e_n))K = 0$. Следовательно, $m - t(e_n) \in V_0$, и $m \in De_n + V_0 = V$. Противоречие доказывает справедливость вспомогательного утверждения.

Теперь пусть $x_1, \ldots, x_n \in M$ линейно независимая над D система элементов и $y_1, \ldots, y_n$ — произвольные элементы модуля M. Для всех $i = 1, \ldots, n$ определим V_i как подпространство, порождённое всеми элементами $x_1, \ldots, x_n$, кроме x_i. Поскольку $x_i \notin V_i$, существует элемент $a_i \in R$ такой, что $V_i a_i = 0$ и $x_i a_i \neq 0$. Так как M — простой модуль, $x_i a_i R = M$, т.е. существует элемент $b_i \in R$ такой, что $x_i a_i b_i = y_i$. Непосредственно проверяется, что если $r = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$, то $s = \varphi_r$ удовлетворяет условию определения плотного подкольца. □

Определение 5.12. Правый R-модуль M называется *точным*, если его аннулятор в кольце R равен нулю, т.е.

$$\forall r \in R, Mr = 0 \Rightarrow r = 0.$$

Определение 5.13. Кольцо R называется *примитивным (справа)*, если существует точный правый простой R-модуль.

Следствие 5.14. Кольцо R является примитивным (справа) тогда и только тогда, когда оно изоморфно плотному подкольцу кольца линейных преобразований левого векторного пространства над некоторым телом.

Доказательство. Пусть R — примитивное справа кольцо и M — точный простой правый R-модуль. В силу теоремы плотности достаточно проверить, что гомоморфизм $r \mapsto \varphi_r$ имеет нулевое ядро, но это равносильно тому, что модуль M точный: если $\varphi_r = 0$, это значит, что $Mr = 0$, откуда $r = 0$.

Обратно, пусть $\varphi : R \to \operatorname{End}_D(V)$ — инъективный гомоморфизм колец. Определим умножение элемента $v \in V$ на элемент $r \in R$ правилом $vr = (v)\varphi(r)$. Тогда V превращается в точный правый R-модуль. Если $0 \neq v \in V$, то для любого $v' \in V$ существует элемент $r \in R$ такой, что $vr = v'$ (см. определение плотности при $n = 1$.) Следовательно, $vR = V$ и V — простой R-модуль. $\square$

Предложение 5.15. Кольцо R является примитивным (справа) тогда и только тогда, когда в R содержится максимальный правый идеал, не содержащий ненулевых идеалов.

Доказательство. Пусть кольцо R примитивно справа и M — простой правый точный R-модуль. Выберем любой ненулевой элемент $m \in M$ и рассмотрим гомоморфизм правых R-модулей $f : R \to M$, заданный правилом $r \mapsto mr$ для всех $r \in R$. Тогда $f(R) \neq 0$, поэтому $f(R) = M$ и $f(R) \cong R/K$, где $K = \ker(f)$. По предложению 3.3 K — максимальный правый идеал. Пусть $I \lhd R$ и $I \subseteq K$. Тогда $MI = mRI \subseteq mK = 0$. Поскольку M — точный модуль, это означает, что $I = 0$.

Обратно, если K — максимальный правый идеал, не содержащий ненулевых двусторонних идеалов, то R/K — простой модуль по предложению 3.3. Если $I = \operatorname{Ann}_R(M)$, то $I \lhd R$ и из $(1 + K)I = 0$ следует, что $I \subseteq K$. Значит $I = 0$, т.е. M/K — точный модуль. $\square$

Следствие 5.16. Простое кольцо примитивно справа и слева.

Определение 5.17. Идеал I кольца R называется *примитивным (справа), если кольцо R/I примитивно (справа).*

Пример примитивного справа кольца, которое не является примитивным слева, содержится в статье Bergman, G. M. (1964), “A ring primitive on the right but not on the left”, Proceedings of the American Mathematical Society, 15 (3): 473–475.

Задачи к лекции 5.

Задача 1. Найдите все неприводимые правые модули над кольцом верхнетреугольных 2×2-матриц над полем.

Задача 2. Верно ли, что всякий неприводимый правый R-модуль изоморфен некоторому (минимальному) подмодулю R_R?

Задача 3. Пусть модуль M имеет композиционную длину n. Покажите, что любой его собственный подмодуль N также обладает композиционным рядом и $l(N) < n$.

Задача 4. Пусть R_R обладает композиционным рядом. Докажите, что всякий неприводимый R-модуль содержится среди факторов этого ряда.

Задача 5. Найдите композиционную длину кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$ как $\mathbb{Z}$-модуля.

Задача 6. Докажите, что если S— плотное подкольцо кольца линейных преобразований левого векторного пространства V над телом D, то $D \cong \mathrm{End}_S(V)$.

Задача 7. Докажите, что если R — примитивное (справа) кольцо, то кольцо матриц $M_n(R)$ примитивно (справа).

Задача 8. Покажите, что коммутативное примитивное (справа) кольцо R является полем.

Задача 9. (Отсутсвие обращения следствия 5.16): Пусть R — кольцо линейных преобразований пространства V над телом, причём $\dim D(V) = \infty$. Покажите, что кольцо R примитивно справа, но не является простым.

6 Полупростые модули. Цоколь. Изотипные компоненты.

Определение 6.1. *Полупростой (вполне приводимый) модуль* — это модуль, который раскладывается в прямую сумму неприводимых.

Отметим, что эта сумма может быть как конечной так и бесконечной. Причём в бесконечном случае она необязательно счётна.

Пример 6.2.

- Нулевой модуль полупрост, он раскладывается в пустую сумму неприводимых.
- Всякое (в т.ч. бесконечномерное) векторное пространство над полем полупросто.
- Полупростой $\mathbb{Z}$-модуль — прямая сумма (конечного или бесконечного числа) циклических групп простого порядка.

- Полупростые $\mathbb{F}G$-модули соответствуют вполне приводимым представлениям группы G.

Далее как обычно M обозначает правый R-модуль.

Предложение 6.3. Пусть M раскладывается в прямую сумму $M = \bigoplus\limits_{i \in I} S_i$, где каждый модуль S_i неприводим. Тогда эта прямая сумма содержит лишь конечное число слагаемых в том и только в том случае, когда M конечно порожден.

Доказательство. Пусть сумма конечна, тогда можно считать, что индексное множество $I = \{1, \ldots, n\}$. В силу неприводимости каждый модуль S_i порожден любым своим ненулевым элементом. Для всех $i = 1, \ldots, n$ выберем произвольный $s_i \in S_i \setminus \{0\}$. Рассмотрим модуль $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle_R$, порождённый элементами $s_1, \ldots, s_n$. Тогда имеем $S_i \subseteq \langle s_1, \ldots, s_n \rangle_R$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, $M = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle_R$.

Обратно, пусть модуль M конечно порожден, т.е. $M = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle_R$. В силу равенства $M = \bigoplus\limits_{i \in I} S_i$ можно записать

$$\begin{aligned} m_1 &= s_{i_{1,1}} + s_{i_{1,2}} + \ldots + s_{i_{1,k_1}}, \\ m_2 &= s_{i_{2,1}} + s_{i_{2,2}} + \ldots + s_{i_{2,k_2}}, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ m_r &= s_{i_{r,1}} + s_{i_{r,2}} + \ldots + s_{i_{r,k_r}}, \end{aligned}$$

где каждый $s_{i_{\alpha,\beta}} \in S_{i_{\alpha,\beta}}$. Отсюда индексы $i_{\alpha,\beta}$ пробегают некоторое конечное множество в I. Среди модулей $S_{i_{\alpha,\beta}}$ уберем повторяющиеся и рассмотрим подмодуль в M, равный их сумме $\bigoplus S_{i_{\alpha,\beta}}$. Этот подмодуль содержит элементы $m_1, \ldots, m_r$, а значит, совпадает со всем модулем M. Причем все прямые слагаемые $S_{i_{\alpha,\beta}}$ разложения $M = \bigoplus S_{i_{\alpha,\beta}}$ взяты из разложения $M = \bigoplus\limits_{i \in I} S_i$. Это возможно только в случае, когда оба этих разложения совпадают. $\square$

Лемма 6.4. Пусть $M = \sum\limits_{i \in I} S_i$ — необязательно прямая сумма неприводимых подмодулей $S_i \leqslant M$. Тогда M полупрост и, более того, для любого подмодуля $N \leqslant M$ существует такое подмножество индексов $J \subseteq I$, что $M = N \oplus \bigoplus\limits_{j \in J} S_j$.

Доказательство. Докажем второе утверждение леммы, первое получается из него при $N = 0$. Пусть Ω — это множество, состоящее из таких подмножеств индексов $J \subseteq I$, что сумма <u>всех</u> модулей в выражении $N + \sum\limits_{j \in J} S_j$ является прямой. Тогда $\Omega \neq \varnothing$, в силу $\varnothing \in \Omega$ (сумма N и нулевого модуля, очевидно, прямая).

Упорядочим Ω по включению. Покажем, что если $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — цепь в Ω, то $F = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ также принадлежит Ω. От противного, пусть сумма $P = N + \sum\limits_{j \in F} S_j$ не является прямой. Тогда имеется разложение нуля $0 = n + s_{j_1} + \ldots + s_{j_k}$ для некоторых $n \in N$, $s_{j_i} \in S_{j_i}$, $j_i \in F$, причем не все элементы $n, s_{j_1}, \ldots, s_{j_k}$ равны нулю. Так как F — это объединение цепи $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, то найдётся индекс $\lambda \in \Lambda$, такой что F_λ содержит все $j_1, \ldots, j_k$. Сумма $N + \sum\limits_{j \in F_\lambda} S_j$ является прямой в силу $F_\lambda \in \Omega$. Однако мы получили нетривиальное разложение нуля $0 = n + s_{j_1} + \ldots + s_{j_k}$, соответствующее этой сумме модулей, противоречие. Таким образом, $F \in \Omega$.

По лемме Цорна в Ω существует максимальный элемент J. Пусть $P = N + \sum\limits_{j \in J} S_j$. В силу неприводимости S_i пересечение $P \cap S_i$ равно либо S_i, либо 0. Покажем, что для всех $i \in I$ выполнено $P \cap S_i = S_i$. Предположим противное: пусть для некоторого i_0 пересечение $P \cap S_{i_0}$ нулевое. Отсюда $i_0 \notin J$ согласно определению P. Докажем, что тогда сумма всех модулей в выражении $N + \sum\limits_{j \in J \cup \{i_0\}} S_j$ будет прямой. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&0 = n + s_{j_1} + \ldots + s_{j_k} + s_0, \quad n \in N,\ s_0 \in S_{i_0},\ s_{j_i} \in S_{j_i},\ j_i \in J; \\
&-n - s_{j_1} - \ldots - s_{j_k} = s_0 \in P \cap S_{i_0},
\end{aligned}
$$

откуда $0 = s_0 = -n - s_{j_1} - \ldots - s_{j_k}$. Тогда n и все $s_{j_1}, \ldots, s_{j_k}$ тоже равны нулю, т.к. сумма $N + \sum\limits_{j \in J} S_j$ прямая. Таким образом, сумма $N + \sum\limits_{j \in J \cup \{i_0\}} S_j$ является прямой. Это означает, что $J \cup \{i_0\} \in \Omega$, что противоречит максимальности J.

Итак, мы показали, что для всех $i \in I$ выполнено $P \cap S_i = S_i$. Другими словами, $S_i \subseteq P$. В то же время $M = \sum\limits_{i \in I} S_i$ по условию леммы. Поэтому $P = M$, что и требовалось доказать. $\square$

Отметим, что разложение модуля в сумму неприводимых $M = \sum\limits_{i \in I} S_i$ всегда можно превратить в прямую сумму, убрав часть слагаемых. Это сразу следует из предыдущей леммы при $N = 0$.

Определение 6.5. Подмодуль $N \leqslant M$ *выделяется прямым слагаемым*, если существует подмодуль $N' \leqslant M$ *(дополнение до N)* такой, что $M = N \oplus N'$. Также говорят, что N — прямое слагаемое модуля M.

Дополнение определено неоднозначно, но как R-модули все дополнения изоморфны фактормодулю M/N.

Лемма 6.6. Пусть $N \leqslant M$ — модули. Если N выделяется в M прямым слагаемым, то N выделяется прямым слагаемым и во всяком модуле P, таком что $N \leqslant P \leqslant M$.

Доказательство. Пусть $M = N \oplus N'$. Воспользуемся модулярностью: $P = M \cap P = (N + N') \cap P = N + (N' \cap P)$. Причем сумма $P = N + (N' \cap P)$ окажется прямой, т.к. $N \cap (N' \cap P) \subseteq N \cap N' = 0$. $\square$

Теорема 6.7 (критерий полупростоты модуля)**.** Для модуля M следующие условия эквивалентны:

1) M раскладывается в сумму неприводимых модулей;
2) M полупрост, т.е. раскладывается в *прямую* сумму неприводимых модулей;
3) всякий подмодуль выделяется в M прямым слагаемым.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Доказано ранее.

2) $\Rightarrow$ 1) Тавтология.

2) $\Rightarrow$ 3) Доказано ранее.

3) $\Rightarrow$ 1) Если $M = 0$, то доказывать нечего, далее предполагаем $M \neq 0$. Пусть S — сумма[5] всех неприводимых подмодулей модуля M. Предположим, что $S \neq M$, тогда $M = S \oplus T$, $T \neq 0$. Рассмотрим произвольный ненулевой циклический подмодуль $N \leqslant T$. Так как N конечно порожден, то можно найти в нем максимальный собственный подмодуль N' (теорема 3.6). Но N' — это подмодуль не только в N, но и в M. Значит, по пункту 3) N' выделяется прямым слагаемым в M. По лемме 6.6 N' выделяется прямым слагаемым и в модуле N тоже, т.е. $N = N' \oplus P$. Следовательно, $P \cong N/N'$. Тогда из максимальности N' следует, что модуль P неприводим. По определению модуля S получаем, что $P \subseteq S$. В то же время по построению $P \subseteq T$. Однако $M = S \oplus T$, а значит, $S \cap T = 0$, откуда $P = 0$, что противоречит неприводимости модуля P. Значит, наше исходное предположение $S \neq M$ оказалось неверным. Поэтому модуль M совпадает с суммой всех своих неприводимых подмодулей. $\square$

Следствие 6.8. Пусть $M = \bigoplus\limits_{i \in I} S_i$, все S_i — неприводимые модули, $N \leqslant M$. Тогда у модуля N есть дополнение вида $\bigoplus\limits_{k \in K} S_k$, где $K \subseteq I$, причем N изоморфен (но не обязательно равен) модулю $\bigoplus\limits_{k \in I \setminus K} S_k$. В частности, если N неприводимый, то найдётся такое $i \in I$, что $N \cong S_i$, и при этом $N \oplus \bigoplus\limits_{j \neq i} S_j = M$.

Доказательство. Из леммы 6.4 получаем, что $M = N \oplus \bigoplus\limits_{k \in K} S_k$. Непосредственно по определению прямой суммы проверяется, что

$$N \cong M/\bigoplus_{k \in K} S_k = \bigoplus_{i \in I} S_i \Big/ \bigoplus_{k \in K} S_k \cong \bigoplus_{k \in I \setminus K} S_k.$$

Если N неприводим, то он не может быть изоморфен прямой сумме, в которой есть хотя бы два ненулевых слагаемых. Ведь тогда прямые слагаемые были бы нетривиальными подмодулями в N. Значит, $N \cong S_i$ для некоторого $i \in I$. $\square$

[5] Если неприводимых подмодулей нет, то полагаем стандартным образом $S = 0$. Однако дальше мы увидим, что этот случай не реализуется.

Следствие 6.9. Подмодули и фактормодули полупростого модуля полупросты. Гомоморфный образ полупростого модуля полупрост.

Доказательство. По предыдущему следствию подмодули и фактормодули окажутся изоморфны прямой сумме модулей S_i, где i пробегает некоторое подмножество в I. Но все S_i неприводимы.

Пусть $\phi : M \to N$ — сюръективный гомоморфизм модулей, M полупрост. Тогда по теореме о гомоморфизме $N \cong M/\ker\phi$, т.е. N изоморфен фактормодулю модуля M, а значит, полупрост по предыдущему. □

Предложение 6.10. Пусть M — полупростой конечнопорождённый R-модуль. Тогда любые два разложения M в прямую сумму неприводимых подмодулей содержат одинаковое конечное число слагаемых, и слагаемые в них могут быть упорядочены так, чтобы соответствующие были попарно изоморфны.

Доказательство. Пусть $M = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_m$, где все P_i и Q_j неприводимы. Так как $P_1 \leqslant M = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_m$, то P_1 изоморфен одному из модулей Q_j в силу следствия 6.8. С точностью до перенумерации можно считать, что $P_1 \cong Q_1$. Это позволяет удалить эти слагаемые и осуществить индукцию по n. База индукции $n = 0$ соответствует $M = 0$ и пустой сумме модулей, для которой всё выполнено тривиальным образом. □

Пусть $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство всех максимальных правых идеалов кольца R. По теореме Крулля это семейство непусто при $R \neq 0$. Вспомним, что любой неприводимый правый R-модуль M изоморфен фактормодулю R/N_λ для некоторого[6] N_λ (предложение 3.3). Тогда семейство $\{R/N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ заведомо включает в себя все неприводимые правые R-модули с точностью до изоморфизма. Введём на множестве $\{R/N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ отношение эквивалентности как изоморфизм модулей. Выберем по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Получится множество неприводимых модулей $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ такое, что произвольный неприводимый правый R-модуль M изоморфен в точности одному модулю M_γ из этого множества[7]. В этом случае будем говорить, что M — это *модуль класса изоморфизма* γ.

Пример 6.11. В некоторых случаях классы изоморфизма неприводимых модулей можно описать более явно.

[6] Для нулевого кольца мы считаем, что $1 = 0$, откуда в силу унитарности $1 \cdot m = m$ получаем, что над нулевым кольцом существует только нулевой модуль. Он не является неприводимым. Поэтому над нулевым кольцом пустым является как множество максимальных правых идеалов, так и множество неприводимых правых модулей.

[7] Отметим, что если заменить неприводимость на другое свойство модулей, то такого множества может и не быть. В общем случае получится не множество, а класс. Например, два векторных пространства над полем изоморфны тогда и только тогда, когда их базисы равномощны. Однако множества всех кардиналов не существует.

- Пусть R — это тело. Тогда 0 — единственный максимальный правый идеал. Значит, все неприводимые правые R-модули изоморфны правому регулярному модулю R_R. Получается, что множество $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ состоит из одного модуля R_R.
- Пусть $R = \mathbb{Z}$. Как уже отмечалось, неприводимые $\mathbb{Z}$-модули — это конечные циклические группы простого порядка. Ясно, что две такие группы $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ не изоморфны при $p \neq q$ из соображений мощности. Поэтому в качестве множества $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ можно выбрать $\{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid p \text{ простое}\}$.

Определение 6.12. Пусть M — произвольный правый R-модуль, $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — все неприводимые правые R-модули с точностью до изоморфизма.

- *Цоколь* модуля M — это сумма всех его неприводимых подмодулей:
$$\operatorname{soc} M = \sum\{N \leqslant M \mid N \text{ — неприводим}\}.$$
- Для каждого $\gamma \in \Gamma$ можно определить *изотипную (однородную) компоненту* модуля M как сумму всех неприводимых подмодулей класса γ:
$$\operatorname{soc}_\gamma M = \sum\{N \leqslant M \mid N \cong M_\gamma\}.$$
Изотипную компоненту также называют *γ-цоколем.*

В обоих случаях суммирование по пустому множеству будем считать нулевым подмодулем.

Из пунктов 1,2 критерия полупростоты получаем, что и цоколь, и каждая изотипная компонента заведомо являются полупростыми модулями. Более того, $\operatorname{soc} M$ — это наибольший полупростой подмодуль модуля M. В частности, верно следующее.

Замечание 6.13. Модуль M полупрост тогда и только тогда, когда $M = \operatorname{soc} M$.

Отметим, что в определении цоколя сумма не обязана быть прямой. Например, для векторного пространства V над полем, цоколь является суммой всех одномерных подпространств, что, конечно, совпадает со всем V, однако эта сумма очевидно не прямая при $\dim V \geqslant 2$. Тем не менее, цоколь можно представить в виде прямой суммы неприводимых модулей, убрав часть слагаемых (лемма 6.4 при $N = 0$). То же верно и для изотипных компонент.

Определение 6.14. *Вполне инвариантный* подмодуль $N \leqslant M$ — это такой подмодуль, что $\varphi(N) \subseteq N$ для всех $\varphi \in \operatorname{End} M$.

На правом модуле M_R действуют скаляры из R умножением справа и эндоморфизмы из $\operatorname{End} M_R$ умножением слева. Вполне инвариантный подмодуль — это абелева подгруппа в M, которая сохраняется сразу обоими действиями.

Теорема 6.15. Пусть M — произвольный правый R-модуль, $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — все неприводимые правые R-модули с точностью до изоморфизма. Тогда выполнено следующее.

1) Цоколь раскладывается в прямую сумму изотипных компонент[8]:

$$\operatorname{soc} M = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{soc}_\gamma M.$$

2) Всякая сумма некоторых изотипных компонент вполне инвариантна. Другими словами, для любого подмножества $\widetilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ и для произвольного эндоморфизма ϕ всего модуля M выполнено

$$\phi\left(\bigoplus_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \operatorname{soc}_\gamma M\right) \subseteq \bigoplus_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \operatorname{soc}_\gamma M.$$

3) Пусть M — полупростой модуль, $N \leqslant M$ — вполне инвариантный подмодуль. Тогда найдётся такое подмножество $\widetilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$, что

$$N = \bigoplus_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \operatorname{soc}_\gamma M.$$

Доказательство. 1) Из определения цоколя сразу получаем, что $\operatorname{soc} M = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{soc}_\gamma M$. Выберем произвольное $\gamma_0 \in \Gamma$ и обозначим $P = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\{\gamma_0\}} \operatorname{soc}_\gamma M$. Для доказательства первого пункта достаточно показать, что модуль $K = P \cap \operatorname{soc}_{\gamma_0} M$ является нулевым. Предположим, что $K \neq 0$.

Модуль $\operatorname{soc}_{\gamma_0} M$ является суммой неприводимых модулей класса γ_0. Убирая часть слагаемых, можно добиться того, чтобы эта сумма стала прямой (лемма 6.4 при $N = 0$). Однако K — подмодуль в $\operatorname{soc}_{\gamma_0} M$, а значит, K изоморфен прямой сумме некоторых неприводимых модулей класса γ_0 (следствие 6.8). Выберем какой-нибудь неприводимый подмодуль $K' \leqslant K$ класса γ_0. Тогда $K' \leqslant K \leqslant P$.

Далее по определению $\operatorname{soc}_\gamma M$ модуль $P = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma\setminus\{\gamma_0\}} \operatorname{soc}_\gamma M$ можно представить в виде суммы неприводимых модулей. Снова убирая часть слагаемых, можно получить разложение $P = \bigoplus\limits_{i\in I} N_i$, где каждый модуль N_i является неприводимым какого-то класса $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_0\}$. Однако модуль K' тоже неприводим, и при этом $K' \leqslant P$. Тогда K' должен быть изоморфен одному из модулей N_i (следствие 6.8). Однако эти модули заведомо разных классов изоморфизма, противоречие.

2) Пусть $\operatorname{soc}_\gamma M = \sum S_i$, где S_i — все неприводимые модули класса γ. Рассмотрим произвольный эндоморфизм $\varphi \in \operatorname{End} M_R$. Тогда $\varphi(\operatorname{soc}_\gamma M) = \sum \varphi(S_i)$. Так как

[8] Некоторые из них могут быть нулевыми

$\ker\phi \cap S_i$ является подмодулем в неприводимом модуле S_i, то либо $\ker\phi \cap S_i = S_i$, либо $\ker\phi \cap S_i = 0$. Следовательно, либо $\phi(S_i) = 0$, либо $\phi(S_i)$ изоморфен S_i. Поэтому образ $\varphi(\mathrm{soc}_\gamma M)$ снова является суммой неприводимых модулей класса γ, т.е. $\varphi(\mathrm{soc}_\gamma M) \subseteq \mathrm{soc}_\gamma M$. Таким образом, каждая изотипная компонента является вполне инвариантным подмодулем. Но любая сумма вполне инвариантных подмодулей снова вполне инвариантна.

3) Пусть $N \leqslant M$ вполне инвариантен, и M полупрост. Тогда N тоже полупрост, а значит, N раскладывается в сумму неприводимых модулей. Поэтому

$$N \subseteq \bigoplus_{\gamma\in\widetilde{\Gamma}} \mathrm{soc}_\gamma M, \quad \widetilde{\Gamma} = \{\gamma \in \Gamma \mid \exists P \leqslant N : \ P \cong M_\gamma\}.$$

Для доказательства обратного включения достаточно показать, что вместе с каждым неприводимым подмодулем $P \leqslant N$ класса γ модуль N содержит и всю изотипную компоненту $\mathrm{soc}_\gamma M$. Другими словами, мы должны проверить, что если P, Q — изоморфные неприводимые модули, причем $P \leqslant N$, $Q \leqslant M$, то выполнено $Q \leqslant N$.

Так как $P \cap Q$ является подмодулем и в P, и в Q, то либо $P = Q$, либо сумма $P + Q$ прямая. Первый случай нам точно подходит, разберём второй. По критерию полупростоты подмодуль $P \oplus Q \leqslant M$ выделяется прямым слагаемым, а значит, $M = P \oplus Q \oplus U$ для некоторого подмодуля $U \leqslant M$. Пусть $f\colon P \to Q$ — изоморфизм модулей. Рассмотрим отображение

$$\theta : M = P \oplus Q \oplus U \to M, \quad p + q + u \mapsto f(p) + f^{-1}(q) + u.$$

Тогда θ — эндоморфизм модуля M, причём $\theta(P) = Q$, а также $\theta(Q) = P$. Однако модуль N вполне инвариантен и содержит P, а значит, $N \supseteq \theta(P) = Q$, что и требовалось.

□

Задачи к лекции 6.

Задача 1. Пусть M — полупростой конечно порождённый R-модуль. Докажите, что он обладает композиционным рядом и его композиционная длина $l(M)$ равна количеству слагаемых в произвольном разложении M в прямую сумму неприводимых модулей.

Задача 2. Докажите, что для полупростого модуля M следующие условия равносильны: 1) M артинов, 2) M нётеров, 3) M конечно порожден.

Задача 3. Покажите, что $\mathrm{soc}\, M$ является наибольшим полупростым подмодулем модуля M.

Задача 4. Приведите пример ненулевого модуля с нулевым цоколем.

Задача 5. Покажите, что $\operatorname{soc}(\operatorname{soc} M) = \operatorname{soc} M$ для произвольного R-модуля M.

Задача 6. Для кольца R можно рассмотреть два цоколя: $S_1 = \operatorname{soc}(R_R)$ для правого регулярного модуля, и $S_2 = \operatorname{soc}({}_R R)$ — для левого. Покажите, что
1) S_1 и S_2 являются идеалами кольца R;
2) S_1 и S_2 не обязательно равны.

Задача 7. Верно ли, что цоколь циклического модуля является циклическим?

Задача 8. Пусть модуль M раскладывается в сумму подмодулей $M = M_1 + M_2$. Верно ли, что $\operatorname{soc} M = \operatorname{soc} M_1 + \operatorname{soc} M_2$?

Задача 9. Найдите цоколь $\mathbb{Z}_n$ как $\mathbb{Z}$-модуля.

7 Изотипные компоненты. Полупростые кольца. Теорема Веддербёрна-Артина.

Предложение 7.1. Пусть $\{M_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ — все неприводимые правые R-модули с точностью до изоморфизма. Рассмотрим полупростой модуль $M = \bigoplus\limits_{i \in I} S_i$, где S_i неприводимы. Для $\gamma \in \Gamma$ положим $I_\gamma = \{i \in I \mid S_i \cong M_\gamma\}$. Тогда

$$\operatorname{soc}_\gamma M = \bigoplus_{i \in I_\gamma} S_i.$$

Доказательство. Для любого $i \in I_\gamma$ модуль S_i принадлежит классу изоморфизма γ, а значит, $S_i \subseteq \operatorname{soc}_\gamma M$ по определению изотипной компоненты. Тогда выполнено $\bigoplus\limits_{i \in I_\gamma} S_i \subseteq \operatorname{soc}_\gamma M$, и остаётся доказать обратное включение.

Пусть $N \leqslant M$ — произвольный неприводимый подмодуль класса γ. Так как $M = \bigoplus\limits_{i \in I} S_i$, то каждый $a \in N$ единственным образом раскладывается в сумму элементов $s_i \in S_i$, в которой лишь конечное число слагаемых отлично от нуля. Для каждого $i \in I$ построим гомоморфизм $\phi_i : N \longrightarrow S_i$, который ставит в соответствие элементу $a \in N$ его проекцию s_i на прямое слагаемое S_i. Тогда ядро ϕ_i — это подмодуль в неприводимом модуле N, а образ — подмодуль в неприводимом модуле S_i. Значит, ϕ_i является либо изоморфизмом, либо нулевым гомоморфизмом. Тогда

$$N \subseteq \bigoplus_{i \in I\colon\, S_i \cong N} S_i.$$

В то же время N — это модуль класса γ, поэтому $\{i \in I \mid S_i \cong N\} = I_\gamma$. Таким образом, $N \subseteq \bigoplus\limits_{i \in I_\gamma} S_i$. Однако $N \leqslant M$ — произвольный неприводимый подмодуль класса γ. Значит, $\operatorname{soc}_\gamma M \subseteq \bigoplus\limits_{i \in I_\gamma} S_i$. □

Вспомним, что если $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — произвольное семейство колец, индексированное множеством Γ, то прямое произведение колец этого семейства определяется как множество отображений

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma = \left\{ f\colon \Gamma \to \bigsqcup_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma \mid f(\gamma) \in R_\gamma \right\}$$

с поточечными операциями сложения и умножения. Отображение f часто удобно записывать в виде $f = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)$.

Предложение 7.2. Пусть $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — все неприводимые правые R-модули с точностью до изоморфизма. Рассмотрим полупростой правый R-модуль M. Тогда[9]

$$\operatorname{End} M \cong \prod_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{End}(\operatorname{soc}_\gamma\, M).$$

Доказательство. Зададим отображение $\Phi : \operatorname{End} M \longrightarrow \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{End}(\operatorname{soc}_\gamma\, M)$. Каждому эндоморфизму $f \in \operatorname{End} M$ сопоставим $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$, где f_γ полагаем равным ограничению $f\Big|_{\operatorname{soc}_\gamma\, M}$. Так как изотипная компонента $\operatorname{soc}_\gamma\, M$ — это вполне инвариантный подмодуль в M, то f_γ является её эндоморфизмом. При этом

$$(f+g)_\gamma = (f+g)\Big|_{\operatorname{soc}_\gamma\, M} = f\Big|_{\operatorname{soc}_\gamma\, M} + g\Big|_{\operatorname{soc}_\gamma\, M} = f_\gamma + g_\gamma.$$

Снова пользуясь тем, что $\operatorname{soc}_\gamma\, M$ вполне инвариантен, получим

$$(f\circ g)_\gamma = (f\circ g)\Big|_{\operatorname{soc}_\gamma\, M} = f\Big|_{\operatorname{soc}_\gamma\, M} \circ g\Big|_{\operatorname{soc}_\gamma\, M} = f_\gamma \circ g_\gamma.$$

Далее, учитывая что на прямом произведение операции заданы поточечно, имеем

$$\prod_{\gamma\in\Gamma}(f+g)_\gamma = \prod_{\gamma\in\Gamma}(f_\gamma + g_\gamma) = \prod_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma + \prod_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma; \quad \prod_{\gamma\in\Gamma}(f\circ g)_\gamma = \prod_{\gamma\in\Gamma}(f_\gamma \circ g_\gamma) = \prod_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma \circ \prod_{\gamma\in\Gamma} g_\gamma.$$

Также $\Phi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Таким образом, построенное отображение Φ действительно является гомоморфизмом.

Так как M полупрост, то он совпадает со своим цоколем, а значит, раскладывается в сумму изотипных компонент: $M = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{soc}_\gamma\, M$. Поэтому если ограничение f на

[9] Некоторые изотипные компоненты могут быть нулевыми, тогда их кольца эндоморфизмов тоже будут нулевыми. Поэтому в этом прямом произведение возможны нулевые множители, которые можно отбросить с точностью до изоморфизма.

каждую изотипную компоненту $\mathrm{soc}_\gamma\, M$ равно нулю, то сам f — это тоже нулевой эндоморфизм. Отсюда гомоморфизм Φ инъективен.

Пусть $f_\gamma \in \mathrm{End}\,(\mathrm{soc}_\gamma\, M)$, $\gamma \in \Gamma$ — произвольное семейство эндоморфизмов. Так как $M = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{soc}_\gamma\, M$, то каждый $m \in M$ единственным образом представим в виде $m = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} m_\gamma$, где $m_\gamma \in \mathrm{soc}_\gamma\, M$, и лишь конечное число элементов m_γ отлично от нуля. Определим эндоморфизм f модуля M по правилу $f(m) = \bigoplus\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(m_\gamma)$. Тогда $\Phi(f) = \prod\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma$, откуда следует сюръективность Φ. □

Предложение 7.3. Пусть D — произвольное тело, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $D^n = \{(d_1, \ldots, d_n) \mid d_i \in D\}$, элементы которого мы будем считать строками с покоординатной операцией сложения. Зададим на D^n структуру правого модуля над кольцом матриц $R = M_n(D)$ посредством умножения строки на матрицу[10] справа. Тогда D^n является неприводимым R-модулем, и при этом его кольцо эндоморфизмов

$$\mathrm{End}\,(D^n_R) \cong D.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную ненулевую строку $v = (v_1, \ldots, v_n) \in D^n$, пусть $v_i \neq 0$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Покажем, что подмодуль $vR \leqslant D^n$, порождённый v, совпадает со всем D^n. Для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ рассмотрим матричную единицу E_{ij}, тогда

$$v \cdot E_{ij} \cdot (v_i^{-1}E) = (0, \ldots, \underset{j\text{-я позиция}}{1}, \ldots, 0).$$

Значит vR содержит все стандартные базисные векторы, складывая их и умножая на скалярные матрицы, можно получить любой вектор из D^n.

Зададим на D^n структуру левого D-модуля при помощи операции умножения всех элементов произвольной строки $v \in D^n$ на $d \in D$ слева. Определим отображение[11] $\phi : D \longrightarrow \mathrm{End}\,(D^n_R)$ по правилу $\phi(d)v = d \cdot v$, для всех $d \in D$, $v \in D^n$. Тогда для всех $d \in D$, $v_1, v_2 \in D^n$, $A_1, A_2 \in M_n(D)$ выполнено

$$\phi(d)(v_1A_1 + v_2A_2) = dv_1A_1 + dv_2A_2 = (\phi(d)v_1)A_1 + (\phi(d)v_2)A_2,$$

а значит, $\phi(d)$ действительно является эндоморфизмом D^n как правого R-модуля. При этом тривиальным образом $\phi(d_1 + d_2) = \phi(d_1) + \phi(d_2)$, $\phi(d_1d_2) = \phi(d_1)\phi(d_2)$, $\phi(1) = \mathrm{id}$, следовательно, ϕ — гомоморфизм колец.

[10]В этом случае $M_n(D)$ можно естественным образом отождествить с кольцом эндоморфизмов D^n как левого D-модуля, см. следствие 3.14. Тогда умножение строки на матрицу окажется не чем иным, как действие соответствующего эндоморфизма на строку.

[11]Это гомоморфизм колец из теоремы плотности.

Ядро $\ker\phi$ является идеалом в D, но D — тело. Причём $\phi(1) = \mathrm{id}$, поэтому $\ker\phi \neq D$, откуда $\ker\phi = 0$ и ϕ инъективен. Осталось проверить сюръективность. Рассмотрим произвольный $f \in \mathrm{End}\,(D^n_R)$. Пусть

$$f(1, 0\ldots, 0) = (d, *, \ldots, *).$$

Тогда для произвольной строки $(d_1, \ldots, d_n) \in D^n$ выполнено

$$f(d_1, \ldots, d_n) = f\left((1, 0, \ldots, 0) \cdot \begin{pmatrix} d_1 & \ldots & d_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}\right) = f(1, 0\ldots, 0) \cdot \begin{pmatrix} d_1 & \ldots & d_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (d, *, \ldots, *) \cdot \begin{pmatrix} d_1 & \ldots & d_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = (dd_1, \ldots, dd_n) = d \cdot (d_1, \ldots, d_n),$$

откуда следует сюръективность. □

Вспомним, что правый идеал N кольца R называется минимальным, если $N \neq 0$ и он не содержит в себе никаких других правых идеалов кроме нуля и самого себя. Неприводимые подмодули кольца как правого модуля над собой R_R — это в точности минимальные правые идеалы.

Следствие 7.4. Пусть $R = M_n(D)$ — кольцо матриц над телом D. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ рассмотрим подмножество

$$V_i^{(n)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{i1}, \ldots, a_{in} \in D \right\} \subseteq M_n(D),$$

состоящее из всех матриц, у которых строки с номерами $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ нулевые. Тогда $V_i^{(n)}$ — минимальный правый идеал кольца R. Причём его кольцо эндоморфизмов как правого R-модуля $\mathrm{End}\, V_i^{(n)} \cong D$.

Доказательство. Из правил матричного произведения сразу получаем, что $V_i^{(n)}$ — правый идеал. Причем $V_i^{(n)}$ изоморфен D^n как правому модулю над $R = M_n(D)$. Осталось применить предыдущее предложение. □

Теорема 7.5 (Молин, Веддербёрн, Артин)**.** Следующие условия эквивалентны.

1) Модуль R_R полупрост.

1') Модуль ${}_R R$ полупрост.

2) Кольцо R раскладывается в конечное прямое произведение колец матриц над телами:

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k),$$

где число k определено единственным образом и пары $(n_1, D_1), \ldots, (n_k, D_k)$ тоже определены однозначно с точностью до перенумерации и замены тел на изоморфные.

Доказательство (единственность разложения покажем позднее). В силу симметричности условия 2) достаточно показать, что 1) $\Leftrightarrow$ 2).

1) $\Rightarrow$ 2) Регулярный модуль R_R заведомо конечно порождён, т.к. порождается одной лишь единицей. Одновременно R_R полупрост, а значит, он раскладывается в конечную прямую сумму неприводимых подмодулей $R_R = \bigoplus\limits_{i=1}^{d} I_i$ (предложение 6.3). Неприводимые подмодули в R_R — это в точности минимальные правые идеалы кольца R.

Введём на множестве $\{I_1, \ldots, I_d\}$ отношение эквивалентности как изоморфизм модулей. Обозначим через k количество классов эквивалентности. С точностью до перенумерации можно считать, что $I_1, \ldots, I_k$ — представители всех этих классов. Для каждого $j = 1, \ldots, k$ положим n_j равным мощности j-го класса. Тогда, группируя изоморфные слагаемые, можно записать $R_R \cong I_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus I_k^{n_k}$, где полагаем $I_j^{n_j} = I_j \oplus \ldots \oplus I_j$ (n_j раз). В силу предложения 7.1 мы получили разложение полупростого модуля R_R на его однородные компоненты $I_j^{n_j}$ с точностью до изоморфизма. По теореме 3.15 $R \cong \operatorname{End} R_R$. По предложению 7.2 $\operatorname{End} R_R \cong \operatorname{End} I_1^{n_1} \times \ldots \times \operatorname{End} I_k^{n_k}$. По следствию 3.14 выполнено $\operatorname{End} I_j^{n_j} \cong M_{n_j}(D_j)$, где $D_j = \operatorname{End} I_j$ является телом по лемме Шура. Таким образом, $R \cong \prod\limits_{j=1}^{k} M_{n_j}(D_j)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Для $j = 1, \ldots, k$ обозначим $R_j = M_{n_j}(D_j)$. Применим следствие 7.4. Тогда $R_j = V_1^{(n_j)} \oplus V_2^{(n_j)} \oplus \ldots \oplus V_{n_j}^{(n_j)}$ — прямая сумма правых R_j -модулей, причём все $V_1^{(n_j)}, \ldots, V_{n_j}^{(n_j)}$ неприводимы. Значит, R_j — полупростой правый модуль над собой.

По условию $R = R_1 \times \ldots \times R_k$. Обозначим,

$$W_{ij} = (O_{n_1}, \ldots, O_{n_{j-1}}, V_i^{(n_j)}, O_{n_{j+1}}, \ldots, O_{n_k}) \subseteq R, \quad j = 1, \ldots, k;\ i = 1, \ldots n_j.$$

Тогда W_{ij} — правый идеал кольца R. Так как $V_i^{(n_j)}$ — неприводимый правый R_j-модуль, то W_{ij} — неприводимый правый R-модуль. Тогда

$$R_R = \bigoplus_{j=1}^{k} (O, \ldots, O, R_j, O, \ldots, O) = \bigoplus_{j=1}^{k} \bigoplus_{i=1}^{n_j} W_{ij}$$

является разложением в сумму неприводимых R-модулей, откуда R_R полупрост. $\square$

Определение 7.6. Кольцо R называется *полупростым*[12], если R_R (эквивалентно ${}_RR$) является полупростым модулем. Для таких колец также используются термины *классически полупростое кольцо* и *вполне приводимое кольцо.*

По теореме Веддербёрна-Артина, полупростое кольцо всегда изоморфно конечному прямому произведению колец матриц над телами.

Предложение 7.7. Полупростое кольцо является артиновым и нётеровым как справа, так и слева.

Доказательство. Модуль R_R раскладывается в конечную прямую сумму неприводимых подмодулей. Каждый неприводимый модуль является и артиновым, и нётеровым тривиальным образом. Однако конечная прямая сумма артиновых (нётеровых) модулей снова артинов (нётеров) модуль (следствие 4.5). Для ${}_RR$ рассуждения аналогичны. $\square$

Предложение 7.8. Пусть R — полупростое кольцо. Тогда все правые и все левые модули над ним являются полупростыми.

Доказательство. Каждый модуль M является фактормодулем некоторого свободного модуля F, т.е. $M \cong F/K$ для подходящего подмодуля $K \leqslant F$ (предложение 2.15). В то же время свободный модуль изоморфен прямой сумме некоторого количества копий регулярного модуля: $F \cong \bigoplus_{i \in I} R_R$ (предложение 2.13). Однако модуль R_R полупрост, т.е. является суммой неприводимых подмодулей. Но тогда F тоже окажется суммой неприводимых, следовательно, F полупрост. При этом M — фактормодуль модуля F, а значит, тоже полупрост. $\square$

Задачи к лекции 7.

Задача 1. Пусть M — конечно порождённый модуль над полупростым кольцом. Докажите, что кольцо $\mathrm{End}\,(M)$ полупросто.

Задача 2. Является ли полупростым кольцо действительных верхнетреугольных 2×2 матриц?

Задача 3. Покажите, что любое поле является полупростым кольцом.

Задача 4. Покажите, что ни для какой конечной группы G групповое кольцо $\mathbb{Z}G$ не полупросто.

Задача 5. Является ли полупростым кольцо $M_n(\mathbb{Z})$?

[12] Иногда этот термин используется в другом значении. Дальше мы встретимся с полупростыми кольцами в смысле Джекобсона.

Задача 6. Покажите, что прямое произведение колец $R = R_1 \times R_2$ полупросто тогда и только тогда, когда полупросты сомножители R_1 и R_2.

Задача 7. Покажите, что произвольнго идеала I полупростого кольца R фактор кольцо R/I тоже полупросто.

8 Описание неприводимых модулей над полупростым кольцом. Теорема Веддербёрна-Артина для простых колец и для алгебр над полем. Алгебра Вейля.

Теорема 8.1 (Описание неприводимых модулей над полупростым кольцом)**.** Пусть R — полупростое кольцо. Тогда любой неприводимый правый R-модуль изоморфен некоторому минимальному правому идеалу кольца R. Далее пусть известно разложение $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k)$. Обозначим

$$V_i^{(n_j)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in_j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a_{i1}, \ldots, a_{in_j} \in D_j \right\} \subseteq M_{n_j}(D_j),$$

$$W_{ij} = (O_{n_1}, \ldots, O_{n_{j-1}}, V_i^{(n_j)}, O_{n_{j+1}}, \ldots, O_{n_k}) \subseteq R, \quad j = 1, \ldots, k; \; i = 1, \ldots n_j.$$

Тогда для каждого $j = 1, \ldots, k$ имеется изоморфизм правых R-модулей:

$$W_{1j} \cong W_{2j} \cong ... \cong W_{n_j j}.$$

При этом их кольца эндоморфизмов

$$\operatorname{End} W_{ij} \cong D_j, \quad i = 1, \ldots n_j.$$

Модули $W_{11}, W_{12}, \ldots, W_{1k}$ попрано не изоморфны. Произвольный неприводимый правый[13] R-модуль изоморфен одному из $W_{11}, W_{12}, \ldots, W_{1k}$. В частности, существует ровно k неприводимых правых R-модулей с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Всякий неприводимый правый R-модуль M изоморфен R_R/N, где $N \leqslant R_R$ — максимальный правый идеал. По критерию полупростоты N выделяется в R_R прямым слагаемым, т.е. $R_R = N \oplus N'$ для некоторого подмодуля $N' \leqslant R_R$. Но

[13]Для левых модулей нужно будет вместо $V_i^{(n_j)}$ рассмотреть аналогичные левые идеалы, где вместо ненулевой строки берется ненулевой столбец.

тогда $N' \cong R_R/N \cong M$, а значит, N' неприводим. Но неприводимые подмодули в R_R — это в точности минимальные правые идеалы.

Пусть $R \cong M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k)$. Из доказательства теоремы Веддербёрна-Артина мы знаем, что $R_R = \bigoplus W_{ij}$ — разложение в сумму неприводимых модулей. По предыдущему, произвольный неприводимый правый R-модуль изоморфен некоторому минимальному правому идеалу $N' \leqslant R_R = \bigoplus W_{ij}$. Тогда N' должен быть изоморфен одному из W_{ij} в силу следствия 6.8.

Зафиксируем $j \in \{1, \ldots, k\}$ и выберем произвольные $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n_j\}$. Покажем, что $W_{\alpha j} \cong W_{\beta j}$ как R-модули. Рассмотрим матричную единицу $E_{\alpha\beta}$ размера $n_j \times n_j$ и положим

$$F_{\alpha\beta} = (O_{n_1}, \ldots, O_{n_{j-1}}, E_{\alpha\beta}, O_{n_{j+1}}, \ldots, O_{n_k}) \in R.$$

Определим отображение $W_{\beta j} \longrightarrow W_{\alpha j}$ как умножение на $F_{\alpha\beta}$ <u>слева</u>. Так как модули <u>правые</u>, то такое отображение действительно будет гомоморфизмом модулей. Кроме того, ограничение этого отображения на j-й прямой множитель $M_{n_j}(D_j)$ переносит строку с номером α на место строки с номером β. Отсюда следует инъективность и сюръективность.

Теперь зафиксируем $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, k\}$ и покажем, что $W_{1\alpha} \ncong W_{1\beta}$. Рассмотрим единичную матрицу E размера $n_\alpha \times n_\alpha$ и положим

$$F = (O_{n_1}, \ldots, O_{n_{\alpha-1}}, E, O_{n_{\alpha+1}}, \ldots, O_{n_k}) \in R.$$

Тогда $w \cdot F = w$ для всех $w \in W_{1\alpha}$, но $W_{1\beta} \cdot F = O$. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $\phi : W_{1\alpha} \longrightarrow W_{1\beta}$, тогда $\phi(w) = \phi(w \cdot F) = \phi(w) \cdot F = O$. Значит, ϕ может быть только нулевым, отсюда $W_{1\alpha} \ncong W_{1\beta}$.

Покажем, что $\operatorname{End} W_{ij} \cong D_j$. В силу следствия 7.4 достаточно поверить, что кольцо эндоморфизмов правого R-модуля W_{ij} изоморфно кольцу эндоморфизмов правого модуля $V_i^{(n_j)}$ над кольцом $M_{n_j}(D_j)$. Действительно, если $\phi \in \operatorname{End} V_i^{(n_j)}$, тогда определим $\widetilde{\phi} \in \operatorname{End} W_{ij}$ по правилу

$$\widetilde{\phi}(O, \ldots, A, \ldots, O) = (O, \ldots, \phi(A), \ldots, O), \quad A \in V_i^{(n_j)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}((O, \ldots, A, \ldots, O) + (O, \ldots, A', \ldots, O)) = \widetilde{\phi}(O, \ldots, A + A', \ldots, O) = \\ = (O, \ldots, \phi(A + A'), \ldots, O) = (O, \ldots, \phi(A) + \phi(A'), \ldots, O) = \\ = (O, \ldots, \phi(A), \ldots, O) + (O, \ldots, \phi(A'), \ldots, O) = \\ = \widetilde{\phi}(O, \ldots, A, \ldots, O) + \widetilde{\phi}(O, \ldots, A', \ldots, O).\end{aligned}$$

Для любого $(B_1, \ldots, B_k) \in R$ имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}((O, \ldots, A, \ldots, O) \cdot (B_1, \ldots, B_k)) = \widetilde{\phi}(O, \ldots, AB_j, \ldots O) = \\ = (O, \ldots, \phi(AB_j), \ldots, O) = (O, \ldots, \phi(A)B_j, \ldots, O) = \\ = (O, \ldots, \phi(A), \ldots, O) \cdot (B_1, \ldots, B_k) = \\ = \widetilde{\phi}(O, \ldots, A, \ldots, O) \cdot (B_1, \ldots, B_k),\end{aligned}$$

откуда $\widetilde{\phi}$ действительно является эндоморфизмом правого R-модуля W_{ij}. В силу того, что операции на прямом произведении заданы покомпонентно, то сразу из определения $\widetilde{\phi}$ получаем $\widetilde{\phi_1 + \phi_2} = \widetilde{\phi}_1 + \widetilde{\phi}_2$, а также $\widetilde{\phi_1 \circ \phi_2} = \widetilde{\phi}_1 \circ \widetilde{\phi}_2$ и $\widetilde{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$. Кроме того, тоже по определению отображение $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ инъективно.

Осталось проверить сюръективность построенного гомоморфизма колец эндоморфизмов $\operatorname{End} V_i^{(n_j)} \longrightarrow \operatorname{End} W_{ij}$, $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$. Выберем произвольный $f \in \operatorname{End} W_{ij}$. Тогда для каждого $A \in V_i^{(n_j)}$ найдётся $B \in V_i^{(n_j)}$, что $f(O, \ldots, A, \ldots, O) = (O, \ldots, B, \ldots, O)$. Положим $\psi(A) = B$. Непосредственные проверки аналогичные тем, что проводились для $\widetilde{\phi}$, показывают, что ψ — эндоморфизм модуля $V_i^{(n_j)}$, причём $\widetilde{\psi} = f$. $\square$

Доказательство единственности в теореме Молина-Веддербёрна-Артина. Сначала отметим, что число k определено однозначно как количество попарно неизоморфных неприводимых правых R-модулей. Далее пусть имеется изоморфизм колец

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k) \cong M_{\widetilde{n}_1}(\widetilde{D}_1) \times \ldots \times M_{\widetilde{n}_{\widetilde{k}}}(\widetilde{D}_k).$$

Тогда найдутся два разложения модуля R_R в сумму неприводимых:

$$\bigoplus_{j=1}^{k} \bigoplus_{i=1}^{n_j} W_{ij} \cong R_R \cong \bigoplus_{j=1}^{k} \bigoplus_{i=1}^{\widetilde{n}_j} \widetilde{W}_{ij}.$$

По предложению 6.10 прямые слагаемые в обоих суммах можно упорядочить так, чтобы они оказались попарно изоморфны. Пусть W_{11} оказался изоморфен $\widetilde{W}_{ij}$. Однако $W_{11} \cong W_{21} \cong ... \cong W_{n_1 1}$ и остальные слагаемые им не изоморфны. Точно так же $\widetilde{W}_{1j} \cong \widetilde{W}_{2j} \cong ... \cong \widetilde{W}_{\widetilde{n}_j j}$ и остальные слагаемые им не изоморфны. Снова по предложению 6.10 получаем, что $n_1 = \widetilde{n}_j$. Далее убираем все слагаемые $\{W_{11}, W_{21}, ..., W_{n_1 1}\}$ в первой сумме и все слагаемые $\{\widetilde{W}_{1j}, \widetilde{W}_{2j}, ..., \widetilde{W}_{\widetilde{n}_j j}\}$ во второй сумме. Теперь мы можем осуществить индукцию по k. База индукции $k = 0$ соответствует пустой сумме неприводимых R-модулей, этот случай тривиален.

Итак, можно считать, что $n_j = \widetilde{n}_j$, $W_{ij} \cong \widetilde{W}_{ij}$ для всех i, j. Тогда

$$D_j \cong \operatorname{End} W_{1j} \cong \operatorname{End} \widetilde{W}_{1j} \cong \widetilde{D}_j, \quad j = 1, \ldots, k,$$

откуда получаем, что тела тоже определены однозначно. $\square$

Определение 8.2 (напоминание)**.** *Простое кольцо* — это кольцо, в котором ровно два собственных идеала: $\{0\}$, R.

Как мы увидим дальше простое кольцо необязательно полупросто. Однако при условии артиновости эти классы колец действительно оказываются связаны между собой.

Теорема 8.3 (Строение простых артиновых колец)**.** Следующие условия на кольцо R эквивалентны:

1) R простое и артиново справа;

2) R полупростое и все неприводимые правые R-модули изоморфны;

3) $R \cong M_n(D)$, D — тело;

1'), 2') левые аналоги 1), 2).

Натуральное n определено единственным образом и тело D определено однозначно с точностью до изоморфизма.

Доказательство. В силу симметричности 3) достаточно доказать эквивалентность условий 1)–3).

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть cR — произвольный минимальный правый идеал R. Он существует, поскольку R артиново справа. Из простоты R имеем $R = RcR = \sum_{s\in R} scR$ — сумма правых модулей. Правый идеал scR — образ cR при действии гомоморфизма правых модулей $cr \mapsto scr$. Гомоморфизм сюръективен по построению, его ядро либо 0, либо cR. Поэтому scR либо нулевой, либо изоморфен cR. Отсюда R_R полупрост. Любой неприводимый правый R-модуль изоморфен минимальному правому идеалу в силу теоремы 8.1.

2) $\Rightarrow$ 3) По теореме о строении неприводимых модулей над полупростым кольцом получаем $k = 1$.

3) $\Rightarrow$ 1) Простота кольца $R = M_n(D)$ доказана ранее (следствие 1.24). Так как кольцо $M_n(D)$ полупросто, то оно артиново (предложение 7.7). □

Пусть теперь $\mathbb{F}$ — произвольное поле, R — ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{F}$. Тогда можно отождествить $\mathbb{F}$ с множеством скалярных элементов алгебры $\{\lambda \cdot 1_R \mid \lambda \in \mathbb{F}\}$. Поэтому далее считаем, что $\mathbb{F} \subseteq R$.

Каждый R-модуль M является также и модулем над $\mathbb{F}$, т.к. $\mathbb{F} \subseteq R$. Другими словами, M является одновременно и линейным пространством над полем $\mathbb{F}$.

Для каждого $\lambda \in \mathbb{F}$ определён эндоморфизм модуля $\phi_\lambda : M \longrightarrow M$, $\phi_\lambda(m) = m\lambda$. Это корректно определённый эндоморфизм т.к. все элементы поля лежат в центре кольца. Причём для любого эндоморфизма $\phi \in \operatorname{End} M$ выполнено

$$\phi_\lambda(\phi(m)) = \phi(m)\lambda = \phi(m\lambda) = \phi(\phi_\lambda(m)), \quad m \in M.$$

Таким образом, все ϕ_λ лежат в центре кольца эндоморфизмов. В дальнейшем вместо ϕ_λ будем писать просто λ. Получается, что $\operatorname{End} M$ естественным образом тоже является алгеброй над полем $\mathbb{F}$.

Лемма 8.4. Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, R — $\mathbb{F}$-алгебра, M_R — неприводимый R-модуль, конечномерный над $\mathbb{F}$. Тогда $\operatorname{End} M_R \cong \mathbb{F}$.

Доказательство. Каждый R-эндоморфизм $\varphi \in \operatorname{End} M_R$ является одновременно $\mathbb{F}$-линейным оператором на $M_{\mathbb{F}}$. В силу алгебраической замкнутости поля он обладает собственным значением $\lambda \in \mathbb{F}$. Значит, оператор $\varphi - \lambda$ вырожден. По лемме Шура он может быть только нулевым. Значит, $\operatorname{End} M_R$ состоит только из скалярных операторов (с любым скаляром из $\mathbb{F}$) и поэтому $\operatorname{End} M_R \cong \mathbb{F}$. $\square$

Теорема 8.5 (Молин, Веддербёрн, Артин, об алгебрах)**.** Пусть R — ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{F}$. Следующие условия эквивалентны.

1) Модуль R_R полупрост.

1') Модуль ${}_RR$ полупрост.

2) Алгебра R раскладывается в конечную прямую сумму $\mathbb{F}$-алгебр матриц:

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus M_{n_k}(D_k),$$

где D_j являются алгебрами с делением над полем $\mathbb{F}$. Число k определено единственным образом и пары $(n_1, D_1), \ldots, (n_k, D_k)$ тоже определены однозначно с точностью до перенумерации и алгебр с делением на изоморфные.

В случае $\dim_{\mathbb{F}} R < \infty$, выполнено $\dim_{\mathbb{F}} D_j < \infty$ для всех j. Если $\dim_{\mathbb{F}} R < \infty$ и поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто то $D_j \cong \mathbb{F}$ для всех j.

Доказательство. Доказательство точно такое же как в теореме Молина-Веддербёрна-Артина для колец. Непосредственно проверяется, что все используемые в доказательстве изоморфизмы колец являются также изоморфизмами алгебр. Мы опустим эти технические проверки. Полное доказательство можно найти, например, в книге Ричарда Пирса «Ассоциативные алгебры», Мир, 1986.

Пусть $\dim_{\mathbb{F}} R < \infty$. Если для хотя бы одного j выполнено $\dim_{\mathbb{F}} D_j = \infty$, то тогда $\dim_{\mathbb{F}}(M_{n_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus M_{n_k}(D_k)) = \infty$, противоречие. Значит, $\dim_{\mathbb{F}} D_j < \infty$ для всех j. Пусть при этом $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто. В доказательстве теоремы Молина-Веддербёрна-Артина тела D_j являются кольцами эндоморфизмов неприводимых R-модулей. Тогда по предыдущей лемме $D_j \cong \mathbb{F}$. $\square$

Далее мы приведём классический пример простого, но не полупростого кольца.

Определение 8.6. Первая *алгебра Вейля* над полем $\mathbb{F}$ определяется как как фактор свободной алгебры $A_1(\mathbb{F}) = \mathbb{F}\langle x, y\rangle / (yx - xy - 1)$ по идеалу порождённому элементом $yx - xy - 1$.

Зададим на алгебре многочленов $\mathbb{F}[x]$ структуру левого $A_1(\mathbb{F})$-модуля. Сопоставим переменной $x \in A_1(\mathbb{F})$ линейный оператор на $\mathbb{F}[x]$, умонажющий многочлен на x. Переменной y сопоставим формальное дифференцирование ∂_x по переменной x. По правилу Лейбница $\partial_x(xP) = P + x\partial_x P$, где $P \in \mathbb{F}[x]$, поэтому $\partial_x x - x\partial_x - 1 = 0$ как операторы. Таким образом, можно понимать алгебру Вейля как алгебру формальных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.

Аналогично определяются алгебры $A_n(k)$ — берется n переменных и n соответствующих дифференциальных операторов.

Отметим, что $R = A_1(\mathbb{F})$ — не артиново кольцо: $R \supset xR \supset x^2R \ldots$ — бесконечная строго убывающая цепочка правых идеалов.

Предложение 8.7. Пусть $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$. Тогда $A_1(\mathbb{F})$ — простое кольцо.

Доказательство. Заметим, что элементы $A_1(\mathbb{F})$ обладают канонической формой вида $\sum\limits_{k\in K} a_k x^{i_k}\partial_x^{j_k}$, где K — конечное множество индексов, i_k, j_k — неотрицательные целые числа.

Заметим, что переход от элемента $r \in A_1(\mathbb{F})$ к *коммутатору* $[r,s] = rs - sr$ с элементом $s \in \{x, \partial_x\}$ уменьшает на единицу степени всех "мономов" в его канонической форме либо по ∂_x, либо по x, и умножает их на ненулевые скаляры: для оператора $T = a_k x^{i_k}\partial_x^{j_k}$ имеем $\partial_x T = a_k i_k x^{i_k-1}\partial_x^{j_k} + T\partial_x$;

$\partial_x x = 1 + x\partial_x$, поэтому $\partial_x^m x = \partial_x^{m-1} + \partial_x^{m-1}x\partial_x = \ldots = m\partial_x^{m-1} + x\partial_x^m$,

откуда $Tx = a_k j_k x^{i_k}\partial_x^{j_k-1} + xT$.

Поэтому если идеал $I \lhd A_1(\mathbb{F})$ содержит ненулевой элемент r, то его можно подобными операциями, не покидая I, перевести в ненулевой скаляр. Для этого достаточно зафиксировать в r произвольный "моном" $x^{i_k}\partial_x^{j_k}$ среди "мономов" с максимальной суммой $i_k + j_k$ и взять i_k раз коммутатор с ∂_x и j_k раз коммутатор с x. $\square$

Следствие 8.8. Существует простое, но не артиново кольцо. В частности, существует простое, но не полупростое кольцо.

Задачи к лекции 8.

Задача 1. Пусть $\mathbb{F}$ — поле, G — конечная группа. Докажите, что групповая алгебра $\mathbb{F}G$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathrm{char}F \nmid |G|$ (теорема Машке).

Задача 2. Покажите, что если в группе G содержится больше одного элемнта, то групповая алгебра $\mathbb{F}G$ не является простой.

Задача 3. Изоморфны ли групповые кольца $\mathbb{R}\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{R}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$?

Задача 4. Найдите разложение в прямое произведение матричных колец кольца $\mathbb{R}Q_8$.

Задача 5. Пусть A— конечномерная алгебра над полем. Докажите, что кольцо $M_n(A)$— полупросто тогда и только тогда, когда A— полупроста.

Задача 6. При каких n кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$ полупросто?

9 Радикал Джекобсона

Вспомним, что подмодуль $N \lneq M$ называется *максимальным*, если не найдется такого подмодуля K, что $N \lneq K \lneq M$. В силу теоремы о соответствии это равносильно тому, что M/N неприводим.

Определение 9.1. *Радикал Джекобсона* $\operatorname{rad} M$ модуля M — это пересечение всех максимальных подмодулей. Если максимальных подмодулей в M нет, то полагаем $\operatorname{rad} M = M$.

Вспомним, что $(\mathbb{Q}; +, 0)$ не имеет максимальных подгрупп (предложение 3.5), отсюда $\operatorname{rad} \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}$.

Лемма 9.2. Радикал $\operatorname{rad} M$ — это подмодуль в M. Если $N \leqslant M$, то из $\operatorname{rad}(M/N) = 0$ следует $\operatorname{rad} M \subseteq N$. Также выполнено $\operatorname{rad}(M/\operatorname{rad} M) = 0$.

Доказательство. Радикал — подмодуль как пересечение подмодулей. Остальное следует из теоремы о соответствии подмодулей. □

Лемма 9.3. Радикал Джекобсона полупростого модуля равен 0.

Доказательство. Если $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$, S_i — неприводимые R-модули, то модули $M_j = \bigoplus_{i \in I, i \neq j} S_i$ пересекаются по 0, а факторы $M/M_j \cong S_j$. □

Теорема 9.4. Модуль M_R конечно порождён и полупрост тогда и только тогда, когда он артинов и имеет нулевой радикал Джекобсона.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Радикал равен нулю по лемме. Если M конечно порожденный полупростой модуль, то он изоморфен конечной прямой сумме неприводимых модулей (предложение 6.3). Тогда M артинов как конечная прямая сумма артиновых модулей (следствие 4.5).

($\Leftarrow$) Для $M = 0$ очевидно, пусть $M \neq 0$. В силу $\operatorname{rad} M = 0$ найдется семейство $S = \{M_i\}_{i \in I}$ подмодулей M, таких что $\bigcap_{i \in I} M_i = 0$ и все M/M_i неприводимы. Обозначим через P множество всевозможных конечных пересечений модулей из S. В силу артиновости M, множество P содержит минимальный по включению элемент, скажем, $N = M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_n}$. Покажем, что N может быть равен только 0. Предположим противное, тогда ввиду $\bigcap_{i \in I} M_i = 0$ можно найти подмодуль $M_i \not\supseteq N$. Откуда $M_i \cap N$ строго меньше N, что противоречит минимальности N.

Далее $\varphi\colon M \to (M/M_{i_1}) \oplus \ldots \oplus (M/M_{i_n})$, $m \mapsto (m + M_{i_1}, \ldots, m + M_{i_n})$ — это гомоморфизм R-модулей. Его ядро совпадает с $M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_n} = N$, а потому нулевое. Значит, M изоморфен подмодулю конечнопорождённого полупростого модуля $(M/M_1) \oplus \ldots \oplus (M/M_n)$, следовательно M тоже полупрост и конечнопорождён (см. следствие 6.8 и предложение 6.3). □

Теорема 9.5 (о радикале Джекобсона кольца)**.** Пусть $R \neq 0$. Для элемента $r \in R$ эквивалентны следующие условия:

1) $Mr = 0$ для любого правого неприводимого R-модуля M;
2) r принадлежит пересечению всех максимальных правых идеалов R;
3) для всех $x \in R$ элемент $1 - rx$ обратим справа;
4) для всех $x, y \in R$ элемент $1 - yrx$ обратим;
1') $rM = 0$ для любого левого неприводимого R-модуля M;
2') r принадлежит пересечению всех максимальных левых идеалов R;
3') для всех $x \in R$ элемент $1 - xr$ обратим слева.

Доказательство. Поскольку 4) — симметричное условие, достаточно показать эквивалентность 1)–4).

1) $\Rightarrow$ 2) Если $N \subseteq R$ — максимальный правый идеал, то R_R/N — неприводимый модуль, откуда $(R/N)r = 0 + N$. Поэтому $0 + N = (1 + N)r = r + N$ и $r \in N$.

2) $\Rightarrow$ 3) Предположим противное. Пусть $1 - rx$ необратим справа, тогда $1 - rx$ содержится в некотором максимальном правом идеале N. В силу 2) получаем, что $rx \in N$, откуда $1 = (1 - rx) + rx \in N$. Противоречие с тем, что N собственный.

3) $\Rightarrow$ 1): Пусть $0 \neq m \in M$, где M — неприводимый модуль. Предположим, что $mr \neq 0$, тогда $mrR = M$. В частности, для некоторого x выполнено $mrx = m$, откуда $m(1 - rx) = 0$. Поскольку $1 - rx$ обратим справа по условию, имеем противоречие с тем, что $m \neq 0$.

4) $\Rightarrow$ 3) Положим $y = 1$.

1) + 3) $\Rightarrow$ 4) Так как $Mr = 0$ для всякого неприводимого модуля M, то для всех $y \in R$ имеем $Myr \subseteq Mr = 0$. Поэтому yr также удовлетворяет 1), а значит и 3), то есть $1 - (yr)x$ обладает правым обратным. Выберем его в виде $1 - b$, получаем $(1 - yrx)(1 - b) = 1$. Раскрывая скобки, имеем $b = -yrx(1 - b)$. Заметим, что $Mb = M(-yrx)(1 - b) \subseteq (Mr)x(1 - b) = 0$. Снова получаем, что b удовлетворяет 1), а значит и 3), то есть $1 - b$ имеет правый обратный, скажем, $1 - c$. Поэтому $1 - c = (1 - yrx)(1 - b)(1 - c) = 1 - yrx$, откуда $c = yrx$. Таким образом, $1 - b$ — двусторонний обратный для $1 - yrx$. $\square$

Элементы, удовлетворяющие условиям предыдущей теоремы, образуют важный идеал кольца.

Определение 9.6. *Радикал Джекобсона* $J(R)$ кольца $R \neq 0$ — пересечение всех максимальных правых (эквивалентно, левых) идеалов R. Считаем также $J(0) = 0$.

Любой пункт предыдущей теоремы может быть взят в качестве определения радикала Джекобсона кольца.

Следствие 9.7. Радикал Джекобсона кольца является двусторонним идеалом.

Доказательство. Радикал Джекобсона является пересечением правых идеалов, поэтому он сам окажется правым идеалом. Однако радикал еще и совпадает с пересечением левых идеалов. □

Следствие 9.8. Радикал Джекобсона кольца совпадает с радикалами левого и правого регулярных модулей $J(R) = \operatorname{rad} R_R = \operatorname{rad} {}_RR$.

Доказательство. Максимальные левые (правые) идеалы — это в точности максимальные подмодули левого (правого) регулярного модуля. □

Отметим, что для колец без единицы, вообще говоря, $\operatorname{rad} R_R$ и $\operatorname{rad} {}_RR$ могут не совпадать.

Определение 9.9. *Аннулятором* правого R-модуля M называют множество $\operatorname{Ann} M = \{r \in R \mid mr = 0 \ \ \forall m \in M\}$.

Следствие 9.10. Радикал Джекобсона ненулевого кольца совпадет с пересечением аннуляторов всех неприводимых правых (эквивалентно левых) модулей.

Доказательство. Переформулировка пунктов 1), 1') теоремы. □

Для правого R-модуля M и некоторого подмножества $S \subseteq R$ положим $\operatorname{Ann}_M(S) = \{m \in M \mid ms = 0 \ \forall s \in S\}$. Кольцо R называется полулокальным, если факторкольцо $R/J(R)$ полупросто. Как мы дальше увидим, все артиновы кольца полулокальные. Полулокальные кольца будут рассмотрены подробнее в следующей лекции.

Теорема 9.11. Для любого правого R-модуля M выполнено $\operatorname{soc} M \subseteq \operatorname{Ann}_M(J(R))$. Если же факторкольцо $R/J(R)$ полупросто, то $\operatorname{soc} M = \operatorname{Ann}_M(J(R))$.

Доказательство. По определению цоколь является суммой всех неприводимых подмодулей, поэтому включение $\operatorname{soc} M \subseteq \operatorname{Ann}_M(J(R))$ вытекает из пункта 1) теоремы. Пусть $R/J(R)$ полупросто. Обозначим $N = \operatorname{Ann}_M(J(R))$, $\overline{R} = R/J(R)$. Надо доказать, что $N \subseteq \operatorname{soc} M$. На N естественным образом вводится струтура $\overline{R}$-модуля: $m(r + J(R)) = mr$. Так как кольцо $\overline{R}$ полупросто, то M — полупростой $\overline{R}$-модуль, т.е. $N_{\overline{R}} = \bigoplus_{i \in I} (N_i)_{\overline{R}}$, где все $(N_i)_{\overline{R}}$ неприводимы. Но отсюда для всех $n \in N_i \setminus \{0\}$ выполнено $nR = n\overline{R} = N_i$. Значит, каждый модуль N_i является неприводимым и над кольцом R тоже. Итак, $N_R = \bigoplus_{i \in I} (N_i)_R$, и все $(N_i)_R$ неприводимы. Поэтому $N_i \subseteq \operatorname{soc} M$ для всех i, откуда $N \subseteq \operatorname{soc} M$, что и требовалось. □

Определение 9.12. Элемент $r \in R$ называется *квазирегулярным*, если $1-r$ обратим. Аналогично определяется квазирегулярность справа и слева.

Определение 9.13. Правый (левый, двусторонний) идеал I называется *квазирегулярным*, если все его элементы квазирегулярны.

Следствие 9.14. Радикал Джекобсона является квазирегулярным идеалом и, более того, он содержит все правые, а также левые квазирегулярные идеалы.

Доказательство. Радикал квазирегулярен в силу пункта 4) теоремы при $x = y = 1$. Если I — правый квазирегулярный идеал, то для всех $r \in I$ и любого элемента x кольца R имеем $xr \in I$, а значит, $1 - rx$ обратим. Поэтому $I \subseteq J(R)$ в силу пункта 3) теоремы. □

Отметим, что какие-то отдельные квазирегулярные элементы могут и не содержаться в радикале.

Понятие квазирегулярного элемента может быть обобщено на случай кольца без единицы: элемент r квазирегулярен справа, если найдется элемент s, такой что $r + s = rs$. Для кольца с единицей это определение эквивалентно предыдущему, т.к. его можно переписать в виде $(1 + r)(1 + s) = 1$. Обобщенное понятие квазирегулярности позволяет определить радикал Джекобсона для кольца без единицы.

Определение 9.15. *Полупримитивное (полупростое по Джекобсону)* кольцо — это такое кольцо, у которого $J(R) = 0$.

Пример 9.16. Рассмотрим примеры колец с нулевым радикалом:

- простые кольца,
- полупростые кольца (применим лемму 9.3 к модулю R_R),
- кольцо целых чисел $J(\mathbb{Z}) = \bigcap\limits_{p \text{ простое}} p\mathbb{Z} = 0$;
- для любого кольца R выполнено $J(R/J(R)) = 0$ в силу теоремы о соответствии правых идеалов, применённой к максимальным правым идеалам кольца R.

Следствие 9.17. Кольцо R полупросто тогда и только тогда, когда оно артиново справа и $J(R) = 0$.

Доказательство. Применим доказанную ранее теорему о конечнопорождённом полупростом модуле к R_R (теорема 9.4). □

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 9.18. Если кольцо R артиново (нётерово) справа и $I \lhd R$, тогда факторкольцо R/I тоже артиново (нётерово) справа.

Доказательство. Если модуль R_R артинов, то R/I — артинов правый R-модуль (предложение 4.4). Пусть $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ — убывающая цепочка подмодулей R/I как правого R/I-модуля. Тогда она будет цепочкой подмодулей R/I как правого R-модуля. Цепочка оборвется в силу артиновости. Итак, R/I — артинов правый R/I-модуль, т.е. R/I — артиново справа кольцо. □

Аналогичное утверждение для подколец неверно.

Следствие 9.19. Если R артиново справа, то $R/J(R)$ полупросто.

Доказательство. По предыдущему предложению факторкольцо $R/J(R)$ артиново справа. При этом, как уже отмечалось в примерах, $J(R/J(R)) = 0$. Остаётся применить предыдущее следствие. $\square$

Задачи к лекции 9.

Задача 1. Привести пример кольца без единицы, в котором не совпадают пересечение всех левых максимальных идеалов и всех правых максимальных идеалов.

Задача 2. Пусть J — некоторый идеал, содержащийся в $J(R)$. Докажите, что для любого i элементы $1+J^i$ образуют группу по умножению, а также что факторгруппа $(1+J^i)/(1+J^{i+1})$ определена и изоморфна аддитивной группе $J^i/(J^{i+1})$.

Задача 3. Для любого $n > 1$ и кольца R покажите, что $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$.

Задача 4. Найдите $J(R[x])$ для коммутативного кольца коэффициентов R.

Задача 5. Пусть R — полупримитивное кольцо и F — свободный правый R-модуль. Покажите, что $\operatorname{rad} F = 0$.

Задача 6. Доказать, что в $\operatorname{End}\mathbb{F}^\infty$ есть ровно один ненулевой собственный идеал — множество операторов с конечномерным образом. Поэтому $J(R)$ может не совпадать с пересечением всех двусторонних идеалов R.

Задача 7. Докажите, что если в правом идеале I все элементы квазирегулярны справа, то I квазирегулярен.

10 Нильпотентность радикала артинова кольца. Лемма Накаямы. Теорема Акидзуки–Хопкинса–Левицкого.

Определение 10.1. *Нильпотент* $r \in R$ — это такой элемент кольца, что для некоторого натурального n выполнено $r^n = 0$. Наименьшее такое n будем называть *индексом нильпотентности* элемента.

Пример нильпотентного элемента: в матричном кольце возьмем верхнетреугольную матрицу, все диагональные элементы которой нулевые.

Если нильпотенты r, s коммутируют, то $r + s$ также нильпотентен, поскольку после раскрытия скобок в $(r+s)^{k+m}$ каждый множитель кратен либо r^k, либо s^m. В некоммутативном кольце сумма нильпотентов может быть обратимой (E_{12}, E_{21} в $M_2(\mathbb{F})$).

Определение 10.2. Произведением подгрупп A и B аддитивной группы $(R, +)$ кольца R называется множество, состоящее из всех возможных конечных сумм вида $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$, $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что если A — левый идеал, то AB — левый идеал. Аналогично, если B — правый идеал, то AB — правый идеал. В частности, произведение двусторонних идеалов будет двусторонним идеалом. В дальнейшем нас будут интересовать степени правых (левых, двусторонних) идеалов $I^n = \underbrace{I \cdot \ldots \cdot I}_{n \text{ раз}}$. Иногда удобно считать $I^0 = R$.

Определение 10.3.

- Правый идеал, все элементы которого нильпотентны, называется *правым нильидеалом*.

- Правый идеал I называется *нильпотентным*, если $I^n = 0$ для некоторого n. Это равносильно тому, что $i_1 \cdot \ldots \cdot i_n = 0$ для всех $i_j \in I$. Наименьшее такое n называют *индексом нильпотентности*.

Аналогичные определения можно дать для левых и двусторонних идеалов.

Всякий правый нильпотентный идеал является правым нильидеалом. Обратное неверно.

Пример 10.4. Рассмотрим кольцо многочленов от счётного числа коммутирующих переменных $\mathbb{Q}[x_2, \ldots, x_n, \ldots]$, где для удобства нумерация переменных начинается с двойки. Обозначим через I идеал, порождённый множеством $\{x_2^2, x_3^3, \ldots, x_n^n, \ldots\}$. Тогда в факторкольце $R = \mathbb{Q}[x_2, \ldots, x_n, \ldots]/I$ идеал J, порождённый множеством $\{x_2 + I, \ldots, x_n + I, \ldots\}$, является нильидеалом, но не нильпотентен. Более того, индексы нильпотентности элементов идеала J не ограничены.

Доказательство. Рассмотрим произвольный многочлен $f \in \mathbb{Q}[x_2, \ldots, x_n, \ldots]$ без свободного члена. Пусть n — это наибольший номер переменной, от которой многочлен f зависит нетривиально. Тогда

$$f(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_2, \ldots, k_n} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n},$$

где лишь конечное число коэффициентов $a_{k_2, \ldots, k_n}$ отлично от нуля. Пусть $m \in \mathbb{N}$ равно числу ненулевых слагаемы в этой сумме. Тогда f можно переписать в виде суммы мономов $f = g_1 + \ldots + g_m$. Если моном g_i делится на переменную x_j, то, возводя в степень n, получаем, что g_i^n делится на $x_j^n = x_j^{n-j} \cdot x_j^j \in I$. Поэтому все $g_1^n, \ldots, g_m^n$ лежат в идеале I.

Теперь возведём многочлен f в степень mn:

$$f^{mn} = (g_1 + \ldots + g_m)^{mn}.$$

Раскрывая скобки, получим, что каждое слагаемое имеет вид $g_1^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot g_m^{\ell_m}$, где $\ell_1 + \ldots + \ell_m = mn$. По принципу Дирихе для хотя бы одного ℓ_i выполнено $\ell_i \geqslant n$. Значит, все слагаемые лежат в идеале I, откуда и сам многочлен f^{mn} лежит в идеале I.

Наконец перейдём в факторкольцо $R = \mathbb{Q}[x_2, \ldots, x_n, \ldots]/I$. Произвольный элемент идеала J имеет вид $f(x_2 + I, \ldots, x_n + I)$. Тогда

$$(f(x_2 + I, \ldots, x_n + I))^{mn} = (f(x_2, \ldots, x_n) + I)^{mn} = f^{mn} + I = 0 + I,$$

откуда вытекает, что J является нильидеалом.

С другой стороны, элемент $x_k + I$ имеет индекс нильпотентности k. Рассматривая все возможные натуральные $k \geqslant 2$, получаем, что индексы нильпотентности элементов идеала J не ограничены. В частности, этот идеал не может быть нильпотентен. □

Предложение 10.5. Всякий правый (левый) нильидеал I содержится в $J(R)$. В частности, всякий нильпотентный правый (левый) идеал содержится в $J(R)$

Доказательство. Нильидеал квазирегулярен. Действительно, если $r^n = 0$, то $1 - r$ обратим т.к. $(1 - r)(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) = 1 - r^n = 1$, причем эти две скобки коммутируют. □

Теорема 10.6. Пусть R — артиново справа кольцо, тогда $J(R)$ нильпотентен.

Доказательство. В силу артиновости R_R для цепочки $J \supseteq J^2 \supseteq \ldots$ имеем $J^k = J^{k+1} = \ldots$, начиная с некоторого k. Предположим, что $J^k \neq 0$. Рассмотрим множество Ω, состоящее из всех правых идеалов L таких, что $L \subseteq J^k$ и $LJ^k \neq 0$. Множество Ω не пусто, т.к. содержит J^k. В силу артиновости R_R, в Ω есть некоторый минимальный элемент, обозначим его тоже как L. Заметим, что $LJ^k \in \Omega$, т.к. $(LJ^k)J^k = LJ^{2k} = LJ^k \neq 0$. В то же время $LJ^k \subseteq L$, откуда $LJ^k = L$ в силу минимальности L.

Ввиду $LJ^k \neq 0$ найдется элемент $\ell \in L$ такой, что $\ell J^k \neq 0$. Отсюда правый идеал ℓR принадлежит Ω. Однако $\ell R \subseteq L$, а значит, $\ell R = L$ в силу минимальности L. Тогда в силу предыдущего выполнено $(\ell R)J^k = \ell R$. Поэтому найдётся $j \in J^k$, для которого $\ell j = \ell$, откуда $\ell(1 - j) = 0$, но $1 - j$ обратим из-за квазирегулярности радикала. Поэтому $\ell = 0$ и $0 = \ell R = L = LJ^k$. Противоречие с тем, что $L \in \Omega$. □

Следствие 10.7. В артиновом кольце радикал Джекобсона совпадает с наибольшим нильпотентным идеалом. В частности, это верно для конечномерной ассоциативной алгебры над полем.

Пример 10.8. Если R — алгебра верхнетреугольных матриц нал полем, то множество матриц с нулевой диагональю является наибольшим нильпотентным идеалом, а потому совпадает с радикалом Джекобсона.

Следствие 10.9. Артиново кольцо полупросто тогда и только тогда, когда в нём нет ненулевых двусторонних нильпотентных идеалов.

Доказательство. Артиново кольцо полупросто тогда и только тогда, когда его радикал Джекобсона равен нулю. $\square$

Пусть M — правый R-модуль, A — подгруппа аддитивной группы $(M, +)$, I — правый идеал кольца R. Тогда определим произведение AI как множество всех возможных конечных сумм вида $a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n$, где $a_i \in A$, $r_i \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Непосредственно проверяется, что AI — подмодуль в M.

Лемма 10.10 (лемма Накаямы-1)**.** Пусть M — конечнопорождённый правый R-модуль. Если выполнено $MJ(R) = M$, тогда $M = 0$. Другими словами, для ненулевого модуля M всегда $MJ(R) \subsetneq M$

Доказательство. Пусть $M \neq 0$. Т.к. M конечно порожден, то в нём можно выбрать максимальный собственный подмодуль N (теорема 3.6). Тогда M/N неприводим и $(M/N)r = 0$ для всех $r \in J(R)$, откуда $MJ(R) \subseteq N \subsetneq M$. $\square$

Следствие 10.11 (лемма Накаямы-2)**.** Пусть M_R — конечнопорождённый правый R-модуль, $N \leqslant M$ — его подмодуль, а правый идеал I содержится в $J(R)$. Если выполнено $MI + N = M$, то $N = M$.

Доказательство. Факторизуем по N соотношение из условия: $M/N = (MI + N)/N$. Заметим, что $(MI+N)/N$ совпадает с аддитивной подгруппой в M/N, порождённой всеми элементами вида $\{mr + N \mid m \in M,\ r \in I\}$. Это множество можно переписать как $\{(m + N)r \mid m \in M,\ r \in I\}$. Однако аддитивная подгруппа, порождённая таким множеством совпадает с $(M/N)I$. Таким образом, $M/N = (M/N)I$, откуда $M/N \subseteq (M/N)J(R)$. Обратное включение очевидно. Значит, $M/N = (M/N)J(R)$ и $M/N = 0$ по предыдущей лемме. $\square$

Предложение 10.12. Пусть M — полупростой R-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) M артинов;
2) M нётеров;
3) M конечно порождён;
4) M обладает композиционным рядом.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $M = \bigoplus\limits_{i \in I} S_i$ — разложение в сумму неприводимых модулей. Покажем, что в силу артиновости эта сумма может содержать лишь конечное число слагаемых. От противного, пусть I бесконечно. Выберем счётное подмножество $\{i_1, i_2, \ldots\} \subseteq I$. Тогда цепь подмодулей

$$\bigoplus_{j=1}^{\infty} S_{i_j} \supsetneqq \bigoplus_{j=2}^{\infty} S_{i_j} \supsetneqq \bigoplus_{j=3}^{\infty} S_{i_j} \supsetneqq \ldots$$

является бесконечной строго убывающей, что противоречит артиновости. Итак, $M = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ — конечная сумма неприводимых, а значит, нётеровых модулей. Отсюда M нётеров (следствие 4.5).

2) $\Rightarrow$ 3) Любой подмодуль нётерова модуля конечно порождён.

3) $\Rightarrow$ 4) Так как полупростой модуль M конечно порождён, то он раскладывается в конечную прямую сумму неприводимых $M = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, см. предложение 6.3. Тогда

$$0 \subseteq S_1 \subseteq S_1 \oplus S_2 \subseteq S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \subseteq \ldots \subseteq S_1 \oplus \ldots \oplus S_n = M$$

является композиционным рядом, т.к. все его факторы изоморфны модулям S_i, а значит, неприводимы.

4) $\Rightarrow$ 1) Модуль, обладающий композиционным рядом, одновременно и артинов, и нётеров (следствие 5.6). □

Теорема 10.13 (Акидзуки, Хопкинс, Левицкий)**.** Пусть кольцо R *полупримарно*, т.е. радикал Джекобсона $J(R)$ нильпотентен, а фактор по нему $\overline{R} = R/J(R)$ является полупростым кольцом. Тогда для произвольного правого R-модуля M следующие условия эквивалентны:

1) M артинов;

2) M нётеров;

3) M обладает композиционным рядом.

Доказательство. Обозначим $J = J(R)$. Выберем натуральное n таким, что $J^n = 0$, но $J^{n-1} \neq 0$. Построим конечную цепь подмодулей

$$M \supseteq MJ \supseteq MJ^2 \supseteq \ldots \supseteq MJ^{n-1} \supseteq MJ^n = 0.$$

Рассмотрим факторы этой цепи $F_i = MJ^{i-1}/MJ^i$, где $i = 1, 2, \ldots n$ и формально полагаем $J^0 = R$. Тогда $F_i J = 0$ при любом i. Значит, на F_i можно задать структуру модуля над кольцом $\overline{R} = R/J$ по правилу $f(r + J) = fr$ для всех $f \in F_i$, $r \in R$.

Заметим, что произвольное подмножество $X \subseteq F_i$ является подмодулем над R тогда и только тогда, когда X является подмодулем над $\overline{R}$. Следовательно, F_i — артинов (нётеров) R-модуль в том и только в том случае, когда F_i — артинов (нётеров) $\overline{R}$-модуль.

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть R-модуль M артинов, тогда его подмодуль MJ^{i-1} тоже артинов. Однако F_i — это фактормодуль модуля MJ^{i-1}, поэтому F_i — артинов R-модуль. Тогда по предыдущему F_i — артинов модуль над кольцом $\overline{R}$. По условию $\overline{R}$ — полупростое кольцо, а значит, все модули над ним полупросты. В частности, F_i — полупростой $\overline{R}$-модуль. В этом случае из артиновости следует нётеровость (предложение 10.12). Итак, все $F_1, \ldots, F_n$ являются нётеровыми $\overline{R}$-модулям. Значит, $F_1, \ldots, F_n$ — нётеровы R-модули.

В силу $MJ^n = 0$ получаем, что R-модуль MJ^{n-1} равен $MJ^{n-1}/MJ^n = F_n$, а значит, нётеров. Из нётеровости MJ^{n-1} и $F_{n-1} = MJ^{n-2}/MJ^{n-1}$ следует нётеровость MJ^{n-2}(предложение 4.4). Продолжая таким же образом, получаем, что все модули $MJ^{n-1}, MJ^{n-2}, MJ^{n-3}, \ldots, MJ, M$ нётеровы. В частности, исходный модуль M нётеров, что и требовалось.

2) $\Rightarrow$ 1) Достаточно в предыдущем рассуждении всюду поменять местами артиновость и нётеровость.

3) $\Leftrightarrow$ 1) & 2) Верно для любого модуля (следствие 5.6). $\square$

Следствие 10.14. Для кольца R следующие условия эквивалентны:

1) R артиново справа;

2) R нётерово справа, радикал Джекобсона $J(R)$ нильпотентен, а фактор по нему $\overline{R} = R/J(R)$ — полупростое кольцо.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Радикал Джекобсона артинова справа кольца всегда нильпотентен (теорема 10.6). Также фактор артинова справа кольца по радикалу Джекобсона — полупростое кольцо (следствие 9.19). Применяя предыдущую теорему к модулю R_R, получаем что из его артиновости следует нётеровость.

2) $\Rightarrow$ 1) Снова применяем предыдущую теорему к модулю R_R. $\square$

Следствие 10.15. Артиново справа кольцо (напомним: с единицей!) нётерово справа.

Доказательство. Частный случай предыдущего следствия. $\square$

Контрпример для колец без единицы: кольцо с нулевым умножением на p-квазициклической группе $\mathbb{Z}_{p^\infty} \cong \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}\ \zeta^{p^k} = 1\}$ (она является нётеровым, но не артиновым, $\mathbb{Z}$-модулем).

Следствие 10.16. Конечно порождённый правый модуль над артиновым справа кольцом является нётеровым.

Доказательство. Конечно порождённый правый модуль над артиновым справа кольцом сам является артиновым, см. предложение 4.14. Поэтому снова применима теорема Акидзуки–Хопкинса–Левицкого. $\square$

Задачи к лекции 10.

Задача 1. Постройте коммутативное кольцо R, радикал Джекобсона $J(R)$ которого имеет индекс нильпотентности 3, но все элементы $J(R)$ имеют нулевые квадраты.

Задача 2. Найдите $J(\mathbb{F}_2 Q_8)$, укажите его индекс нильпотентности.

Задача 3. Найдите $J(\mathbb{F}_3 S_3)$. Указание: воспользуйтесь тем, что в артиновом кольце радикал Джекобсона — это наименьший идеал, фактор по которому полупрост, а также характеризацией радикала в терминах действия на неприводимые модули.

Задача 4. Докажите, что для произвольного семейства колец $\{R_i\}_{i\in I}$ выполнено равенство $J(\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i\in I} J(R_i)$.

Задача 5. Докажите, что в коммутативном кольце сумма обратимого элемента и нильпотента обратима. Верно ли это для некоммутативных колец?

Задача 6. Докажите, что сумма двух ниль-идеалов является ниль-идеалом. Аналогичный вопрос о сумме двух правых ниль-идеалов — это известная проблема Кёте (1930 г.).

11 Локальные кольца. Идемпотенты кольца и их связь с разложением в прямую сумму

Определение 11.1. Для кольца R обозначим через $R^\times$ — множество всех обратимых элементов кольца. При $R \neq 0$ множество $R^\times \neq \varnothing$ является группой по умножению, которую называют *мультипликативной группой кольца.*

Теорема 11.2 (О локальном кольце)**.** Для $R \neq 0$ следующие условия эквивалентны:

1) $R/J(R)$ — тело.
2) $J(R)$ — максимальный правый идеал в R;
2') $J(R)$ — максимальный левый идеал в R;
3) R обладает единственным максимальным правым идеалом;
3') R обладает единственным максимальным левым идеалом;
4) $J(R)$ содержит все необратимые элементы кольца, т.е. $R = R^\times \cup J(R)$;
5) необратимые элементы R составляют собственный идеал;
6) необратимые элементы R составляют группу по сложению;
7) для любого $n \in \mathbb{N}$, если $r_1 + \ldots + r_n \in R^\times$, то хотя бы один $r_i \in R^\times$;
8) если $r + s \in R^\times$, то по крайней мере один элемент r или s принадлежит $R^\times$;
9) для всех $r \in R$ по крайней мере один элемент r или $1 - r$ обратим;
10) для всех $r \in R$ по крайней мере один элемент r или $1 - r$ обратим справа;
10') для всех $r \in R$ по крайней мере один элемент r или $1 - r$ обратим слева;

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) В теле $R/J(R)$ нет нетривиальных правых идеалов, откуда по теореме о соответствии идеалов $J(R)$ — максимальный правый идеал в R.

2) $\Rightarrow$ 3) Если N — максимальный правый идеал, то $J(R) \subseteq N$, откуда $J(R) = N$ в силу максимальности $J(R)$.

3) $\Rightarrow$ 1) Так как $J(R)$ — пересечение всех максимальных правых идеалов, то $J(R)$ совпадает с тем самым единственным максимальным правым идеалом. Тогда в силу теоремы о соответствии идеалов в факторкольце $R/J(R)$ нет нетривиальных правых идеалов, значит, $R/J(R)$ — тело (теорема 3.7).

1) $\Rightarrow$ 2') $\Rightarrow$ 3') $\Rightarrow$ 1) Аналогично предыдущему в силу симметричности 1).

3) & 3') $\Rightarrow$ 4) Если r необратим, то он необратим хотя бы с одной стороны, скажем, справа. Тогда r лежит в некотором максимальном правом идеале (предложение 1.36). Но $J(R)$ — единственный максимальный правый идеал, откуда $r \in J(R)$. Если r необратим слева, то рассуждения аналогичны.

4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 6) Получается сразу.

6) $\Rightarrow$ 7) Если все r_i необратимы, то их сумма тоже необратима в силу 6).

7) $\Rightarrow$ 8) Частный случай.

8) $\Rightarrow$ 9) Имеем $r + (1 - r) = 1 \in R^{\times}$.

9) $\Rightarrow$ 10) Частный случай.

10) $\Rightarrow$ 1) Выберем произольный $a \notin J(R)$. Так как $J(R)$ совпадает с пересечением максимальных правых идеалов, то найдется максимальный правый идеал $N \not\ni a$. В силу максимальности N, правый идеал $N + aR$ не может быть собственным, а значит, содержит 1. Поэтому для некоторых $n \in N$, $r \in R$ выполнено $1 = n + ar$. Так как n необратим справа, то $1 - n = ar$ обратим справа в силу 10), откуда a обратим справа. В силу произвольности $a \notin J(R)$, получаем, что все ненулевые элементы факторкольца $R/J(R)$ обратимы справа, но это одно из эквивалентных определений тела (теорема 3.7).

9) $\Rightarrow$ 10') $\Rightarrow$ 1) Аналогично. $\square$

Определение 11.3. Кольцо R *локально*, если у него есть единственный максимальный правый (эквивалентно, левый) идеал.

Любой пункт предыдущей теоремы может быть взят в качестве определения локального кольца.

Нулевое кольцо не является локальным по определению.

Следствие 11.4. Если кольцо R локально, то оно содержит единственный максимальный двусторонний идеал. Обратное верно в случае коммутативного кольца R.

Например, в кольце матриц над телом 0 — единственный максимальный двусторонний идеал, но это кольцо не локально.

Следствие 11.5. Если все необратимые элементы нильпотентны, то кольцо локально.

Доказательство. Если $x^n = 0$, то $1 - x$ — обратный к $(1 + x + \ldots + x^{n-1})$. $\square$

Следствие 11.6. Для элемента r локального кольца R следующие условия равносильны: 1) r обратим справа, 2) r обратим слева, 3) r обратим, 4) $r \notin J(R)$.

Доказательство. Элемент необратим справа (слева) тогда и только тогда, когда он лежит в некотором максимальном правом (левом) идеале, см. предложение 1.36. Так как кольцо локально, то этот правый (левый) идеал совпадает с $J(R)$. Однако $J(R)$ — собственный идеал, поэтому указанный элемент необратим с двух сторон. $\square$

Пример 11.7.

- Любое тело (в том числе любое поле) — тривиальный пример локального кольца. В этом случае, радикал Джекобсона равен нулю.

- Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$ локально тогда и только тогда, когда $n = p^k$ для некоторого простого p. Действительно, в этом случае все необратимые элементы — это в точности элементы идеала $p\mathbb{Z}_{p^k}$. Обратно, если предположить, что n делится на два различных простых числа p, q, то, выбирая $m, \ell \in \mathbb{Z}$ такими, что $pm+q\ell = 1$, получаем $p\mathbb{Z}_n + q\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_n$, откуда вычеты $\overline{p}, \overline{q}$ не лежат в одном собственном идеале, но они необратимы.

- Для простого[14] числа p рассмотрим множество $\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq \mathbb{Q}$, состоящее из дробей, у которых в несократимом виде знаменатель не делится на p. Тогда необратимые элементы в $\mathbb{Z}_{(p)}$ имеют вид $\frac{m}{n}$, где m делится на p, но n не делится на p. Все такие дроби образуют собственный идеал, а значит, $\mathbb{Z}_{(p)}$ является локальным.

- Если D — тело, то локальным является кольцо R, состоящее из таких верхнетреугольных $n \times n$ матриц A над телом D, что $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$. Такая матрица необратима тогда и только тогда, когда её диагональные элементы равны нулю. Но треугольные матрицы с нулевой диагональю нильпотенты, откуда кольцо R локально. В частности, $J(R)$ совпадает с множеством матриц с нулевой диагональю, и $R/J(R) \cong D$.

Определение 11.8. Элемент e кольца R называется *идемпотентом*, если $e^2 = e$.

В любом кольце имеются тривиальные идемпотенты: 0 и 1. Примеры нетривиальных идемпотентов — диагональные матричные единицы E_{ii} в матричных кольцах.

Если $e \in R$ — идемпотент, тогда $f = 1 - e$ — это тоже идемпотент, т.к.

$$f^2 = (1 - e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 - e = f.$$

[14] Если p не простое, то указанное множество не будет замкнуто относительно умножения. Приведённая конструкция является примером локализации коммутативного кольца (в данном случае кольца $\mathbb{Z}$).

Иногда f называют *дополнением* идемпотента e. Отметим, что идемпотенты e, f всегда *ортогональны*, т.е.

$$fe = (1-e)e = e - e^2 = 0, \qquad ef = e(1-e) = e - e^2 = 0.$$

Определение 11.9. Множество идемпотентов $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq R$ называется *ортогональным*, если $e_ie_j = e_je_i = 0$ для любых $i \neq j$.

Определение 11.10. Множество идемпотентов $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq R$ называется *полным*, если $e_1 + \ldots + e_n = 1$.

Пример 11.11. Приведём примеры полных ортогональных множеств идемпотентов:

- Множество всех диагональных матричных единиц $\{E_{ii} \mid i = 1, \ldots, n\}$ в кольце матриц $M_n(R)$.
- Если e — произвольный идемпотент кольца R, то пара $\{e, f\}$, где $f = 1 - e$, является полным ортогональным множеством из двух идемпотентов.

Для каждого идемпотента e можно рассмотреть порождённые им правый eR и левый Re идеалы, а также множество

$$eRe = \{ere \mid r \in R\}.$$

Тогда

$$ere + ese = e(re + es)e \in eRe, \quad (ere) \cdot (ese) = e(res)e \in eRe, \quad e(ere) = ere = (ere)e,$$

а значит, $\underline{eRe \text{ — это кольцо с единицей } e}$. Отметим, что в рамках наших определений нельзя назвать eRe подкольцом в R, т.к. у него другая единица.

Предложение 11.12 (Разложение Пирса)**.** Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq R$ — полное ортогональное множество идемпотентов. Тогда правый и левый регулярные модули раскладываются во (внутреннюю) прямую сумму:

1) $R_R = e_1R \oplus \ldots \oplus e_nR$,

1') ${}_RR = Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n$.

Кроме того, имеется разложение кольца R во (внутреннюю) прямую сумму аддитивных подгрупп:

2) $R = \bigoplus\limits_{i,j=1}^{n} e_iRe_j$.

Причём отображение $r \mapsto (e_ire_j)_{i,j=1}^n$, $r \in R$ задаёт изоморфизм между кольцом R и кольцом матриц специального вида:

$$R \cong \begin{pmatrix} e_1Re_1 & e_1Re_2 & \ldots & e_1Re_n \\ e_2Re_1 & e_2Re_2 & \ldots & e_2Re_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_nRe_1 & e_nRe_2 & \ldots & e_nRe_n \end{pmatrix} \subseteq M_n(R).$$

Доказательство. 1) Для каждого $r \in R$ имеем $1 \cdot r = (\sum_{i=1}^n e_i)r = \sum_{i=1}^n e_i r$, откуда $R_R = \sum_{i=1}^n e_i R$. Теперь рассмотрим произвольное разложение нуля $0 = \sum_{i=1}^n e_i r_i$. Домножим слева на e_k, получим $0 = \sum_{i=1}^n e_k e_i r_i = e_k r_k$. В силу произвольности номера k получаем, что все слагаемые в разложении нуля сами равны нулю[15] Значит, разложение нуля может быть только тривиальным, отсюда сумма прямая.

Доказательство 1') проводится аналогично.

2) Каждый $r \in R$ можно представить в виде

$$r = 1 \cdot r \cdot 1 = \left(\sum_{i=1}^n e_i\right) \cdot r \cdot \left(\sum_{j=1}^n e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n e_i r e_j.$$

Значит, $R = \sum\limits_{i,j=1}^n e_i R e_j$. Далее в произвольном разложении нуля $0 = \sum_{i,j=1}^n e_i r_{ij} e_j$ можно домножить слева на e_k и справа на e_ℓ. Тогда получим $0 = e_k r_{k\ell} e_\ell$ для всех $k, \ell = 1, \ldots, n$, откуда вытекает, что указанная сумма прямая.

Изоморфизм колец $\phi : R \longrightarrow (e_i R e_j)_{i,j=1}^n$ определим как

$$\phi(r) = \begin{pmatrix} e_1 r e_1 & e_1 r e_2 & \ldots & e_1 r e_n \\ e_2 r e_1 & e_2 r e_2 & \ldots & e_2 r e_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_n r e_1 & e_n r e_2 & \ldots & e_n r e_n \end{pmatrix}.$$

Тогда по построению $\phi(r+s) = \phi(r) + \phi(s)$. Рассмотрим элемент на позиции (i,j) у матрицы $\phi(r \cdot s)$:

$$(\phi(r \cdot s))_{ij} = e_i r s e_j = e_i r \cdot 1 \cdot s e_j = e_i r \left(\sum_{k=1}^n e_k\right) s e_j =$$
$$= \sum_{k=1}^n e_i r e_k s e_j = \sum_{k=1}^n e_i r e_k^2 s e_j = \sum_{k=1}^n (e_i r e_k)(e_k s e_j) = \sum_{k=1}^n (\phi(r))_{ik} \cdot (\phi(s))_{kj},$$

откуда $\phi(r \cdot s) = \phi(r) \cdot \phi(s)$. Также

$$\phi(1) = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \text{ — единица указанного кольца.}$$

Инъективность ϕ следует из того, что сумма в пункте 2) прямая. Наконец для произвольных $r_{ij} \in R$, $i, j = 1, \ldots, n$ прообраз матрицы $(e_i r_{ij} e_j)_{i,j=1}^n$ непуст, т.к. содержит $r = \sum_{i,j=1}^n e_i r_{ij} e_j$, откуда получаем сюръективность ϕ. □

[15] При этом коэффициенты r_i могут быть определены неоднозначно, однозначными окажутся только произведения $r_i e_i$.

Предложение 11.13. Правый идеал I кольца R выделяется прямым слагаемым в R_R тогда и только тогда, когда он порождается некоторым идемпотентом.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $R_R = I \oplus L$, тогда $1 = e + f$ для некоторых $e \in I$, $f \in L$. Домножая на e справа и слева, получим

$$e = e^2 + ef, \quad e = e^2 + fe.$$

Тогда разность $e - e^2$, с одной стороны, равна ef, а значит, лежит в правом идеале I. Одновременно $e - e^2 = fe \in L$. Значит, $e - e^2 \in I \cap L$, но сумма идеалов I, L прямая, откуда $e - e^2 = 0$, т.е. e — идемпотент.

Далее если a — произвольный элемент идеала I, то $a = ea + fa$, где $fa \in L$. Но сумма $R_R = I \oplus L$ прямая и $a = a + 0$ — другое разложение элемента a. Значит, $fa = 0$, $ea = a$. Поэтому $I = eR$.

($\Leftarrow$) Если $I = eR$, $e^2 = e$, то достаточно рассмотреть разложение Пирса $R_R = eR \oplus fR$, где $f = 1 - e$. $\square$

Предложение 11.14. Для правого R-модуля M следующие условия эквивалентны:

1) M раскладывается во (внутреннюю) прямую сумму некоторых своих подмодулей $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$.

2) Кольцо эндоморфизмов $S = \operatorname{End} M$ содержит полное ортогональное множество идемпотентов $\{e_1, \ldots, e_n\}$, причём $e_i(M) = M_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Каждый элемент $m \in M$ единственным образом представим в виде $m = m_1 + \ldots + m_n$, где $m_i \in M_i$. Определим эндоморфизм e_i по правилу $e_i(m) = m_i$. Тогда $e_i^2(m) = e_i(m_i) = m_i = e_i(m)$, откуда e_i — идемпотент. Кроме того, $\sum_{i=1}^n e_i(m) = \sum_{i=1}^n m_i = m$, т.е. множество идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^n$ является полным. Наконец $e_i e_j(m) = e_i(m_j) = 0$, а значит, семейство $\{e_i\}_{i=1}^n$ ортогонально.

2) $\Rightarrow$ 1) Имеем $M = \mathrm{id}(M) = \sum e_i(M) = \sum M_i$. Причём в силу идемпотентности e_i его ограничение на свой образ M_i является тождественным отображением. Если $0 = m_1 + \ldots + m_n$ — разложение нуля, $m_i \in M_i$, то для всех i выполнено

$$0 = e_i(0) = e_i(m_1 + \ldots + m_n) = e_i(e_1(m_1) + \ldots + e_n(m_n)) = e_i(m_i) = m_i.$$

$\square$

12 Неразложимые и строго неразложимые модули. Критерий локальности артинова кольца. Разложение Крулля—Шмидта.

Вспомним, что элемент e кольца R называется идемпотентом, если $e^2 = e$.

Определение 12.1. Модуль $M \neq 0$ *неразложим*, если он не раскладывается в прямую сумму двух ненулевых подмодулей.

Предложение 12.2. Модуль M неразложим тогда только тогда, когда $\operatorname{End} M$ не содержит нетривиальных идемпотентов.

Доказательство. Докажем, что $\operatorname{End} M$ содержит нетривиальные идемпотенты тогда и только тогда, когда модуль M разложим.

($\Leftarrow$) Пусть $M = M_1 \oplus M_2$, и оба слагаемые ненулевые. Кольцо $\operatorname{End} M$ содержит идемпотент e, проецирующий на модуль M_1. Так как $e(M) = M_1$ и M_1 —нетривиальный подмодмодуль в M, то e не равен ни 0, ни id.

($\Rightarrow$) Если $\operatorname{End} M$ содержит идемпотент e отличный от 0 и id, то можно рассмотреть полное ортогональное множество из двух идемпотнетов $\{e, \mathrm{id} - e\}$. Тогда модуль M разложим по предложению 11.14.

□

Напомним, что модуль называется неприводимым, если у него нет нетривиальных подмодулей.

Примеры.

1. Неприводимый модуль неразложим. Действительно, если выполнено $M = M_1 \oplus M_2$, то M_1 и M_2 — подмодули в M.

2. Если кольцо R не обладает идемпотентами кроме $0, 1$, то модули R_R и ${}_RR$ неразложимы. Действительно, их кольца эндоморфизмов $\operatorname{End} R_R \cong \operatorname{End} {}_RR \cong R$ (теорема 3.15), а значит, они тоже не содержат идемпотентов.

Напомним, что кольцо называется локальным, если оно обладает единственным максимальным правым идеалом (он же будет и единственным максимальным левым идеалом).

Определение 12.3. Модуль $M \neq 0$ *строго неразложим*, если его кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} M$ локально.

Это определение действительно является частным случаем неразложимого модуля в силу следующего предложения.

Предложение 12.4. Все идемпотенты локального кольца — это 0 и 1.

Доказательство. Пусть $e \in R$ — идепотент. Так как R локально, то какой-то из элементов $e, 1 - e$ обратим, однако $e(1 - e) = 0$, поэтому другой элемент нулевой. □

Примеры. 1. Пусть R — локальное кольцо, тогда в силу $\operatorname{End} R_R \cong \operatorname{End} {}_RR \cong R$ получаем, что модули R_R и ${}_RR$ строго неразложимы.

2. Рассмотрим кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Все его идемпотенты – это $0, 1$. Поэтому модуль $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ неразложим. Однако кольцо $\mathbb{Z}$ не локально, у него бесконечно много максимальных (правых) идеалов. Значит, модуль $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ не является строго неразложимым.

Теорема 12.5. Пусть R-модуль M является одновременно неразложимым, артиновым и нётеровым. Тогда M строго неразложим. Причём каждый его эндоморфизм либо нильпотентен, либо обратим.

Доказательство. Рассмотрим произвольный эндоморфизм $\varphi \in \operatorname{End} M$. Так как M одновременно и артинов, и нётеров, то по лемме Фитинга найдётся такое число n, что $M = \varphi^n(M) \oplus \ker \varphi^n$. Здесь как обычно под степенью подразумевается композиция отображений $\phi^n = \phi \circ \ldots \circ \phi$ (n раз). Так как M неразложим, то в полученной сумме одно из слагаемых должно быть нулевым.

Если $\ker \phi^n = 0$, то в силу $\ker \phi \subseteq \ker \phi^n$ получаем $\ker \phi = 0$, т.е. ϕ инъективен. Однако для артинова модуля инъективность эндоморфизма равносильна биективности (предложение 4.7). Получаем, что ϕ обратим.

Рассмотрим теперь другой случай. Если $\varphi^n(M) = 0$, то эндомофризм ϕ^n обращается в ноль на всех элементах модуля M. Значит, $\phi^n = 0$, т.е. ϕ нильпотентен.

Таким образом, любой эндоморфизм либо нильпотентен, либо обратим. Тогда кольцо $\operatorname{End} M$ локально (следствие 11.5). Другими словами, модуль M строго неразложим. $\square$

Следствие 12.6. Пусть кольцо $R \neq 0$ артиново справа. Тогда R локально в том и только в том случае, когда все его идемпотенты — это 0 и 1.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Уже доказали в предыдущем предложении 12.4.

($\Leftarrow$) Кольцо эндоморфизмов регулярного модуля $\operatorname{End} R_R \cong R$ (теорема 3.15). По следствию из теоремы Акидзуки-Хопкинса-Левицкого артиново справа кольцо R окажется нётеровым справа, т.е. модуль R_R артинов и нётеров. По условию все идемпотенты кольца R тривиальны, но $\operatorname{End} R_R \cong R$, а значит, все идемпотенты кольца $\operatorname{End} R_R$ тривиальны. Тогда R_R — неразложимый R-модуль. По теореме R_R — строго неразложим, т.е. $\operatorname{End} R_R$ — локальное кольцо. Тогда изоморфное ему кольцо R также будет локальным. $\square$

Определение 12.7. Представление модуля $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ в виде <u>конечной</u> суммы неразложимых подмодулей M_i назовём *разложением Крулля-Шмидта.*

Теорема 12.8. Если модуль M артинов или нётеров, то он обладает разложением Крулля-Шмидта.

Доказательство. Пусть для M не существует разложения Крулля-Шмидта. В частности, сам модуль M не может быть неразложимым, иначе получилась бы сумма из одного слагаемого. Поэтому $M = N_1 \oplus M_1$. Снова хотя бы один из модулей N_1 или M_1 разложим. Можно считать, что $N_1 = N_2 \oplus M_2$, тогда $M = N_2 \oplus M_2 \oplus M_1$. Будем продолжать этот процесс. На шаге с номером k мы получим $M = N_k \oplus M_k \oplus \ldots \oplus M_1$, где $N_k \oplus M_k = N_{k-1}$. Значит, мы можем построить как строго убывающую цепочку

$$N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \ldots \supsetneq N_k \supsetneq \ldots,$$

так и строго возрастающую

$$M_1 \subsetneq M_1 \oplus M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_1 \oplus \ldots \oplus M_k \subsetneq \ldots .$$

Следовательно, модуль M не может быть ни артиновым, ни нётеровым. □

Оказывается, что если модуль и артинов, и нётеров, то разложение Крулля-Шмидта единственно с точностью до изоморфизма слагаемых. Для доказательства этого факта нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 12.9. Пусть произвольный правый R-модуль K раскладывается двумя способами в сумму подмодулей $K = K_1 \oplus K_2 = \widetilde{K}_1 \oplus \widetilde{K}_2$. Обозначим через $\widetilde{\pi}_1 : K \longrightarrow \widetilde{K}_1$ естественную проекцию, а через $\iota_1 : K_1 \longrightarrow K$ — естественное вложение. Предположим, что отображение $\phi_1 = \widetilde{\pi}_1 \iota_1 : K_1 \longrightarrow \widetilde{K}_1$ является изоморфизмом модулей. Тогда выполнено $K_2 \cong \widetilde{K}_2$.

Доказательство. Так как $\phi_1 = \widetilde{\pi}_1 \iota_1$ биективно, то

$$0 = \ker \varphi_1 \supseteq \ker \widetilde{\pi}_1 \cap \mathrm{Im} \iota_1 = \widetilde{K}_2 \cap K_1.$$

Значит, сумма $K_1 \oplus \widetilde{K}_2$ является прямой. Покажем, что она совпадает со всем модулем K.

В силу $K = \widetilde{K}_1 \oplus \widetilde{K}_2$ достаточно проверить, что $\widetilde{K}_1 \subseteq K_1 \oplus \widetilde{K}_2$. Рассмотрим произвольный $y \in \widetilde{K}_1$. Так как φ_1 биективно, то найдётся $x \in K_1$, что $y = \varphi_1(x)$. Теперь вычислим

$$\widetilde{\pi}_1(y - x) = \widetilde{\pi}_1(y) - \widetilde{\pi}_1(x) = y - \widetilde{\pi}_1 \iota_1(x) = y - \varphi_1(x) = 0.$$

Следовательно, $y - x \in \widetilde{K}_2$, откуда

$$y = x + (y - x) \in K_1 \oplus \widetilde{K}_2,$$

что и требовалось.

Теперь имеем, с одной стороны, что $K = K_1 \oplus \widetilde{K}_2$, а с другой стороны, $K = K_1 \oplus K_2$ по условию. Тогда

$$K_2 \cong K/K_1 = (K_1 \oplus \widetilde{K}_2)/K_1 \cong \widetilde{K}_2,$$

и лемма доказана. □

Следующую теорему связывают с результатами сразу многих авторов: Веддербёрн, Ремак, Шмидт, Кулль, Адзумая.

Теорема 12.10. Пусть R-модуль M одновременно и артинов, и нётеров. Тогда для него существует представление $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ в виде суммы неразложимых подмодулей M_i. В любом таком представлении все модули на самом деле строго неразложимы. Число слагаемых n определено однозначно и сами слагаемые M_i тоже определены однозначно с точностью до изоморфизма и перенумерации.

Доказательство. Существование разложения Крулля-Шмидта вытекает из предыдущей теоремы. Модуль M артинов и нётеров, а значит, любой его подмодуль обладает теми же свойствами. В частности, каждый модуль M_i тоже артинов и нётеров. Так как M_i неразложим, то по теореме 12.5 он строго неразложим.

Пусть теперь дано два разложения Крулля-Шмидта

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n = \widetilde{M}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{M}_{\widetilde{n}}.$$

Рассмотрим естественные проекции

$$\pi_i : M \longrightarrow M_i,\ i = 1, \ldots, n; \qquad \widetilde{\pi}_j : M \longrightarrow \widetilde{M}_j,\ j = 1, \ldots, \widetilde{n},$$

а также естественные вложения

$$\iota_i : M_i \longrightarrow M,\ i = 1, \ldots, n; \qquad \widetilde{\iota}_j : \widetilde{M}_j, \longrightarrow M\ j = 1, \ldots, \widetilde{n}.$$

Положим

$$\varphi_i = \widetilde{\pi}_1 \iota_i, \qquad \psi_i = \pi_i \widetilde{\iota}_1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда композиция $\varphi_i \psi_i$ является эндоморфизмом модуля $\widetilde{M}_1$, причём

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \psi_i = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\pi}_1 \iota_i \pi_i \widetilde{\iota}_1 = \widetilde{\pi}_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \iota_i \pi_i \right) \widetilde{\iota}_1 = \widetilde{\pi}_1 \widetilde{\iota}_1 = \mathrm{id}_{\widetilde{M}_1}.$$

Как мы уже установили, модуль $\widetilde{M}_1$ строго неразложим, т.е. его кольцо эндоморфизмов локально. Сумма всех $\varphi_i \psi_i$ равна единице, а значит, хотя бы одно из слагаемых должно быть обратимо по свойству локального кольца (теорема 11.2). После перенумерации модулей $M_1, \ldots, M_n$ можно считать, что эндоморфизм $\varphi_1 \psi_1$ обратим. В частности, он сюръективен, и мы получаем

$$\widetilde{M}_1 = \mathrm{Im}(\varphi_1 \psi_1) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi_1) \subseteq \widetilde{M}_1,$$

откуда φ_1 тоже сюръективен.

Поменяем местами множители и рассмотрим эндоморфизм $\psi_1\varphi_1$ модуля M_1. Покажем, что он тоже обратим. Предположим противное, тогда $\psi_1\varphi_1$ нильпотентен по теореме 12.5, т.е. $(\psi_1\varphi_1)^d = 0$ для некоторого d. Тогда

$$(\varphi_1\psi_1)^{d+1} = \varphi_1(\psi_1\varphi_1)^d\psi_1 = 0,$$

и $\varphi_1\psi_1$ тоже нильпотентен, что противоречит обратимости. Итак, $\psi_1\varphi_1$ обратим. В частности, он инъективен:

$$0 = \ker\psi_1\varphi_1 \supseteq \ker\varphi_1,$$

а значит, φ_1 тоже инъективен.

Таким образом, отображение $\varphi_1 = \widetilde{\pi}_1\iota_1$ является изоморфизмом модулей M_1 и $\widetilde{M}_1$. Применяя предыдущую лемму к φ_1, получаем $M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \cong \widetilde{M}_2 \oplus \ldots \oplus \widetilde{M}_{\widetilde{n}}$.

Далее осуществляем индукцию по $\max\{n, \widetilde{n}\}$. Согласно индуктивной гипотезе, если количество слагаемых строго меньше $\max\{n, \widetilde{n}\}$, то утверждение теоремы верно. Значит, $M_2, \ldots, M_n$ после перенумерации изоморфны модулями $\widetilde{M}_2, \ldots, \widetilde{M}_{\widetilde{n}}$. При этом $n - 1 = \widetilde{n} - 1$, откуда $n = \widetilde{n}$. База индукции $\max\{n, \widetilde{n}\} = 0$ соответствует $M = 0$ и двум пустым суммам модулей. □

Задачи к лекции 12.

Задача 1. Покажите, что в общем случае подкольцо локального кольца не обязательно локально.

Задача 2. Покажите, что если подкольцо S артинового справа локального кольца R артиново справа, то S также локально.

Задача 3. Опишите все идемпотенты, содержащиеся в $J(R)$.

Задача 4. Определите, сколько идемпотентов в кольце $\mathbb{Z}_n$. Опишите их.

Задача 5. Пусть $M_1, \ldots, M_n$ — неразложимые модули и $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$. Пусть также подмодуль $N \leqslant M$ выделяется прямым слагаемым. Верно ли, что $N \cong N_1 \oplus \ldots \oplus N_n$, где $N_i \cong M_i$ или $N_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$?

Задача 6. Опишите конечно порождённые неразложимые $\mathbb{Z}$-модули. Приведите пример неразложимого $\mathbb{Z}$-модуля, не являющегося конечно порождным.

Задача 7. Приведите пример модуля, у которого нет неразложимого подмодуля.

Задача 8. Опишите неразложимые модули над полупростым кольцом R.

13 Примитивные идемпотенты. Поднятие идемпотентов. Полулокальные кольца

Ранее мы ввели понятие неразложимых модулей. Вспомним, что модуль неразложим, если его нельзя представить в виде суммы двух ненулевых подмодулей. Модуль строго неразложим, если его кольцо эндоморфизмов локально.

Применим эти понятия к регулярному модулю R_R. Его подмодули — это в точности правые идеалы кольца R. Однако правый идеал выделяется прямым слагаемым в R_R тогда и только тогда, когда он порождается идемпотентом (предложение 11.13). Поэтому если модуль R_R разложим, то

$$R_R = eR \oplus (1-e)R$$

для некоторого нетривиального идемпотента e.

Зададимся вопросом, в каких случаях модуль eR является разложимым. Нам понадобится следующая теорема.

Предложение 13.1. Пусть e_1, e_2 — два произвольных идемпотента кольца R. Тогда отображение

$$\Phi : \mathrm{Hom}_R(e_1R,\ e_2R) \longrightarrow e_2Re_1, \qquad \Phi(\varphi) = \varphi(e_1)$$

является изоморфизмом групп по сложению. Если $e_1 = e_2 = e$, то Φ задаёт изоморфизм колец $\mathrm{End}\,(eR)_R \cong eRe$.

Доказательство. (Корректность) Проверим, что $\Phi(\varphi)$ действительно лежит в e_2Re_1 для любого гомоморфизма $\varphi : e_1R \longrightarrow e_2R$. Имеем

$$\Phi(\varphi) = \varphi(e_1) = \varphi(e_1^2) = \underbrace{\varphi(e_1)}_{\in e_2R} e_1 \in e_2Re_1.$$

(Инъективность) Заметим, что любой гомоморфизм $\varphi : e_1R \longrightarrow e_2R$ однозначно задаётся своим значением $\varphi(e_1)$, так как $\varphi(e_1r) = \varphi(e_1)r$. Поэтому, если φ, ψ — два различных гомоморфизма, то $\varphi(e_1) \neq \psi(e_1)$, а значит, $\Phi(\varphi) \neq \Phi(\psi)$.

(Сюръективность) Зафиксируем $r \in R$ и рассмотрим элемент e_2re_1. Зададим гомоморфизм $\varphi : e_1R \longrightarrow e_2R$ как $\varphi(e_1s) = e_2rs$ для всех $s \in R$. Тогда $\Phi(\varphi) = e_2re_1$.

(Сохранение операций) Отображение Φ, очевидно, сохраняет сложение

$$\Phi(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(e_1) = \varphi(e_1) + \psi(e_1) = \Phi(\varphi) + \Phi(\psi).$$

Пусть теперь $e_1 = e_2 = e$. Тогда

$$\Phi(\varphi \circ \psi) = \varphi(\underbrace{\psi(e)}_{\in eR}) = \varphi(e \cdot \psi(e)) = \varphi(e) \cdot \psi(e) = \Phi(\varphi) \cdot \Phi(\psi).$$

$\square$

Аналогичная теорема верна для левых идеалов вида Re.

Напомним, что e — единица кольца eRe.

Предложение 13.2. Для идемпотента $e \neq 0$ следующие условия эквивалентны:

1) $e = s + t$, где s, t — ненулевые ортогональные идемпотенты.

2) Кольцо eRe содержит идемпотент отличный от e и 0.

3) Правый идеал eR — разложимый модуль.

3') Левый идеал Re — разложимый модуль.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Умножим обе части равенства на s справа: $es = s^2 + ts = s$. Аналогично $se = s$. Тогда $s = ese \in eRe$. При этом $s \neq 0$ по условию, а также $s \neq e$ в силу $t \neq 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $s \in eRe$ — идемпотент, отличный от 0 и e. В силу $s \in eRe$ имеем $es = se = s$. Положим $t = e - s$. Тогда $ts = (e - s)s = s - s = 0$ и аналогично $st = 0$.

2) $\Leftrightarrow$ 3) По предыдущему предложению кольцо эндоморфизмов модуля eR изоморфно eRe. При этом модуль неразложим тогда и только тогда, когда его кольцо эндоморфизмов содержит только тривиальные идемпотенты (предложение 12.2).

2) $\Leftrightarrow$ 3') Симметрично. □

Определение 13.3. Идемпотент $e \in R \setminus \{0\}$ называется *примитивным*, если кольцо eRe не содержит идемпотентов отличных от 0 и e.

Отрицание любого пункта предыдущего предложения даёт эквивалентное определение примитивного идемпотента.

Аналогом разложения Крулля-Шмидта для колец является разложение единицы в сумму примитивных ортогональных идемпотентов $1 = e_1 + \ldots + e_n$. Тогда в разложении Пирса (предложение 11.12) $R = e_1R \oplus \ldots \oplus e_nR$ все слагаемые являются неразложимыми.

Теорема 13.4. Пусть кольцо R нётерово справа. Тогда R содержит полное ортогональное множество примитивных идемпотентов. Другими словами, $1 = e_1 + \ldots + e_n$, где все e_i — примитивные идемпотенты и $e_ie_j = e_je_i = 0$ для любых $i \neq j$.

Доказательство. Для нётерова модуля R_R существует разложение Крулля-Шмидта $R_R = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, где все модули M_i неразложимы (теорема 12.8). Прямой сумме $R_R = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ соответствует полное ортогональное множество идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ кольца $\operatorname{End} R_R$, причём $M_i = e_i(R)$ (предложение 11.14). Однако $\operatorname{End} R_R \cong R$, и каждый эндоморфизм модуля R_R является умножением на некоторый элемент кольца слева (теорема 3.15). Поэтому можно считать, что $e_1, \ldots, e_n$ — идемпотенты кольца R, такие что каждый $M_i = e_iR$ — правый идеал, порождённый идемпотентом e_i. Так как модуль M_i неразложим, то соответствующий идемпотент e_i примитивен. □

Определение 13.5. Пусть $I \subseteq R$ — произвольное подмножество кольца R. Говорят, что *идемпотенты поднимаются по модулю* множества I, если для каждого $r \in R$ такого, что $r - r^2 \in I$, существует идемпотент e, удовлетворяющий $e - r \in I$.

Если I — двусторонний идеал кольца R, то определение равносильно следующему: для любого смежного класса $r + I$, который является идемпотентом в факторкольце R/I, найдется представитель $e \in r + I$, который будет идемпотентом в исходном кольце R.

Напомним, что идеал называется нильидеалом, если для каждого его элемента найдётся степень, при возведении в которую он обратится в ноль.

Теорема 13.6. Идемпотенты поднимаются по модулю любого нильидеала.

Доказательство. Рассмотрим произвольный нильидеал $I \lhd R$. Пусть $\pi : R \to R/I$ — это естественная проекция. Предположим, что элемент $r \in R$ удовлетворяет соотношению $r - r^2 \in I$, что равносильно $\pi(r) = \pi(r)^2$. Отсюда $\pi(r) = \pi(r)^n$ для любого натурального n. Необходимо найти идемпотент $e \in R$ такой, что $e - r \in I$.

Обозначим $s = 1 - r$. Тогда элементы r, s коммутируют, т.е. $rs = sr$. Более того, их произведение $rs = r - r^2$ лежит в идеале I. Так как I — это нильидеал, то найдётся такое k, что $0 = (rs)^k = r^k s^k$.

Положим $x = 1 - r^k - s^k$. Покажем, что x также принадлежит идеалу I. Действительно, имеем $1 = r + s$, откуда $1 = (r + s)^k$. Так как r и s коммутируют, то применима формула бинома Ньютона: $1 = r^k + rs(\ldots) + s^k$. Ввиду $rs \in I$ получаем

$$\pi(x) = \pi(1 - r^k - s^k) = \pi(rs)\pi(\ldots) = 0,$$

откуда $x \in I$.

Так как I — нильидеал, то $x^\ell = 0$ некоторого ℓ. Поэтому $1 - x$ обладает обратным по умножению $u = 1 + x + \ldots + x^{\ell-1}$. Элемент x выражается как многочлен от r, s, откуда u — это тоже многочлен от r, s, поэтому u коммутирует с ними.

Наконец положим $e = ur^k$, $f = us^k$.

Заметим, что $e + f = 1$. Действительно,

$$e + f = ur^k + us^k = u(r^k + s^k) = u(1 - x) = 1.$$

Кроме того, $ef = fe = 0$ в силу того, что $r^k s^k = 0$ и все элементы r, s, u коммутируют. Тогда e является идемпотентом

$$e = e \cdot 1 = e(e + f) = e^2 + ef = e^2.$$

Причём

$$\pi(e) = \pi(u)\pi(r)^k = (1 + \pi(x) + \ldots + \pi(x)^{\ell-1})\pi(r)^k = \pi(r)^k = \pi(r),$$

т.е. $e - r \in I$. $\square$

Оказывается, что поднимать можно не только отдельные идемпотенты, но и целые семейства ортогональных идемпотентов. Предварительно нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 13.7. Рассмотрим двусторонний идеал, лежащий в радикале Джекобсона $I \subseteq J(R)$. Предположим, что идемпотенты поднимаются по модулю I. Пусть

$$g^2 = g \in R, \quad u^2 - u \in I, \quad ug, gu \in I.$$

Тогда в R существует идемпотент e, который ортогонален g и при этом поднимает u по модулю I, т.е. $e - u \in I$.

Доказательство. Пусть $f \in R$ — результат поднятия u по модулю I. Поскольку $gu, ug \in I$, имеем $gf = g(f-u) + gu \in I$, а также $fg = (f-u)g + ug \in I$. Так как I лежит в $J(R)$, то элемент $1 - fg$ обратим. Рассмотрим

$$h = (1-fg)^{-1} f (1-fg).$$

Он идемпотентен, причём $hg = 0$, поскольку $f(1-fg)g = fg - f^2g^2 = 0$. Покажем, что $h - f \in I$. Действительно, из тождества $(1-fg)h = f(1-fg)$ получаем $h - f = fgh - fg \in I$, так как $fg \in I$.

Положим $e = (1-g)h$. Тогда $ge = eg = 0$. Далее так как элементы $h-f$, gf, $f-u$ лежат в идеале I, то в факторкольце R/I выполнено

$$e + I = (1-g)h + I = (1-g)f + I = f + I = u + I.$$

Покажем, что $e^2 = e$. Докажем вспомогательное равенство

$$\underbrace{f(1-fg)(1-g)} = (f - fg)(1-g) = f(1-g)^2 = f(1-g) = f - f^2g = f(1-fg).$$

Теперь возведем e в квадрат

$$\begin{aligned} e^2 = (1-g)(1-fg)^{-1}\underbrace{f(1-fg)(1-g)}(1-fg)^{-1}f(1-fg) = \\ = (1-g)(1-fg)^{-1}f\cancel{(1-fg)}\,\cancel{(1-fg)^{-1}}f(1-fg) = \\ = (1-g)(1-fg)^{-1}f(1-fg) = (1-g)h = e. \end{aligned}$$

$\square$

Теорема 13.8. Рассмотрим идеал, лежащий в радикале Джекобсона $I \subseteq J(R)$. Предположим, что по модулю I поднимаются идемпотенты. Тогда любое конечное или счетное ортогональное множество ненулевых идемпотентов факторкольца R/I поднимается по модулю I до ортогонального множества ненулевых идемпотентов кольца R.

Другими словами, для всякой конечной или счётной системы $u_1, u_2, \ldots$ элементов кольца R, таких что $u_i \notin I$ и $u_i u_j - \delta_{ij} u_i \in I$, существует система $e_1, e_2 \ldots$ элементов кольца R, для которых $e_i - u_i \in I$ и $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, причём все e_i ненулевые.

Доказательство. На шаге индукции при построении e_{n+1} применяем предыдущую лемму к $e_1 + \ldots + e_n$ и u_{n+1}. Тогда e_{n+1}, как было уже доказано, ортогонален всем e_i, $i \leqslant n$. Кроме того, по условию $u_i \notin I$, откуда $e_i = u_i + (e_i - u_i) \notin I$ и не может быть равным нулю. $\square$

Определение 13.9. Кольцо R называется *полулокальным*, если фактор по радикалу Джекобсона $R/J(R)$ является (классически) полупростым кольцом, т.е. изоморфен прямому произведению матричных колец над телами.

Предложение 13.10. 1) Кольцо R с конечным числом максимальных правых идеалов полулокально.

2) Если R полулокально и $R/J(R)$ коммутативно, то в R конечное число максимальных правых идеалов.

Доказательство. 1) Обозначим $\overline{R} = R/J(R)$. Если в R конечное число максимальных правых идеалов, то для $\overline{R}$ это тоже верно в силу теоремы о соответствии подмодулей. Пусть $N_1, \ldots, N_n$ — это все максимальные правые идеалы $\overline{R}$. Их пересечение совпадает с радикалом $J(\overline{R})$, но он равен нулю. Тогда отображение правых $\overline{R}$-модулей $\overline{R}_{\overline{R}} \mapsto \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \overline{R}_{\overline{R}}/N_i$ имеет нулевое ядро. По теореме о гомоморфизме $\overline{R}_{\overline{R}}$ изоморфен подмодулю полупростого модуля, а значит, и сам полупрост.

2) Кольцо $R/J(R)$ коммутативно и полупросто, поэтому оно изоморфно прямому произведению полей $\mathbb{F}_1 \times \ldots \times \mathbb{F}_n$. Отсюда в $R/J(R)$ лишь конечное число максимальных правых идеалов, это в точности идеалы вида $\mathbb{F}_1 \times \ldots \mathbb{F}_{i-1} \times 0 \times \mathbb{F}_{i+1} \times \ldots \mathbb{F}_n$. По теореме о соответствии подмодулей в R тоже будет конечное число максимальных правых идеалов. $\square$

Отметим, что в общем случае в полулокальном кольце может быть бесконечно много максимальных правых идеалов. В качестве примера можно рассмотреть кольцо $n \times n$ матриц над бесконечным полем при $n \geqslant 2$.

Примеры 13.11. 1) Всякое локальное кольцо полулокально.

2) Всякое артиново слева или справа кольцо также полулокально (следствие 9.19).

Теорема 13.12 (Кэмпс, Дикс, 1993)**.** Кольцо эндоморфизмов артинового модуля полулокально.

Без доказательства. $\square$

В дальнейшем мы докажем этот факт для случая, когда модуль одновременно и артинов, и нётеров.

Задачи к лекции 13.

Задача 1. Покажите, что если кольцо R нётерово справа, то в нём не может быть бесконечного множества ненулевых попарно ортогональных идемпотентов.

Задача 2. Докажите, что следующие условия на идемпотент e эквивалентны:
1) e централен (т.е. лежит в центре кольца);
2) e коммутирует со всеми нильпотентами;
3) $Re = eR$.

Задача 3. Определите максимальную мощность конечного ортогонального множества примитивных идемпотентов, сумма которых равна 1, в кольце матриц $M_n(\mathbb{F})$ над полем.

Задача 4. Покажите, что если множество всех идемпотентов кольца конечно, то его мощность чётна.

Задача 5. Найдите, до какого идемпотента поднимается элемент 7 кольца $\mathbb{Z}_{36}$ по модулю радикала Джекобсона.

Задача 6. Верно ли, что подкольцо полулокального кольца является полулокальным?

Задача 7. Покажите, что кольцо матриц $M_n(R)$ над полулокальным кольцом R тоже полулокально.

Задача 8. Покажите, что конечное прямое произведение полулокальных колец также полулокально.

14 Локальные идемпотенты. Полусовершенные кольца. Теорема Мюллера

Вспомним, что для любого идемпотента $e \in R$ множество eRe является кольцом с единицей e. Следующая теорема показывает как связаны между собой радикалы колец eRe и R.

Теорема 14.1. Пусть $J = J(R)$ — радикал Джекобсона, $\overline{R} = R/J$. Тогда для любого идемпотента $e \in R$ выполнено

$$J(eRe) = eRe \cap J = eJe, \qquad eRe/J(eRe) \cong \overline{e}\overline{R}\overline{e}$$

где $\overline{e} = e + J \in \overline{R}$.

Доказательство. Докажем цепочку включений

$$J(eRe) \underset{\text{А)}}{\subseteq} eRe \cap J \underset{\text{Б)}}{\subseteq} eJe \underset{\text{В)}}{\subseteq} J(eRe).$$

А) В силу $J(eRe) \subseteq eRe$, нужно проверить, что $J(eRe) \subseteq J$. Рассмотрим произвольное $u \in J(eRe)$. По теореме 9.5 достаточно показать, что для всех $x \in R$ элемент $1-ux$ обратим справа. Так как u лежит в радикале Джекобсона кольца eRe, то снова по теореме 9.5 элемент $e - u(exe)$ обратим справа в кольце eRe. Другими словами, найдётся такой $v \in eRe$, что $e = (e - uexe)v$. Далее

$$e = (e - uexe)v = (1 - uex)ev \underset{u,v \in eRe}{=} (1 - ux)v.$$

Умножим на ux справа

$$ux = (1 - ux)vux.$$

Прибавим разность $1 - ux$ к обеим частям равенства

$$1 = (1 - ux)vux + 1 - ux = (1 - ux)(vux + 1),$$

откуда $1 - ux$ обратим справа, что и требовалось.

Б) Если $u \in eRe \cap J$, тогда $u = eue \in eJe$.

В) Пусть $u \in eJe$. Нужно проверить, что для всех $x \in eRe$ элемент $e-ux$ обратим справа в кольце eRe. Так как $u \in eJe \subseteq J$, то элемент $1-ux$ обратим справа в кольце R, т.е. $1 = (1 - ux)v$ для некоторого $v \in R$. Умножая это равенство на e справа и слева получаем

$$e = e(1 - ux)ve = (e - eux)ve \underset{x,u \in eRe}{=} (e^2 - uxe)ve = (e - ux)eve,$$

а значит, eve является правым обратным для $e - ux$ в кольце eRe.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим естественную проекцию $\pi : R \longrightarrow \overline{R}$ и её ограничение $\pi\Big|_{eRe}$. Вычислим

$$\ker \pi\Big|_{eRe} = \ker \pi \cap eRe = J \cap eRe = J(eRe)$$

по доказанному. Остаётся применить к $\pi\Big|_{eRe}$ теорему о гомоморфизме колец

$$\overline{e}\overline{R}\overline{e} = \pi(eRe) \cong eRe/J(eRe).$$

$\square$

Теорема 14.2 (О локальных идемпотентах)**.** Пусть $e \in R$ — ненулевой идемпотент. Обозначим $J = J(R)$, $\overline{R} = R/J$, $\overline{e} = e + J \in \overline{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) eRe — локальное кольцо.

2) eR — строго неразложимый правый R-модуль.

3) $\overline{e}\overline{R}$ — минимальный правый идеал кольца $\overline{R}$.

2'), 3') — левые аналоги для Re и $\overline{R}\overline{e}$.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Кольцо эндоморфизмов модуля eR изоморфно eRe (предложение 13.1). Поэтому всё следует из определения строго неразложимого модуля (определение 12.3).

1) $\Rightarrow$ 3) Требуется доказать, что $\overline{e}\overline{R}$ является неприводимым $\overline{R}$-модулем. Для этого достаточно проверить, что произвольный ненулевой элемент $\overline{e}\overline{a} \neq \overline{0}$ порождает $\overline{e}\overline{R}$ как $\overline{R}$-модуль (предложение 3.3). Пусть $\overline{N}$ — подмодуль в $\overline{e}\overline{R}$, порождённый элементом $\overline{e}\overline{a}$, т.е. $\overline{N} = \overline{e}\overline{a}\overline{R}$. Наша цель — показать, что $\overline{N} = \overline{e}\overline{R}$.

Заметим, что $\overline{N}^2$ не обращается в ноль. Иначе в силу того, что радикал Джекобсона содержит все правые нильидеалы (предложение 10.5) получаем $\overline{N} \subseteq J(\overline{R}) = \overline{0}$ и $\overline{e}\overline{a} = \overline{0}$, что противоречит выбору элемента $\overline{e}\overline{a}$.

Итак, $\overline{N}^2 \neq \overline{0}$, другими словами, $\overline{e}\overline{a}\overline{R}\overline{e}\overline{a}\overline{R} \neq \overline{0}$. В частности, найдётся такое $\overline{b} \in \overline{R}$, что $\overline{e}\overline{a}\overline{b}\overline{e} \neq \overline{0}$. Причём элемент $\overline{e}\overline{a}\overline{b}\overline{e}$ лежит в кольце $\overline{e}\overline{R}\overline{e}$. По предыдущей теореме $\overline{e}\overline{R}\overline{e} \cong eRe/J(eRe)$. Однако eRe локально по пункту 1), поэтому $\overline{e}\overline{R}\overline{e}$ является телом. В частности, элемент $\overline{e}\overline{a}\overline{b}\overline{e}$ обратим в кольце $\overline{e}\overline{R}\overline{e}$, т.е. найдётся такое $\overline{e}\overline{c}\overline{e}$, что $(\overline{e}\overline{a}\overline{b}\overline{e})(\overline{e}\overline{c}\overline{e}) = \overline{e}$. Это означает, что правый идеал $\overline{e}\overline{a}\overline{R}$ содержит $\overline{e}$. Следовательно, $\overline{e}\overline{R} = \overline{e}\overline{a}\overline{R} = \overline{N}$, что и требовалось.

3) $\Rightarrow$ 1) По лемме Шура кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}\,(\overline{e}\overline{R})_{\overline{R}}$ является телом. С другой стороны, $\mathrm{End}\,(\overline{e}\overline{R})_{\overline{R}} \cong \overline{e}\overline{R}\overline{e}$ (предложение 13.1). По предыдущей теореме $\overline{e}\overline{R}\overline{e} \cong eRe/J(eRe)$, откуда eRe локально, т.к. фактор по радикалу Джекобсона является телом.

2') $\Leftrightarrow$ 1) $\Leftrightarrow$ 3') Симметрично. $\square$

Определение 14.3. Идемпотент $e \in R \setminus \{0\}$ называется *локальным*, если eRe — локальное кольцо.

Следствие 14.4. Каждый локальный идемпотент $e \in R$ является примитивным.

Доказательство. Локальное кольцо eRe содержит только тривиальные идемпотенты (предложение 12.4). $\square$

Определение 14.5. Кольцо R называется *полусовершенным*, если выполнены оба условия:

1) Фактор по радикалу Джекобсона $R/J(R)$ является (классически) полупростым кольцом, т.е. изоморфен прямому произведению колец матриц над телами.

2) Идемпотенты поднимаются по модулю радикала Джекобсона.

Примеры 14.6. 1) Если кольцо R артиново справа, то оно полусовершенно. Действительно $R/J(R)$ полупростое кольцо (следствие 9.19). Также радикал Джекобсона артинова справа кольца нильпотентен (теорема 10.6). Поэтому идемпотенты можно поднимать по модулю радикала (теорема 13.6).

2) Если кольцо R локально, то оно полусовершенно. Фактор по радикалу $R/J(R)$ является телом, а это (классически) полупростое кольцо. Кроме того, в теле есть только тривиальные идемпотенты $0 + J(R)$, $1 + J(R)$, которые поднимаются тривиальным образом до 0 и 1.

Прежде чем дать характеризацию совершенных колец, докажем лемму.

Лемма 14.7. Пусть даны две полные ортогональные системы идемпотентов $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ одинаковой мощности n

$$1 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha_i^2 = \alpha_i, \quad \alpha_i\alpha_j = \alpha_j\alpha_i = 0 \text{ при } i \neq j;$$

$$1 = \beta_1 + \ldots + \beta_n, \quad \beta_i^2 = \beta_i, \quad \beta_i\beta_j = \beta_j\beta_i = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Предположим, что для каждого $i = 1, \ldots, n$ правые идеалы $\alpha_i R \cong \beta_i R$ изоморфны как R-модули. Тогда найдётся такой обратимый элемент кольца $c \in R$, что

$$c\alpha_i c^{-1} = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть отображения $\chi_i : \alpha_i R \longrightarrow \beta_i R$ задают изоморфизм правых R-модулей. Определим эндоморфизм χ регулярного модуля R_R как

$$\chi(r) = (\chi_1 \oplus \ldots \oplus \chi_n)(r) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(\alpha_i r), \quad r \in R.$$

Разложения Пирса $R_R = \bigoplus_{i=1}^n \alpha_i R = \bigoplus_{i=1}^n \beta_i R$ можно понимать как внешние прямые суммы, тогда

$$\chi \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1(r_1) \\ \vdots \\ \chi_n(r_n) \end{pmatrix}, \quad r_i \in \alpha_i R.$$

Так как $\chi_1, \ldots, \chi_n$ изоморфизмы, то χ — тоже изоморфизм и существует χ^{-1}. Однако $R \cong \operatorname{End} R_R$, и каждый эндоморфизм является умножением на подходящий элемент кольца слева (теорема 3.15). Поэтому $\chi(r) = c \cdot r$ для некоторого обратимого $c \in R$.

Теперь построим новое разложение единицы

$$1 = c \cdot 1 \cdot c^{-1} = c(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)c^{-1} = c\alpha_1 c^{-1} + \ldots + c\alpha_n c^{-1}.$$

Каждое слагаемое

$$c\alpha_i c^{-1} = \chi(\alpha_i)c^{-1} = \chi_i(\alpha_i)c^{-1} \in \beta_i R c^{-1} = \beta_i R.$$

Однако разложение Пирса $R_R = \bigoplus_{i=1}^n \beta_i R$ — прямая сумма, причём $1 = \beta_1 + \ldots + \beta_n$ — другое разложение единицы. Это возможно только при $c\alpha_i c^{-1} = \beta_i$. $\square$

Лемма 14.8. Обозначим $J = J(R)$, $\overline{R} = R/J$. Для $c \in R$ следующие условия эквивалентны:

1) c — обратимый элемент кольца R;

2) $\bar{c} = c + J$ — обратимый элемент кольца $\overline{R}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Если $1 = dc = cd$, то $\bar{1} = \bar{d}\bar{c} = \bar{c}\bar{d}$.

2) $\Rightarrow$ 1) Так как $\bar{c}$ обратим, то найдётся $d \in R$, что $dc = 1 + u$ и $cd = 1 + v$, где $u, v \in J$. В силу квазирегулярности радикала элементы $1+u$ и $1+v$ обратимы. Тогда $1 = (1+u)^{-1} \cdot d \cdot c = c \cdot d \cdot (1+v)^{-1}$, т.е. элемент c обратим и справа, и слева. Тогда левый и правый обратный совпадают (определение 1.4). □

Теорема 14.9 (Мюллер[16], 1970)**.** Кольцо $R \neq 0$ является полусовершенным тогда и только тогда, когда оно содержит полное ортогональное множество локальных идемпотентов:

$$1 = e_1 + \ldots + e_n, \quad e_i^2 = e_i, \quad e_iRe_i \text{ локально}, \quad e_ie_j = e_je_i = 0, \text{ при } i \neq j.$$

Доказательство. Обозначим как обычно $J = J(R)$, $\overline{R} = R/J$.

($\Rightarrow$) Кольцо R полусовершенное, поэтому $\overline{R}$ полупростое. Это означает, что $\overline{R}_{\overline{R}}$ — полупростой модуль. При этом он конечно порождён (одной лишь единицей кольца), а значит, распадается в конечную прямую сумму неприводимых подмодулей (предложение 6.3)

$$\overline{R}_{\overline{R}} = \overline{N}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{N}_n.$$

Тогда кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} \overline{R}_{\overline{R}}$ содержит полное ортогональное множество идемпотентов $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$:

$$\bar{e}_1 + \ldots + \bar{e}_n = \bar{1}, \quad \bar{e}_i\bar{e}_j = \bar{e}_j\bar{e}_i = \bar{0} \text{ при } i \neq j,$$

причём $e_i(\overline{R}_{\overline{R}}) = \overline{N}_i$ (предложение 11.14). Однако $\overline{R} \cong \operatorname{End} \overline{R}_{\overline{R}}$, и каждый эндоморфизм является умножением на элемент кольца слева (теорема 3.15). Поэтому можно считать, что $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — идемпотенты кольца $\overline{R}$, а также $\overline{N}_i = \bar{e}_i\overline{R}$. Тогда в силу неприводимости получаем, что $\bar{e}_i\overline{R}$ — минимальный правый идеал.

Так как R полусовершенное, то по модулю радикала поднимаются идемпотенты. Поэтому $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ могут быть подняты до ортогональной системы $e_1, \ldots, e_n$ идемпотентов кольца R (теорема 13.8). Тогда их сумма $s = e_1 + \ldots + e_n$ тоже будет идемпотентом в силу ортогональности. При этом $s - 1 \in J$. Из квазирегулярности радикала получаем, что $s = 1 + (s-1)$ обратим. Единственный обратимый идемпотент — это единица. Значит, $e_1 + \ldots + e_n = 1$.

Осталось заметить, что т.к. $\bar{e}_i\overline{R}$ — минимальный правый идеал, то каждый идемпотент e_i локален (теорема 14.2).

[16]Mueller, B.J., 1970. On semi-perfect rings. Illinois J. Math. 14.

($\Leftarrow$) Рассмотрим проекции $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$ на факторкольцо $\overline{R}$. Тогда $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — полное ортогональное множество идемпотентов кольца $\overline{R}$. Запишем разложение Пирса

$$\overline{R}_{\overline{R}} = \bar{e}_1\overline{R} \oplus \ldots \oplus \bar{e}_n\overline{R}.$$

Так как каждый идемпотент e_i локален, то $\bar{e}_i\overline{R}_i$ — минимальный правый идеал, т.е. неприводимый правый $\overline{R}$-модуль (теорема 14.2). Получаем, что $\overline{R}_{\overline{R}}$ раскладывается в сумму неприводимых подмодулей. Отсюда $\overline{R}_{\overline{R}}$ — полупростой модуль, и $\overline{R}$ — полупростое кольцо.

Покажем, что идемпотенты поднимаются по модулю радикала Джекобсона. Пусть проекция некоторого элемента $a \in R$ является идемпотентом в $\overline{R}$, т.е. $\bar{a}^2 = \bar{a}$, где $\bar{a} = a + J$. Требуется найти идемпотент $e \in R$, такой что $\bar{e} = \bar{a}$.

Правый идеал $(1 - \bar{a})\overline{R}$ является подмодулем полупростого регулярного модуля $\overline{R}_{\overline{R}} = \bar{e}_1\overline{R} \oplus \ldots \oplus \bar{e}_n\overline{R}$. Тогда $(1-\bar{a})\overline{R}$ обладает дополнением, которое является суммой некоторых $\bar{e}_i\overline{R}$ (следствие 6.8). С точностью до перенумерации можно считать, что для некоторого $k \leqslant n$

$$\overline{R}_{\overline{R}} = \bar{e}_1\overline{R} \oplus \ldots \oplus \bar{e}_k\overline{R} \oplus (1 - \bar{a})\overline{R}.$$

В исходном кольце R рассмотрим $b = e_1 + \ldots + e_k$. Так как идемпотенты $e_1, \ldots, e_k$ ортогональны, то $b^2 = b$ — идемпотент. Тогда его проекция на факторкольцо $\bar{b} = \bar{e}_1 + \ldots + \bar{e}_k$ также будет идемпотентом.

Правый идеал $\bar{b}\overline{R}$ содержит все идемпотенты $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k$ в силу $\bar{b}\bar{e}_i = \bar{e}_i$. Поэтому $\bar{b}\overline{R} \supseteq \bar{e}_1\overline{R} \oplus \ldots \oplus \bar{e}_k\overline{R}$. Обратное включение вытекает из равенства $\bar{b} = \bar{e}_1 + \ldots + \bar{e}_k$. Таким образом, $\bar{b}\overline{R} = \bar{e}_1\overline{R} \oplus \ldots \oplus \bar{e}_k\overline{R}$, откуда

$$\overline{R}_{\overline{R}} = \bar{b}\overline{R} \oplus (1 - \bar{a})\overline{R}. \qquad (*)$$

Из разложения Пирса $\overline{R}_{\overline{R}} = \bar{a}\overline{R} \oplus (1 - \bar{a})\overline{R}$ и равенства $(*)$ получаем

$$\bar{a}\overline{R} \;\cong\; \overline{R}_{\overline{R}}/(1 - \bar{a})\overline{R} \;\underset{(*)}{\cong}\; \bar{b}\overline{R}.$$

Аналогично из разложения Пирса $\overline{R}_{\overline{R}} = \bar{b}\overline{R} \oplus (1 - \bar{b})\overline{R}$ и равенства $(*)$ получаем

$$(1 - \bar{a})\overline{R} \;\underset{(*)}{\cong}\; \overline{R}_{\overline{R}}/\bar{b}\overline{R} \;=\; (1 - \bar{b})\overline{R}.$$

Наконец мы можем применить лемму 14.7 к двум полным ортогональным системам идемпотентов $\bar{a}, \bar{1} - \bar{a}$ и $\bar{b}, \bar{1} - \bar{b}$ кольца $\overline{R}$. Найдётся обратимый элемент $\bar{c} \in \overline{R}$ такой, что $\bar{a} = \bar{c}^{-1}\bar{b}\bar{c}$. Тогда c обратим в кольце R по лемме 14.8. Элемент $c^{-1}bc$ является идемпотентом кольца R, т.к. b — идемпотент. Более того, $c^{-1}bc$ поднимает $\bar{a}$. Теорема полностью доказана. $\square$

Оказывается, что разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов единственно с точностью до перестановки слагаемых и сопряжения обратимым элементом. Для доказательства этого факта нам понадобится рассмотреть понятие изоморфных идемпотентов.

Задачи к лекции 14.

Задача 1. Найдите локальные идемпотенты кольца формальных степенных рядов $R[[x]]$ над коммутативным кольцом R.

Задача 2. Докажите, что если $R \neq 0$ — коммутативное артиново кольцо, то $R \cong R_1 \times \ldots \times R_n$, где каждое R_i локальное артиново. *Указание:* примените теорему Мюллера.

Задача 3. Верно ли, что подкольцо полусовершенного кольца является полусовершенным?

Задача 4. Пусть R — полусовершенное кольцо. Покажите, что любое его фактор-кольцо тоже полусовершенно.

Задача 5. Докажите, что кольцо матриц над полусовершенным кольцом является полусовершенным.

Задача 6. Покажите, что если групповое кольцо RG — полусовершенно, то и кольцо коэффиенцетов R является полусовершенным.

15 Изоморфизм идемпотентов. Свойства полусовершенных колец

Предложение 15.1 (Об изоморфных идемпотентах)**.** Для идемпотентов $\alpha, \beta \in R$ следующие условия эквивалентны

1) $\alpha R \cong \beta R$ как правые R-модули.

1') $R\alpha \cong R\beta$ как левые R-модули.

2) Существуют такие $x \in \alpha R\beta$ и $y \in \beta R\alpha$, что $\alpha = xy$ и $\beta = yx$.

3) Существуют такие $x, y \in R$, что $\alpha = xy$ и $\beta = yx$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть $\varphi : \alpha R \longrightarrow \beta R$ — изоморфизм. Обозначим $\varphi(\alpha) = y$, $\varphi^{-1}(\beta) = x$. Тогда

$$y = \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha^2) = \underbrace{\varphi(\alpha)}_{\in\beta R}\alpha \in \beta R\alpha, \quad x = \varphi^{-1}(\beta) = \varphi^{-1}(\beta^2) = \underbrace{\varphi^{-1}(\beta)}_{\in\alpha R}\beta \in \alpha R\beta.$$

Теперь вычислим

$$\alpha = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha)) = \varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(\beta y) = \varphi^{-1}(\beta)y = xy,$$
$$\beta = \varphi(\varphi^{-1}(\beta)) = \varphi(x) = \varphi(\alpha x) = \varphi(\alpha)x = yx.$$

2) $\Rightarrow$ 3) Тавтология.

3) $\Rightarrow$ 1) Для каждого $r \in R$ определим

$$\varphi : \alpha R \longrightarrow \beta R, \quad \varphi(\alpha r) = y\alpha r = yxyr = \beta(yr) \in \beta R;$$

$$\psi : \beta R \longrightarrow \alpha R, \quad \psi(\beta r) = x\beta r = xyxr = \alpha(xr) \in \alpha R.$$

По построению оба отображения являются гомоморфизмами правых R-модулей. При этом они обращают друг друга

$$\varphi(\psi(\beta r)) = \varphi(\psi(\beta))r = \varphi(\alpha x)r = \beta(yx)r = \beta^2 r = \beta r;$$

$$\psi(\varphi(\alpha r)) = \psi(\varphi(\alpha))r = \psi(\beta y)r = \alpha(xy)r = \alpha^2 r = \alpha r.$$

1') $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1') Симметричные рассуждения. $\square$

Определение 15.2. Идемпотенты α, β кольца R называются *изоморфными* $\alpha \cong \beta$, если $\alpha R \cong \beta R$ как правые R-модули.

Любой пункт предыдущего предложения может быть использован как определение изоморфных идемпотентов.

Теорема 15.3. Пусть $J = J(R)$ — радикал Джекобсона, $\overline{R} = R/J$. Рассмотрим произвольные идемпотенты $\alpha, \beta \in R$ и их проекции $\bar\alpha = \alpha + J$, $\bar\beta = \beta + J$ в кольце $\overline{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\alpha \cong \beta$ как идемпотенты кольца R;

2) $\bar\alpha \cong \bar\beta$ как идемпотенты[17] кольца $\overline{R}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Получаем, что $\alpha = xy$, $\beta = yx$. Тогда $\bar\alpha = \bar x\bar y$, $\bar\beta = \bar y\bar x$, откуда следует изоморфизм $\bar\alpha \cong \bar\beta$ по предыдущему предложению.

2) $\Rightarrow$ 1) По предыдущему предложению найдутся такие $\bar x, \bar y \in \overline{R}$, что $\bar\alpha = \bar x\bar y$, $\bar\beta = \bar y\bar x$. Это означает, что

$$\alpha - xy \in J, \quad \beta - yx \in J.$$

Рассмотрим элемент $\alpha x\beta y$. Его проекция на факторкольцо

$$\bar\alpha\bar x\bar\beta\bar y = (\bar x\bar y)(\bar x\bar y)(\bar x\bar y) = \bar\alpha^3 = \bar\alpha.$$

[17] Это означает, что $\bar\alpha\overline{R} \cong \bar\beta\overline{R}$ как правые $\overline{R}$-модули.

Тогда элемент $u = \alpha - \alpha x\beta y$ лежит в радикале. Умножив на α слева, получим $\alpha u = \alpha - \alpha x\beta y$, откуда

$$\alpha x\beta y = \alpha(1-u).$$

В силу квазирегулярности радикала элемент $1-u$ обратим. Тогда

$$\alpha = \alpha x\beta y(1-u)^{-1} = \underbrace{(\alpha x\beta)}_{=x'}\cdot\underbrace{(\beta y(1-u)^{-1})}_{=y'} = x'y'.$$

Чтобы применить предыдущее предложение, достаточно показать, что $\beta = y'x'$. Рассмотрим разность $\beta - y'x'$. Вычислим

$$(\beta - y'x')^2 \;=\; \beta - \beta y'x' + y'x'\beta - y'\underbrace{(x'y')}_{=\alpha}x'.$$

Так как $x' \in \alpha R\beta$ и $y' \in \beta R$, то получаем

$$(\beta - y'x')^2 \;=\; \beta - y'x' - y'x' + y'x' \;=\; \beta - y'x',$$

т.е. разность $\beta - y'x'$ является идемпотентом.

Покажем, что $\beta - y'x'$ лежит в радикале. Обозначим $1-v = (1-u)^{-1}$. Раскрывая скобки в выражении $(1-u)(1-v) = 1$ получаем, что $v = vu - u \in J$, т.к. $u \in J$ и J — идеал. Тогда

$$\overline{\beta - y'x'} = \bar\beta - \bar{y}'\bar{x}' = \bar\beta - \bar\beta\bar{y}\underbrace{(\overline{1-v})}_{=\bar{1}}\bar\alpha\bar{x}\bar\beta = \bar\beta - \bar\beta\bar{y}\bar\alpha\bar{x}\bar\beta =$$

$$= \bar\beta - \bar\beta(\bar{y}\bar{x})(\bar{y}\bar{x})\bar\beta = \bar\beta - \bar\beta^4 = \bar{0}.$$

Таким образом, разность $\beta - y'x'$ является идемпотентом, лежащим в радикале Джекобсона. В силу квазирегулярности это возможно только при $\beta - y'x' = 0$. В итоге мы получили, что $\alpha = x'y'$ и $\beta = y'x'$, откуда $\alpha \cong \beta$ по предыдущему предложению. □

Напомним, что идемпотент $e \in R$ называется примитивным, если кольцо eRe содержит лишь тривиальные идемпотенты, т.е. только 0 и e. Это равносильно тому, что e нельзя представить в виде $e = s + t$, где s, t — ненулевые ортогональные идемпотенты.

Предложение 15.4. Пусть $J = J(R)$, $\overline{R} = R/J$. Рассмотрим произвольный идемпотент $e \in R$ и его проекцию $\bar{e} = e + J \in \overline{R}$.

1) Если $\bar{e}$ примитивен, то e примитивен.

2) Если e примитивен и по модулю J поднимаются идемпотенты, то $\bar{e}$ тоже примитивен.

Доказательство. 1) От противного, пусть e не примитивен, т.е. $e = s + t$, где s, t — ненулевые ортогональные идемпотенты. Тогда $\bar{e} = \bar{s} + \bar{t}$. В силу квазирегулярности, радикал Джекобсона не содержит ненулевых идемпотентов, поэтому $\bar{s} \neq \bar{0}$ и $\bar{t} \neq \bar{0}$. Получили противоречие с примитивностью $\bar{e}$.

2) От противного, пусть $\bar{e}$ не примитивен, т.е. $\bar{e} = \bar{s} + \bar{t}$, где $\bar{s}, \bar{t}$ — ненулевые ортогональные идемпотенты. Так как по модулю радикала поднимаются идемпотенты, то $\bar{s}, \bar{t}$ могут быть подняты до ортогональной системы s, t идемпотентов кольца R (теорема 13.8). Рассмотрим их сумму $e' = s + t$. В силу ортогональности s и t получаем, что e' — тоже идемпотент. Причём e' разложим, откуда $e'R$ — разложимый правый R-модуль (предложение 13.2). С другой стороны, $\bar{e'} = \bar{s} + \bar{t} = \bar{e}$. В частности, $\bar{e'} \cong \bar{e}$. По предыдущей теореме $e' \cong e$, т.е. $e'R \cong eR$. Модуль $e'R$ разложим, но eR неразложим, т.к. e примитивен. Противоречие. □

Теперь всё готово для того, чтобы доказать несколько важных свойств полусовершенных колец. Напомним, что идемпотент $e \in R$ называется локальным, если eRe — локальное кольцо.

Теорема 15.5. Пусть R — полусовершенное кольцо, $e \in R$ — идемпотент. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) e примитивен;

2) e локален.

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1) Верно для любого кольца (следствие 14.4).

1) $\Rightarrow$ 2) Обозначим $J = J(R)$, $\overline{R} = R/J$, $\bar{e} = e + J$. Так как R полусовершенное, то по модулю радикала поднимаются идемпотенты. Тогда по предыдущему предложению $\bar{e}$ — примитивный идемпотент кольца $\overline{R}$.

Покажем, что $\bar{e}\overline{R}$ — минимальный правый идеал. От противного, пусть найдётся $\bar{0} \neq L \subsetneq \bar{e}\overline{R}$ — нетривиальный подмодуль над $\overline{R}$. Так как кольцо R — полусовершенное, то $\overline{R}$ — полупростое, т.е. $\overline{R}_{\overline{R}}$ — полупростой модуль. Тогда подмодуль $\bar{e}\overline{R} \subseteq \overline{R}_{\overline{R}}$ тоже полупрост (следствие 6.9). Значит, любой его подмодуль должен выделяться прямым слагаемым (теорема 6.7), откуда $\bar{e}\overline{R} = L \oplus L'$ для некоторого L'. Значит, модуль $\bar{e}\overline{R}$ разложим. Это противоречит примитивности идемпотента $\bar{e}$ (предложение 13.2).

Итак, $\bar{e}\overline{R}$ — минимальный правый идеал, откуда e — локальный идемпотент (теорема 14.2). □

Докажем единственность в теореме Мюллера.

Теорема 15.6. Пусть даны две полные ортогональные системы локальных идемпотентов $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\beta_j\}_{j=1}^{m}$ кольца R

$$1 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha_i^2 = \alpha_i, \quad \alpha_i R \alpha_i \text{ локально}, \quad \alpha_i\alpha_j = \alpha_j\alpha_i = 0 \text{ при } i \neq j;$$

$$1 = \beta_1 + \ldots + \beta_m, \quad \beta_i^2 = \beta_i, \quad \beta_i R \beta_i \text{ локально}, \quad \beta_i\beta_j = \beta_j\beta_i = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Тогда $m = n$ и существует такая подстановка σ на множестве $\{1, \ldots, n\}$ и такой обратимый элемент $c \in R$, что

$$c\alpha_{\sigma(i)}c^{-1} = \beta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Обозначим $J = J(R)$, $\overline{R} = R/J$, $\bar{\alpha}_i = \alpha_i + J$, $\bar{\beta}_j = \beta_j + J$. Запишем два разложения Пирса для кольца $\overline{R}$

$$\bar{\alpha}_1\overline{R} \oplus \ldots \oplus \bar{\alpha}_n\overline{R} = \overline{R}_{\overline{R}} = \bar{\beta}_1\overline{R} \oplus \ldots \oplus \bar{\beta}_m\overline{R}.$$

Так как идемпотенты α_i, β_j локальны, то $\bar{\alpha}_i\overline{R}$, $\bar{\beta}_j\overline{R}$ — минимальные правые идеалы, т.е. неприводимые $\overline{R}$-модули (теорема 14.2).

Разложение в конечную сумму неприводимых модулей единственно с точностью до изоморфизма (предложение 6.10). Поэтому $m = n$ и найдётся такая подстановка σ на множестве $\{1, \ldots, n\}$, что $\bar{\alpha}_{\sigma(i)}\overline{R} \cong \bar{\beta}_i\overline{R}$ как правые $\overline{R}$-модули. Значит, идемпотенты $\bar{\alpha}_{\sigma(i)} \cong \bar{\beta}_i$ изоморфны. Отсюда $\alpha_{\sigma(i)} \cong \beta_i$ тоже изоморфны (теорема 15.4). Поэтому $\alpha_{\sigma(i)}R \cong \beta_i R$. Остаётся применить лемму 14.7. □

Далее мы получим критерий, показывающий когда кольцо эндоморфизмов заданного модуля является полусовершенным. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 15.7. Пусть M — правый R-модуль, $S = \operatorname{End} M_R$ — его кольцо эндоморфизмов. Пусть $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ и $\{e_i\}_{i=1}^n$ — полное ортогональное множество идемпотентов кольца S такое, что $e_i(M) = M_i$ (предложение 11.14). Тогда для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеется изоморфизм колец

$$e_i S e_i \cong \operatorname{End}(M_i)_R.$$

Доказательство. Если $s \in S$ — произвольный эндоморфизм модуля M, то для любого $m_i \in M_i$ выполнено $e_i s e_i(m_i) \in M_i$. Поэтому ограничение $e_i s e_i\Big|_{M_i}$ — эндоморфизм модуля M_i. Рассмотрим гомоморфизм колец

$$e_i S e_i \longrightarrow \operatorname{End}(M_i)_R, \quad e_i s e_i \mapsto e_i s e_i\Big|_{M_i}.$$

Так как e_i — идемпотент, то он действует на своём образе M_i тождественно. Поэтому наш гомоморфизм переводит $e_i^3 = e_i$ в ограничение $e_i\Big|_{M_i} = \mathrm{id}_{M_i}$.

Если образ эндоморфизма $e_i s e_i(M_i) = 0$, то $e_i s e_i(M) = e_i s e_i^2(M) = e_i s e_i(M_i) = 0$. Значит, гомоморфизм колец инъективен.

Произвольный эндоморфизм $s' \in \operatorname{End}(M_i)_R$ можно продолжить до эндоморфизма s всего модуля M, так как M_i — его прямое слагаемое. Тогда для любого $m_i \in M_i$ выполнено

$$e_i s e_i(m_i) = e_i s(m_i) = e_i s'(m_i) = s'(m_i).$$

Мы получили, что гомоморфизм колец сюръективен.

□

Теорема 15.8. Пусть M — правый R-модуль, $S = \operatorname{End} M_R$ — его кольцо эндоморфизмов. Тогда следующие условия эквивалентны

1) S полусовершенное;

2) $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, где все M_i строго неразложимы.

Доказательство. По теореме Мюллера S полусовершенное тогда и только тогда, когда оно содержит полное ортогональное множество $\{e_i\}_{i=1}^n$ локальных идемпотентов. По предложению 11.14 наличие полной ортогональной системы идемпотентов равносильно возможности разложения $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, где $e_i(M) = M_i$.

По определению локальность идемпотента e_i означает, что кольцо e_iSe_i локально. По предыдущей лемме $\operatorname{End}(M_i)_R \cong e_iSe_i$. Поэтому идемпотенты e_i локальны тогда и только тогда, когда модули M_i строго неразложимы. □

Следствие 15.9. Пусть модуль M одновременно артинов и нётеров. Тогда его кольцо эндоморфизмов полусовершенное. В частности, оно полулокальное.

Доказательство. Модуль M обладает разложением Крулля-Шмидта, в котором все модули строго неразложимы (теорема 12.10). □

Задачи к лекции 15.

Задача 1. В кольце матриц $M_2(\mathbb{Z}_4)$ проверить, какие из идемпотентов изоморфны: E_{11}, $E_{11} + E_{12}$, E_{22}, $E_{11} + E_{22}$, $E_{11} + 3E_{12} + E_{22}$.

Задача 2. Найдите полное множество локальных ортогональных идемпотентов в кольце $\mathbb{Z}_n$.

Задача 3. Пусть R — локальное кольцо, M — свободный правый R-модуль с конечным базисом. Докажите, что кольцо эндоморфизмов $S = \operatorname{End} M_R$ является полусовершенным. *Указание:* воспользуйтесь критерием с лекции.

Задача 4. Пусть $e \in R$ — идемпотент, $J = J(R)$ — радикал Джекобсона, $\overline{R} = R/J$, $\bar{e} = e + J$. Докажите, что имеется изоморфизм правых R-модулей

$$eR/eJ \cong \bar{e}\overline{R}.$$

Задача 5. Пусть $e \in R$ — идемпотент. Используя задачу 4, докажите, что правый R-модуль eR/eJ является неприводимым тогда и только тогда, когда e локален.

Задача 6. Приведите пример модуля, кольцо эндоморфизмов которого а) локальное, б) полулокальное, но не локальное.

16 Чистые кольца. Ортогонально конечные кольца

Определение 16.1. Элемент $r \in R$ называется *чистым*[18], если он представим в виде суммы идемпотента и обратимого элемента

$$r = e + u, \qquad e^2 = e, \quad \exists u^{-1.}$$

Кольцо считается *чистым* в случае, когда все его элементы чистые.

Примеры 16.2.

- Элементы $0, 1$ являются чистыми в силу равенств $0 = 1 + (-1)$ и $1 = 0 + 1$.
- Обратимый элемент является чистым в любом кольце ввиду $r = 0 + r$. Поэтому любое тело или поле — это чистое кольцо.
- Локальное кольцо всегда является чистым тривиальным образом. Действительно, если r обратим, то он чист. Если же r необратим, то $1 - r$ обратим по свойствам локального кольца (теорема 11.2). Тогда $r = 1 + (r - 1)$.
- В кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ чистыми являются только элементы $-1, 0, 1, 2$. Отсюда само кольцо не обладает этим свойством.

Лемма 16.3. Пусть $e \in R$ — идемпотент, для которого eRe и $(1-e)R(1-e)$ — чистые кольца. Тогда R также чистое.

Доказательство. Обозначим $e_1 = e$, $e_2 = 1 - e_1$. Тогда $\{e_1, e_2\}$ — полное ортогональное множество из двух идемпотентов. Запишем разложение Пирса (предложение 11.12) для кольца R:

$$R \cong \begin{pmatrix} e_1Re_1 & e_1Re_2 \\ e_2Re_1 & e_2Re_2 \end{pmatrix}, \quad r \mapsto \begin{pmatrix} e_1re_1 & e_1re_2 \\ e_2re_1 & e_2re_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольную матрицу $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, где $x_{ij} \in e_iRe_j$. Требуется показать, что X представима в виде суммы идемпотента и обратимого элемента. По условию кольцо e_1Re_1 чистое, тогда

$$x_{11} = \eta + a, \quad \eta^2 = \eta, \quad aa' = a'a = e_1, \qquad a, a', \eta \in e_1Re_1.$$

Рассмотрим разность $x_{22} - x_{21}a'x_{12}$. Так как $x_{21} \in e_2R$ и $x_{12} \in Re_2$, то эта разность лежит в кольце e_2Re_2. По условию оно является чистым, значит

$$x_{22} - x_{21}a'x_{12} = \theta + b, \quad \theta^2 = \theta, \quad bb' = b'b = e_2, \qquad b, b', \theta \in e_2Re_2.$$

[18] a clean element

Тогда матрицу X можно представить в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta + a & x_{12} \\ x_{21} & \theta + b + x_{21}a'x_{12} \end{pmatrix} = Y + Z.$$

$$Y = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} a & x_{12} \\ x_{21} & b + x_{21}a'x_{12} \end{pmatrix}.$$

Так как η, θ — идемпотенты, то $Y^2 = Y$.

Осталось проверить, что матрица Z обратима в кольце $\begin{pmatrix} e_1Re_1 & e_1Re_2 \\ e_2Re_1 & e_2Re_2 \end{pmatrix}$. Напомним, что единицей этого кольца является матрица $\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$. Заметим, что выполнено[19]

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ x_{21}a' & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & a'x_{12} \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ x_{21} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & a'x_{12} \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} = Z$$

Каждая из первых трёх матриц обратима в силу

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ x_{21}a' & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ -x_{21}a' & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ -x_{21}a' & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ x_{21}a' & e_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & a'x_{12} \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & -a'x_{12} \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & -a'x_{12} \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & a'x_{12} \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица Z тоже обратима, т.к. является произведением обратимых матриц. □

Теорема 16.4 (Хан, Николсон[20], 2001)**.** Пусть R содержит полное ортогональное множество идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^n$, т.е.

$$1 = e_1 + \ldots + e_n, \quad e_i^2 = e_i, \quad e_ie_j = e_je_i = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Предположим, что каждое кольцо e_iRe_i чистое, $i = 1, \ldots, n$. Тогда R также является чистым.

Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ получаем $e_1 = 1$ и кольцо $R = e_1Re_1$ чистое. Пусть $n > 1$. Сумма $e = e_1 + \ldots + e_{n-1}$ является идемпотентом в силу ортогональности слагаемых. Тогда eRe содержит все $e_1, \ldots, e_{n-1}$, т.к.

$$ee_ie = \left(\sum_{k=1}^{n-1} e_k\right) e_i \left(\sum_{k=1}^{n-1} e_k\right) = e_i^3 = e_i, \quad i = 1, \ldots n-1.$$

[19]Фактически мы перешли от матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ к Z при помощи двух элементарных преобразований вида «прибавить к строке (столбцу) другую строку (столбец), умноженную на элемент кольца».

[20]Han, J., Nicholson, W.K., 2001. Extensions of clean rings. Communications in Algebra 29, 2589–2595

Поэтому кольцо eRe чистое по предположению индукции. Кроме того, $1 - e = e_n$ и e_nRe_n чистое по условию. Остаётся применить предыдущую лемму. $\square$

Следствие 16.5. Если R чистое, то и $M_n(R)$ чистое.

Доказательство. Выберем в качестве идемпотентов диагональные матричные единицы E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $E_{ii}M_n(R)E_{ii} \cong R$ чистое по условию. Применяем теорему. $\square$

Предложение 16.6. Пусть R — чистое кольцо. Тогда всякий его правый идеал, не содержащийся в радикале Джекобсона, содержит ненулевой идемпотент.

Доказательство. Пусть N — правый идеал, не содержащий ненулевых идемпотентов. Рассмотрим произвольный $a \in N$. Тогда $aR \subseteq N$ тоже не содержит ненулевых идемпотентов. Для $r \in R$ запишем $ar = e + u$ по определению чистого кольца. Тогда идемпотент

$$u(1-e)u^{-1} = (ar - e)(1-e)u^{-1} = ar(1-e)u^{-1}$$

лежит в aR. Значит, $u(1-e)u^{-1}$. В силу обратимости u получаем $e = 1$. Таким образом, $u = 1 - ar$ обратим для любого $r \in R$. Это означает, что a лежит в радикале Джекобсона (теорема 9.5). $\square$

Напомним, что идемпотент $e \in R$ локален, если eRe — локальное кольцо. Так как локальное кольцо содержит только тривиальные идемпотенты, то e примитивен. Оказывается, что для чистых колец верно и обратное.

Теорема 16.7. Пусть R — чистое кольцо. Тогда для идемпотента $e \in R$ следующие условия эквивалентны

1) e примитивен;
2) e локален.

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1) Верно для любого кольца (следствие 14.4).

1) $\Rightarrow$ 2) Пусть e — примитивный идемпотент. Рассмотрим элемент $x \in eRe$, не лежащий в радикале $J(eRe)$. Ввиду $J(eRe) = J(R) \cap eRe$ (теорема 14.1), x не лежит и в радикале $J(R)$ исходного кольца R. Тогда по предыдущему предложению правый идеал xR содержит идемпотент $g \neq 0$, т.е. $g = xr$ для некоторого $r \in R$. Ввиду $x \in eRe$ получаем, что

$$eg = exr = xr = g.$$

Рассмотрим элемент ege кольца eRe. Он идемпотентен, т.к.

$$(ege)(ege) = egege = eg(eg)e = eg^2e = ege.$$

При этом e — примитивен, а значит, eRe содержит только тривиальные идемпотенты 0 и e. Заметим, что $ege \neq 0$ в силу

$$0 \neq g = g^2 = (eg)^2 = egeg = (ege)g.$$

Отсюда единственная возможность — это $ege = e$. Тогда

$$e = ege = exre \underset{x \in eRe}{=} x(ere),$$

т.е. элемент x обратим справа в кольце eRe. Однако $x \in eRe$ — произвольный элемент, не лежащий в радикале $J(eRe)$. Поэтому $J(eRe)$ — максимальный правый идеал. Это одно из определений локального кольца (теорема 11.2). $\square$

Определение 16.8. Кольцо R называется *ортогонально конечным*, если оно не содержит бесконечного множества ненулевых попарно ортогональных идемпотентов.

Пример. Пусть $\mathbb{F}$ — поле (например, вещественных чисел). Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{F}^\infty$ всех бесконечных последовательностей $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ элементов поля. Пусть $S = \operatorname{End} \mathbb{F}^\infty$ — кольцо всех линейных операторов на пространстве $\mathbb{F}^\infty$. Обозначим через $e_i \in S$ оператор проекции на i-ю координату, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — бесконечное множество ортогональных идемпотентов.

Предложение 16.9. Если кольцо R нётерово справа, то оно ортогонально конечно.

Доказательство. От противного, тогда R содержит по крайней мере счётное множество $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ попарно ортогональных ненулевых идемпотентов. Заметим, что $e_{k+1} \neq e_1 r_1 + \ldots + e_k r_k$ для любых $r_i \in R$. Иначе, домножив слева на e_{k+1}, мы получили бы $e_{k+1} = 0$. Отсюда $e_1 R \subsetneq e_1 R + e_2 R \subsetneq \ldots$ — строго возрастающая цепочка правых идеалов, что противоречит нётеровости. $\square$

Предложение 16.10. Если кольцо R полулокальное, то оно ортогонально конечное.

Доказательство. От противного, тогда в R найдётся по крайней мере счётное множество $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ ненулевых ортогональных идемпотентов. Обозначим $J = J(R)$, $\overline{R} = R/J$, $\bar{f}_i = f_i + J \in \overline{R}$. В силу квазирегулярности, радикал содержит только нулевые идемпотенты, отсюда $\bar{f}_i \neq \bar{0}$. В силу ортогональности $\bar{f}_i \neq \bar{f}_j$ при $i \neq j$. Поэтому $\{\bar{f}_i\}_{i=1}^\infty$ — бесконечное множество ортогональных идемпотентов кольца $\overline{R}$. Однако R полулокальное, поэтому $\overline{R}$ полупростое, а значит, нётерово (предложение 7.7). Противоречие с предложением 16.9. $\square$

Лемма 16.11. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — система ортогональных идемпотентов и f — произвольный идемпотент. Тогда $e = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$ — также идемпотент. Более того, если f ортогонален e, то он ортогонален и каждому e_i.

Доказательство. Первое утверждение проверяется непосредственно: $e^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i^2 + \sum\limits_{i \neq j} e_i e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$. Пусть $fe = ef = 0$. Тогда для каждого идемпотента e_i имеем $-fe_i = fee_i - fe_i^2 = f(e - e_i)e_i = f(e_1 + \ldots + e_{i-1} + e_{i+1} + \ldots + e_n)e_i = 0$, поскольку e_i ортогонален всем элементам в скобках. $\square$

Бесконечный граф G *связен*, если между любыми двумя вершинами существует конечный путь, соединяющий их. Граф G *локально компактен*, если каждая вершина соединена ребром лишь с конечным числом вершин. Путь в графе называется *простым*, если он не содержит повторяющихся вершин. Отметим, что в связном графе между любыми двумя вершинами найдется простой путь, соединяющий их.

Лемма 16.12 (Лемма Кёнига)**.** Пусть G — локально компактный связный граф с бесконечным числом вершин. Тогда в G существует простой путь, проходящий через бесконечное число вершин и начинающийся в произвольно выбранной вершине.

Доказательство. Выберем любую вершину v_1. По условию из v_1 выходит простой путь конечной длины в любую вершину. Таких путей бесконечно много, т.к. в G бесконечно много вершин. При этом v_1 соединена ребром лишь с конечным числом вершин. Среди них по принципу Дирихле найдётся вершина v_2, через которую проходит бесконечно много указанных путей. Строим путь $v_1e_1v_2$. Пусть мы построили путь $v_1e_1\ldots v_{k-1}e_{k-1}v_k$ такой, что через v_k идут простые пути в бесконечное множество вершин, причем начала этих путей совпадают с $v_1e_1\ldots v_{k-1}e_{k-1}v_k$. Но опять v_k соединена ребром лишь с конечным числом вершин. По принципу Дирихле через какую-то вершину v_{k+1} проходит бесконечно много таких путей. При этом v_{k+1} не может совпадать ни с одной из вершин $v_1,\ldots,v_k$, т.к. все рассматриваемые пути простые. Строим путь $v_1e_1\ldots v_{k-1}e_{k-1}v_ke_kv_{k+1}$ и т.д. $\square$

Напомним, что дерево — это связный граф без циклов.

Теорема 16.13. Пусть кольцо $R \neq 0$ ортогонально конечно. Тогда R содержит полное ортогональное множество примитивных идемпотентов.

Доказательство. Если 1 — примитивный идемпотент, то доказывать нечего. Пусть 1 не примитивна. Предположим, что 1 нельзя представить в виде суммы ортогональных примитивных идемпотентов. Будем строить дерево, вершины которого — идемпотенты кольца R. Корень дерева соответствует 1. Так как 1 не примитивна, то её можно представить в виде суммы двух ортогональных идемпотентов $1 = e + f$ (предложение 13.2). Добавим единице в графе две дочерние вершины e, f. Пусть мы построили разложение единицы в сумму m ортогональных идемпотентов $1 = e_1 + \ldots + e_m$. По нашему предположению по крайней мере один e_i не примитивен, значит, $e_i = f_1 + f_2$, где f_1, f_2 — ортогональные идемпотенты. По лемме 16.11 все идемпотенты $e_1,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_m$ ортогональны f_1, f_2. Получаем, что $1 = e_1 + \ldots + e_{i-1} + f_1 + f_2 + e_{i+1} + \ldots + e_m$ — это разложение единицы в сумму $m+1$ ортогональных идемпотентов. Добавим в нашем дереве вершине e_i две дочерние вершины f_1, f_2.

Таким образом можно построить разложение любой длины $m \in \mathbb{N}$, значит, мы получаем дерево с бесконечным числом вершин. У каждой вершины только две дочерние и одна родительская вершина, поэтому наше дерево локально конечно. По лемме Кёнига можно выбрать бесконечный простой путь, начинающийся в любой вершине, например, в корне дерева. Пусть вершины этого пути соответствуют последовательности идемпотентов $1 = e_0, e_1, e_2, \ldots$.

Построим бесконечное множество ортогональных идемпотентов кольца R. У каждого e_i помимо дочернего идемпотента e_{i+1} есть еще один дочерний идемпотент f_{i+1}. Рассмотрим множество всех $f_1, f_2, \ldots$. Покажем, что каждый f_i ортогонален f_{i+k} для любого $k \in \mathbb{N}$. Действительно, f_i ортогонален e_i по построению. При этом $e_i = f_{i+1} + e_{i+1} = f_{i+1} + f_{i+2} + e_{i+2} = \ldots = f_{i+1} + \ldots + f_{i+k} + e_{i+k}$, и всё это разложения в сумму попарно ортогональных идемпотентов, что проверяется индукцией по k при помощи леммы 16.11. Снова применяя лемму 16.11, получаем, что f_i ортогонален f_{i+k}. Отсюда $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — это бесконечное ортогональное множество идемпотентов. Противоречие с ортогональной конечностью кольца. □

Теорема 16.14 (Камилло, Ю[21], 1994)**.** Кольцо R полусовершенное тогда и только тогда, когда оно чистое и ортогонально конечное.

Доказательство. (⇒) Полусовершенное кольцо полулокально по определению. Поэтому оно не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов (лемма 16.10). По теореме Мюллера кольцо R содержит полную ортогональную систему $\{e_i\}_{i=1}^n$ локальных идемпотентов. Поэтому каждое кольцо e_iRe_i локальное, а значит, чистое (примеры 16.2). Остаётся применить теорему Хана—Николсона.

(⇒) По теореме 16.13 $1 = \sum_{i=1}^n e_i$, где e_i — примитивные ортогональные идемпотенты. Так как кольцо R чистое, то все примитивные идемпотенты локальны (теорема 16.7). Снова применяя теорему Мюллера, получаем, что кольцо R полусовершенное. □

Следствие 16.15. Всякое артиново справа кольцо чистое.

Доказательство. Артиново справа кольцо полусовершенное. Поэтому применяем теорему Камилло—Ю. □

Задачи к лекции 16.

Задача 1. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$ найдите разложение в виде суммы идемпотента и обратимой матрицы. Верно ли, что это разложение единственно?

Задача 2. Пусть $f = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i x^i$ — элемент $R[x]$, где R — коммутативное кольцо. Доказать, что:

[21] Camillo, V.P., Yu, H.-P., 1994. Exchange rings, units and idempotents. Communications in Algebra 22, 4737–4749

1) f обратим $\Leftrightarrow$ f_0 обратим, а остальные коэффициенты нильпотентны (для $fg = 1$ доказать индуктивно, что $f_n^{k+1} g_{m-k} = 0$);

2) f — делитель нуля $\Leftrightarrow$ в R существует элемент r, для которого $fr = 0$ (рассмотреть g наименьшей степени m, для которого $fg = 0$, и доказать по индукции $a_i g = 0$);

3) f нильпотентен $\Leftrightarrow$ все коэффициенты f нильпотентны;

4) f идемпотентен $\Leftrightarrow$ $f = f_0$, f_0 идемпотентен.

Задача 3. Докажите, что если R коммутативно, то $R[x]$ не может быть чистым.

Задача 4. Докажите, что $R[x]$ не может быть чистым ни для какого R. Указание: аналогично пункту 4) коммутативного случая вывести, что в разложении x идемпотент может быть равен только единице.

Задача 5. Докажите, что кольцо формальных степенных рядов $R[[x]]$ над числым кольцом R тоже чистое.

Задача 6 (к теореме Камилло–Ю)**.** Приведите примеры а) чистого не ортогонально конечного кольца и б) ортогонально конечного, но не чистого кольца.

Задача 7. Приведите пример чистого не артинова (ни справа, ни слева) кольца.

17 Первичные и полупервичные идеалы. Радикал идеала

Определение 17.1. *Правый делитель нуля* — элемент $r \in R$, для которого существует такой ненулевой $s \in R$, что $sr = 0$. Аналогично опредлеяется левый делитель нуля. Элемент кольца называется *делителем нуля*, если он является делителем нуля хотя бы с одной стороны. Элемент не являющийся делителем нуля называют *регулярным*.

Правый делитель нуля не может быть обратим справа. Однако он может быть обратим слева.

Пример 17.2. Пусть $V = \mathbb{F}^\infty$ — пространство последовательностей $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ элементов поля $\mathbb{F}$, и $R = \operatorname{End} V$. Рассмотрим линейные операторы l, r сдвига координат на одну позицию влево и вправо соответственно: $l(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$, $r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Пусть p_1 — оператор проекции на первую координату: $p_1(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, 0, \ldots)$. Тогда lr тождественно на V, но $p_1 r = 0$.

Определение 17.3. Кольцо R называется *областью*, если оно <u>ненулевое</u> и удовлетворяет любому из эквивалентных условий:

1) для любых $r, s \in R$ из условия $rs = 0$ следует, что $r = 0$ или $s = 0$;
2) 0 — единственный левый делитель нуля;
3) 0 — единственный правый делитель нуля;
3) 0 — единственный делитель нуля.
Коммутативную область называют *областью целостности.*

Примеры.
1. Областью является любое тело, поле, а также $\mathbb{Z}$.
2. Если R — область, то $R[t_1, \ldots, t_n]$ — тоже область.
3. Кольцо матриц $M_n(R)$ не будет областью ни для какого кольца R.

Временно ограничимся случаем коммутативного кольца K. Нас будут интересовать такие идеалы $I \lhd K$, что K/I является областью. Это в точности идеалы следующего вида.

Определение 17.4. Идеал I в коммутативном кольце K называется *простым*, если $I \neq R$ и из условия $ab \in I$ следует, что по крайней мере один элемент a или b содержится в I.

Коммутативное кольцо K является областью тогда и только тогда, когда нулевой идеал (0) прост.

Замечание 17.5. Идеал I в коммутативном кольце K является простым тогда и только тогда, когда его теоретико-множественное дополнение $K \backslash I$ мультипликативно замкнуто, т.е. является полугруппой по умножению.

Заметим, что всякий максимальный идеал прост, т.к. фактор по нему будет полем. Обратное неверно. В кольце $K = \mathbb{F}[x, y]$ идеал $(y) = Ky$ прост, т.к. фактор по нему изоморфен области $\mathbb{F}[x]$, но (y) не максимален, т.к. $\mathbb{F}[x]$ не поле.

Определение 17.6. *Радикал* $\sqrt{I}$ идеала I в коммутативном кольце K — множество всех элементов $a \in R$ таких, что для некоторого натурального n выполнено $a^n \in I$.

Отметим, что n в определении может зависить от a.

Радикал идеала сам является идеалом. Действительно, если $a^n \in I$ и $b^m \in I$, тогда $(a + b)^{m+n} \in I$ ввиду формулы бинома Ньютона, а также $(ar)^n = a^n r^n \in I$.

Определение 17.7. Идеал $I \lhd K$ в коммутативном кольце K *радикален*, если $\sqrt{I} = I$.

Таким образом, $\sqrt{I}$ — это наименьший радикальный идеал, содержащий I.

Радикальные идеалы играют важную роль в классической алгебраической геометрии. Для алгебраически замкнутого поля $\mathbb{F}$ между радикальными идеалами кольца многочленов $\mathbb{F}[t_1, \ldots, t_n]$ и решениями систем полиномиальных уравнений существует взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее включения. Это следствие теоремы Гильберта о нулях.

Теорема 17.8 (Hilbert's Nullstellensatz)**.** Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле и I — идеал в кольце $\mathbb{F}[t_1, \dots, t_n]$. Также пусть $Z(I) \subseteq \mathbb{F}^n$ — множество точек, в которых все многочлены идеала I обращаются в ноль. Тогда, если многочлен f тоже обращается в ноль во всех точках $Z(I)$, то $f^r \in I$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$.

Без доказательства. □

Радикал идеала можно выразить в терминах пересечений простых идеалов.

Теорема 17.9. Радикал $\sqrt{I}$ совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих I. В частности, идеал радикален тогда и только тогда, когда он является пересечением простых идеалов.

Докажем далее в более общей постановке. □

Заметим, $r \in \sqrt{(0)}$ тогда и только тогда, когда $r^n = 0$ для некоторого n. Другими словами, радикал нулевого идеала $\sqrt{(0)}$ совпадаеат с множеством всех нильпотентных элементов коммутативного кольца K. Поэтому $\sqrt{(0)}$ называют *нильрадикалом.*

Следствие 17.10. Нильрадикал коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов.

В некоммутативном кольце все нильпотенты не обязаны образовывать идеал. Достаточно рассмотреть кольцо матриц над полем.

Обобщим предыдущие конструкции из коммутативной алгебры на случай произвольного ассоциативного кольца R с единицей. Оказывается, что тогда более содержательно рассматривать произведения не отдельных элементов, а целых идеалов. Напомним, что произведением AB двусторонних идеалов A, B называется множество всех конечных сумм вида $\sum\limits_i a_i b_i$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$, тогда AB само является идеалом.

Определение 17.11. Двусторонний идеал $I \lhd R$ называется *первичным*, если $I \neq R$ и для любых двусторонних идеалов $A, B \lhd R$ из условия $AB \subseteq I$ следует, что по крайней мере один идеал A или B является подмножеством в I.

Как обычно $(a) = RaR = \{\sum\limits_i r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R\}$ — главный идеал, порождённый элементом a в кольце R.

Предложение 17.12. Для двустороннего идеала $I \lhd R$, $I \neq R$, следующие условия эквивалентны:

1) I первичен;
2) из $(a)(b) \subseteq I$ следует, что либо $a \in I$, либо $b \in I$;
3) из $aRb \subseteq I$ следует, что либо $a \in I$, либо $b \in I$;
4) для правых идеалов $A, B \subseteq R$ из $AB \subseteq I$ следует, что либо $A \subseteq I$, либо $B \subseteq I$.
4') для левых идеалов $A, B \subseteq R$ из $AB \subseteq I$ следует, что либо $A \subseteq I$, либо $B \subseteq I$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Частный случай.

2) $\Rightarrow$ 3) Из условия $aRb \subseteq I$ вытекает $(a)(b) \subseteq I$, т.к. I — двусторонний идеал.

3) $\Rightarrow$ 4) Предположим, что $B \not\subseteq I$. Рассмотрим $b \in B$, не лежащий в I. Тогда для всякого $a \in A$ выполнено $aRb \subseteq A(RB) = AB \subseteq I$, откуда $a \in I$. Значит, $A \subseteq I$ в силу произвольности a. Случай $A \not\subseteq I$ разбирается аналогично.

4) $\Rightarrow$ 1) Частный случай.

3) $\Rightarrow$ 4') $\Rightarrow$ 1) Симметрично. □

Отметим, что в предыдущем предложении все альтернативы «либо ..., либо ... » не являются взаимоисключающими.

Пример 17.13. Всякий максимальный идеал I первичен: если A, B — идеалы, не лежащие в I, то $R = A + I = B + I$, поэтому $R = (A + I)(B + I) = AB + I$, откуда $AB \not\subseteq I$.

Определения простого и первичного идеала согласованы.

Следствие 17.14. Идеал коммутативного кольца первичен тогда и только тогда, когда он прост.

Доказательство. Применим пункт 2) предложения. □

В англоязычной литературе и для простых идеалов коммутативного кольца, и для первичных идеалов произвольного кольца используют один и тот же термин prime ideals.

Определение 17.15. Непустое подмножество S кольца R называется *m-системой*, если для любых $a, b \in S$ существует элемент $r \in R$ такой, что $arb \in S$.

Заметим, что всякое мультипликативно замкнутое подмножество кольца является m-системой. Обратное в общем случае неверно.

Следствие 17.16. Первичность идеала $I \lhd R$ равносильна тому, что его теоретико-множественное дополнение $R \setminus I$ является m-системой.

Доказательство. Отрицание пункта 3) предложения. □

Нам понадобятся m-системы специального вида.

Определение 17.17. Последовательность $a_0, a_1, \ldots$ элементов кольца R называется m-последовательностью, если $a_{i+1} \in a_i R a_i$ для всех $i \geqslant 0$.

Лемма 17.18. Любая m-последовательность является m-системой.

Доказательство. Пусть $a_0, a_1, \ldots$ — некоторая m-последовательность. Рассмотрим произвольные два ее элемента a_k, a_l, где $l \geqslant k \geqslant 0$. Необходимо показать, что и $a_k R a_l$, и $a_l R a_k$ содержат хотя бы по одному элементу нашей последовательности. Построим цепочку влючений

$$a_{l+1} \in a_l R a_l \subseteq (a_{l-1} R a_{l-1}) R a_l \subseteq \ldots \subseteq a_k R a_k R a_{k-1} R \ldots a_{l-1} R a_l.$$

Значит, $a_{l+1} \in a_k R a_l$. Аналогично удлинняя произведение вправо, получаем включение $a_{l+1} \in a_l R a_k$. □

Определение 17.19. *Радикал* $\sqrt{I}$ идеала I в произвольном ассоциативном кольце R с единицей — это множество таких элементов $a \in R$, что всякая m-система, содержащая a, имеет непустое пересечение с идеалом I.

Предложение 17.20. Радикал $\sqrt{I}$ совпадает с множеством таких $a \in R$, что для любой m-последовательности $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, начинающейся с $a_0 = a$, некоторый её член a_i попадает в идеал I.

Доказательство. По предыдущей лемме всякая m-последовательность, является m-системой. Поэтому для элемента $a \in \sqrt{I}$ и произвольной m-последовательности $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, где $a_0 = a$, получаем, что пересечение $(a_i)_{i=0}^{\infty} \cap I$ непусто по определению радикала идеала. Отсюда некоторый a_i оказывается в идеале I.

Обратно, пусть элемент $a \in R$ удовлетворяет условию на m-последовательности. Покажем, что $a \in \sqrt{I}$. Предположим противное, тогда найдется m-система S, содержащая a, но при этом $S \cap I = \varnothing$. Будем строить m-последовательность. Полагаем $a_0 = a$. По определению m-системы найдется $r_0 \in R$ такой, что элемент $a_1 = a_0 r_0 a_0$ попадает в S. Аналогично найдется $r_1 \in R$ такой, что элемент $a_2 = a_1 r_1 a_1$ попадает в S и т.д. Получаем m-последовательность $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $a_0 = a$. По нашему предположению найдется $a_i \in I$, но по построению $a_i \in S$. Противоречие с $S \cap I = \varnothing$. □

Следствие 17.21. Выполнено $\sqrt{I} \subseteq \{a \in R \mid a^n \in I \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство. Положим $a_i = a^{2^i}$. Тогда $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ — это m-последовательность, т.к. $a_{i+1} = a^{2^{i+1}} = a^{2^i} \cdot 1 \cdot a^{2^i} \in a_i R a_i$. По предыдущему предложению для некоторого i имеем $a^{2^i} \in I$.

□

Следствие 17.22. Для коммутативного кольца K оба определения радикала идеала $I \lhd K$ эквивалентны.

Доказательство. Включение в одну сторону верно для любого кольца в силу предыдущего. Обратно, заметим, что в коммутативном кольце любая m-последовательность, начинающаяся с элемента a, может быть записана в виде $a, a^2 r_1, a^4 r_2, \ldots, a^{2^k} r_k, \ldots$, где $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ — подходящая последовательность элементов кольца. Но для некоторого n имеем $a^n \in I$, при этом I — идеал, откуда при $2^k \geqslant n$ элемент $a^{2^k} r_k$ также содержится в I.

$\square$

Лемма 17.23. Пусть $S \subseteq R$ — это m-система. Предположим, что $I \lhd R$ — это максимальный элемент в множестве всех идеалов, не пересекающихся с S. Тогда I первичен.

Доказательство. От противного, пусть $a, b \notin I$, но $(a)(b) \subseteq I$. В силу максимальности I, в S существуют такие элементы s, s', что $s \in I + (a)$, $s' \in I + (b)$. Рассмотрим $r \in R$, для которого $srs' \in S$. Тогда $srs' \in (I + (a))R(I + (b)) \subseteq I + (a)(b) \subseteq I$, противоречие. $\square$

Теорема 17.24. Радикал $\sqrt{I}$ совпадает с пересечением всех первичных идеалов, содержащих I. В частности, $\sqrt{I}$ — идеал (т.к. является пересечнием идеалов).

Доказательство. Пусть $s \in \sqrt{I}$, $I \subseteq J$, где J — первичный идеал[22]. Рассмотрим m-систему $R \setminus J$. Если бы она содержала s, то пересекалась бы с идеалом I, а значит и с идеалом J, что невозможно. Поэтому $s \in J$. Мы показали, что

$$\sqrt{I} \subseteq \bigcap \{J \lhd R \mid I \subseteq J,\ J \text{ первичен}\}.$$

Пусть $s \notin \sqrt{I}$. Тогда по определению радикала существует m-система S, содержащая s, но не пересекающаяся с идеалом I. Рассмотрим семейство идеалов $\Omega = \{L \lhd R \mid I \subseteq L,\ L \cap S = \varnothing\}$, упорядоченное по включению. Тогда $\Omega \neq \varnothing$, т.к. $I \in \Omega$. Если $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — цепь в Ω, то её объединение снова принадлежит Ω. Поэтому по лемме Цорна в Ω найдется максимальный элемент J. Идеал J первичен по предыдущей лемме. Поскольку J не пересекает S, элемент s ему не принадлежит. Мы показали, что

$$R \setminus \sqrt{I} \subseteq R \setminus \bigcap \{J \lhd R \mid I \subseteq J,\ J \text{ первичен}\}.$$

$\square$

Определение 17.25. Идеал $I \lhd R$ *полупервичен*, если для всякого идеала $H \lhd R$, для которого $H^2 \subseteq I$, выполнено и $H \subseteq I$.

Первичный идеал всегда полупервичен.

Эквивалентность следующих условий проверяется точно так же, как в случае первичного идеала.

[22] Такой идеал J заведомо существует. Например, по теореме Крулля найдётся максимальный идеал, содержащий I. Максимальный идеал первичен, см пример 17.13

Предложение 17.26. Для идеала $I \lhd R$ эквивалентны условия:
1) I полупервичен;
2) из $(a)^2 \subseteq I$ следует, что $a \in I$;
3) из $aRa \subseteq I$ следует, что $a \in I$;
4) для правого идеала $A \subseteq R$ из $A^2 \subseteq I$ следует, что $A \subseteq I$.
4') для левого идеала $A \subseteq R$ из $A^2 \subseteq I$ следует, что $A \subseteq I$.

Понятие полупервичного идеала — некоммутативное обобщение радикального идеала.

Определение 17.27. Непустое подмножество $S \subseteq R$ называется *n-системой*, если для каждого $a \in S$ существует элемент $r \in R$ такой, что $ara \in S$.

Каждая m-система является n-системой тривиальным образом. Обратное в общем случае неверно.

Следствие 17.28. Идеал полупервичен тогда и только тогда, когда его теоретико-множественное дополнение является n-системой.

Доказательство. Отрицание пункта 3) предложения. □

Лемма 17.29. Пусть $N \subseteq R$ является n-системой, выберем в ней произвольный элемент $a \in N$. Тогда существует m-система $M \subseteq N$ такая, что $a \in M$.

Доказательство. В качестве m-системы возьмем m-последовательность следующего вида. Пусть $a_0 = a$. По определению n-системы, множество N содержит элементы $a_1 = a_0 r_0 a_0$, $a_2 = a_1 r_1 a_1$, …, $a_{n+1} = a_n r_n a_n$, … для некоторых $r_i \in R$. Тогда полагаем $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$. □

Теорема 17.30 (О полупервичном идеале)**.** Для идеала $I \lhd R$ эквивалентны условия:
1) I полупервичен;
2) $I = \sqrt{I}$.
3) I — пересечение некоторого множества первичных идеалов;

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Включение $I \subseteq \sqrt{I}$ выполнено всегда, надо показать, что $\sqrt{I} \subseteq I$. Это равносильно $R \setminus I \subseteq R \setminus \sqrt{I}$. Возьмем произвольный $a \in R \setminus I$, но множество $R \setminus I$ является n-системой, т.к. идеал I полупервичен. По лемме можно выбрать m-систему $M \subseteq R \setminus I$ такую, что $a \in M$. Итак, мы нашли m-систему, содержащую a, но не пересекающуюся с идеалом I. По определению радикала имеем $a \notin \sqrt{I}$, что и требовалось.

2) $\Rightarrow$ 3) Используем предыдущую теорему о том, что радикал $\sqrt{I}$ совпадает с пересечением всех первичных идеалов, содержащих I.

3) $\Rightarrow$ 1) Каждый первичный идеал полупервичен. Заметим, что пересечение любого множества полупервичных идеалов снова полупервичный идеал. □

Следствие 17.31. Идеал коммутативного кольца K является радикальным тогда и только тогда, когда он полупервичен.

Доказательство. Мы уже показали, что определения радикала в коммутативном и в некоммутативном случаях согласованы. $\square$

Следствие 17.32. Радикал $\sqrt{I}$ идеала I — наименьший полупервичный идеал, содержащий I.

Доказательство. Пусть J — полупервичный идеал, содержащий I. Тогда J является пересечением некоторых первичных идеалов (теорема 17.30). Все они содержат J, а значит, содержат I. С другой стороны, $\sqrt{I}$ совпадает с пересечением <u>всех</u> первичных идеалов, сдержащих I (теорема 17.24). Поэтому $\sqrt{I} \subseteq J$. $\square$

Задачи к лекции 17.

Задача 1. Пусть в коммутативном кольце K все идеалы главные, т.е. порождаются одним элементом. Докажите, что каждый простой идеал K максимален.

Задача 2. Приведите пример простого идеала в кольце $\mathbb{Z}[x]$, не являющегося главным идеалом.

Задача 3. Приведите пример двух первичных идеалов, пересечение которых не будет первичным.

Задача 4. Докажите, что любое ненулевое кольцо содержит первичный идеал.

Задача 5. Пусть $I, J \lhd R$, $I \subseteq J$. Покажите, что $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.

Задача 6. Пусть в коммутативном кольце R с единицей все идеалы — простые. Докажите, что R является полем.

Задача 7. Будет ли утверждение задачи 6 верно, если отказаться от коммутативности (т.е. что если все идеалы — первичные, то R— тело)?

18 Первичный радикал. Первичные и полупервичные кольца. Радикал Кёте. Теорема Левицкого

Применим все полученные ранее результаты о радикалах идеала к случаю радикала нулевого идеала. Перед этим нам понадобится следующее определение.

Определение 18.1. Элемент a кольца R называется *строго нильпотентым*, если в любой m-последовательности $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, начинающейся с элемента $a_0 = a$, найдется нулевой элемент $a_i = 0$ (тогда все последующие члены автоматически тоже равны нулю).

Теорема 18.2 (О первичном радикале)**.** Следующие подмножества кольца R совпадают:

1) радикал нулевого идеала $\sqrt{(0)}$,
2) пересечение всех первичных идеалов,
3) множество всех строго нильпотентных элементов,
4) наименьший полупервичный идеал.

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Радикал $\sqrt{I}$ совпадает с пересечением всех первичных идеалов, содержащих I (теорема 17.24).

1) $\Leftrightarrow$ 3) Характеризация радикала в терминах m-последовательностей (предложение 17.20).

1) $\Leftrightarrow$ 4) Радикал $\sqrt{I}$ — наименьший полупервичный идеал, содержащий I (следствие 17.32). □

Определение 18.3. *Первичный радикал* $\mathrm{Nil}_* R$ кольца R — это пересечение всех его первичных идеалов. Также используются названия *нижний нильрадикал* и *радикал Бэра — Маккоя.*

Любой из пунктов предыдущей теоремы может быть взят в качестве определения первичного радикала.

Следствие 18.4. Первичный радикал является нильидеалом, т.е. все его элементы нильпотенты. Другими словами, каждый строго нильпотентный элемент нильпотентен.

Доказательство. Воспользуемся $\sqrt{I} \subseteq \{a \in R \mid a^n \in I \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}$. □

Следствие 18.5. Первичный радикал всегда содержится в радикале Джекобсона $\mathrm{Nil}_* R \subseteq J(R)$.

Доказательство. Радикал Джекобсона содержит все нильидеалы (предложение 10.5). □

Следствие 18.6. Первичный радикал содержит все правые, левые и двусторонние нильпотентные идеалы.

Доказательство. Так как радикал $\mathrm{Nil}_* R$ полупервичен, то для правого идеала I из условия $I^2 \subseteq \mathrm{Nil}_* R$ следует $I \subseteq \mathrm{Nil}_* R$. Значит, если для некоторого k выполнено $I^{2^k} \subseteq \mathrm{Nil}_* R$, то $I \subseteq \mathrm{Nil}_* R$. Однако в случае, когда I нильпотентен, для достаточного большого k имеем $I^{2^k} = (0) \subseteq \mathrm{Nil}_* R$. □

Следствие 18.7. Первичный радикал коммутативного кольца K совпадает с нильрадикалом, т.е. множеством всех нильпотентных элементов. Отсюда элемент коммутативного кольца строго нильпотентен тогда и только тогда, когда он нильпотентен.

Доказательство. В коммутативном кольце $\sqrt{(0)}$ совпадает с множеством нильпотентов (определение 17.6). $\square$

Определение 18.8. Кольцо *(полу)первично*, если идеал (0) (полу)первичен.

Предложение 18.9. Факторкольцо R/I (полу)первично тогда и только тогда, когда идеал I (полу)первичен.

Доказательство. Обозначим $\overline{R} = R/I$. Для каждого $a \in R$ рассмотрим проекцию $\bar{a} = a+I \in \overline{R}$. Очевидно, $\bar{a} = \bar{0}$ тогда и только тогда, когда $a \in I$. При этом равенство $\bar{a}\bar{R}\bar{b} = (\bar{0})$ равносильно $aRb \subseteq I$. Осталось применить предложения 17.12, 17.26. $\square$

Используя описание первичных и полупервчиных идеалов получаем более явную характеризацию аналогичных классов колец.

Предложение 18.10. Следующие условия на кольцо R эквивалентны:
1) R первично, т.е. (0) — первичный идеал.
2) из $(a)(b) = (0)$ следует, что либо $a = 0$, либо $b = 0$;
3) из $aRb = 0$ следует, что либо $a = 0$, либо $b = 0$;
4) для правых идеалов A, B из $AB = (0)$ следует, что либо $A = (0)$, либо $B = (0)$.
4') для левых идеалов A, B из $AB = (0)$ следует, что либо $A = (0)$, либо $B = (0)$.

Доказательство. Применим предложение 17.12 к нулевому идеалу. $\square$

Примеры 18.11.

- Всякая область R является первичным кольцом. Коммутативное кольцо K первично тогда и только тогда, когда оно является областью.

- Всякое простое кольцо первично. Действительно, в простом кольце (0) — максимальный идеал. Максимальный идеал всегда первичен.

Предложение 18.12. Следующие условия на кольцо R эквивалентны:
1) R полупервично, т.е. (0) — полупервичный идеал;
2) из $(a)^2 = 0$ следует, что $a = 0$;
3) из $aRa = 0$ следует, что $a = 0$;
4) для правого идеала A из $A^2 = (0)$ следует, что $A = (0)$;
4') для левого идеала A из $A^2 = (0)$ следует, что $A = (0)$.

Доказательство. Применим предложение 17.26 к нулевому идеалу. $\square$

Напомним, что правый (левый, двусторонний) идеал идеал I называется нильпотентным, если для некоторого n произведение любых n элементов этого идеала равно нулю.

Теорема 18.13. Для кольца R эквивалентны условия:

1) R полупервично;

2) $\mathrm{Nil}_* R = 0$;

3) в R нет ненулевых нильпотентных идеалов;

4) в R нет ненулевых нильпотентных правых идеалов;

4') в R нет ненулевых нильпотентных левых идеалов.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Нулевой идеал полупервичен, при этом радикал совпадает с наименьшим полупервичным идеалом.

2) $\Rightarrow$ 1) Первичный радикал всегда является полупервичным идеалом.

1) $\Rightarrow$ 4) Пусть I — нильпотентый правый идеал. Выберем n — наименьшее число такое, что $I^n = 0$. Предположим, что I ненулевой идеал, т.е. $n > 1$. Тогда $(I^{n-1})^2 = I^{2n-2} \subseteq I^n = 0$. В силу одного из эквивалетных определений полупервичного кольца получаем $I^{n-1} = 0$, что противоречит выбору n. Значит, $n = 1$ и $I = 0$.

4) $\Rightarrow$ 3) Частный случай.

3) $\Rightarrow$ 1) В частности, если $(a)^2 = 0$, то $(a) = 0$, откуда $a = 0$.

1) $\Rightarrow$ 4') $\Rightarrow$ 3) Аналогично. □

Определение 18.14. Кольцо, в котором ноль — единственный нильпотент, называют *редуцированным кольцом*[23].

Пример 18.15. Приведем примеры полупервичных колец

- Всякое первичное кольцо полупервично.

- Всякое редуцированное кольцо R является полупервичным. Коммутативное кольцо K полупервично тогда и только тогда, когда оно редуцировано.

- Если кольцо полупримитивно (т.е. обладает нулевым радикалом Джекобсона), то оно всегда полупервично, в силу включения $\mathrm{Nil}_* R \subseteq J(R)$. В частности, полупростые кольца полупервичны.

- Прямое произведение полупервичных колец полупервично. Отметим, что прямое произведение первичных колец никогда не будет первично.

- Для любого кольца R выполнено $\mathrm{Nil}_*(R/\mathrm{Nil}_* R) = 0$. Действительно, факторкольцо R/I полупервично тогда и только тогда, когда идеал I полупервичен, при этом $\mathrm{Nil}_* R$ как раз полупервичен.

Следующие результаты о первичных и полупервичных групповых кольцах приведем без доказательства.

[23]В англоязычной литературе — reduced ring.

Теорема 18.16 (Коннелл)**.** Групповое кольцо RG первично тогда и только тогда, когда R первично и единственная конечная нормальная подгруппа в G — это $\{1\}$.

Теорема 18.17 (Пассман)**.** Групповое кольцо RG полупервично тогда и только тогда, когда R полупервично, а порядки всех конечных нормальных подгрупп в G не являются делителями нуля в R.

Определение 18.18. *Аннулятор* $\mathrm{Ann}\,_R(S)$ подмножества S в правом модуле M_R — это множество всех элементов $r \in R$, для которых $nr = 0$ при всех $n \in N$.

Правый аннулятор $\mathrm{rAnn}(S)$ подмножества $S \subseteq R$ равен $\mathrm{Ann}\,(S)$, где S рассматривается как подмножество R_R.

Отметим, что правый аннулятор всегда является правым идеалом в R.

Напомним, что ненулевой правый идеал называется минимальным, если он не содержит в себе никаких отличных от себя ненулевых правых идеалов.

Лемма 18.19 (Брауэр)**.** Пусть в кольце R существует минимальный правый идеал I. Тогда либо $I^2 = 0$, либо $I = eR$ для некоторого идемпотента e.

Доказательство. В случае $I = R$ единица порождает I, пусть далее $I \neq R$. Если $I^2 \neq 0$, то $aI \neq 0$ для некоторого $a \in I$. Ввиду минимальности $I = aI$. Выберем $r \in I$ таким, что $ar = a$, т.е. $a(r-1) = 0$. Значит, $r - 1 \in \mathrm{rAnn}(a)$.

Рассмотрим правый идеал $J = \mathrm{rAnn}(a) \cap I \subseteq I$. В силу минимальности I, либо $J = 0$, либо $J = I$. Если $J = I$, то $I = \mathrm{rAnn}(a) \cap I$, т.е. $I \subseteq \mathrm{rAnn}(a)$. Значит, $r \in \mathrm{rAnn}(a)$, откуда $0 = ar = a$. Противоречие с $aI \neq 0$.

Единственная возможность — это $J = 0$, т.е. $\mathrm{rAnn}(a) \cap I = 0$. Умножая равенство $a(r-1) = 0$ на r справа, получаем $r^2 - r \in \mathrm{rAnn}(a)$. Ввиду $r \in I$ выполнено $r^2 - r \in \mathrm{rAnn}(a) \cap I = 0$, откуда r — идемпотент. Правый идеал rR лежит в I, и снова в силу минимальности либо $rR = I$, либо $rR = 0$. Если $rR = 0$, то $r = 0$ и $a = ar = 0$, что противоречит $aI \neq 0$. Поэтому $rR = I$. $\square$

Теорема 18.20. Для кольца $R \neq 0$ эквивалентны условия:

1) R полупросто;

2) R полупервично и артиново справа;

3) R полупервично и удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей главных правых идеалов.

2'), 3') — левые аналоги

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Для полупростого кольца R выполнено $J(R) = 0$, откуда $\mathrm{Nil}_*(R) = 0$, значит R полупервично. Полупростое кольцо всегда артиново справа.

2) $\Rightarrow$ 3) Частный случай.

3) $\Rightarrow$ 1) Заметим, что каждый правый идеал кольца R содержит минимальный правый идеал, т.к. иначе можно было бы построить бесконечную убывающую цепочку правых идеалов, которые можно выбрать главными. По лемме Брауэра минимальный правый идеал I в полупервичном кольце R сам является главным, причём

порождается идемпотентом. Следовательно каждый такой идеал $I = eR$ выделяется прямым слагаемым $R_R = eR \oplus (1-e)R$.

Далее будем рассуждать от противного, пусть R_R не полупростой модуль. Возьмем в R любой правый идеал, выберем в нём минимальный L_1 и выделим его прямым слагаемым: $R_R = L_1 \oplus T_1$. Так как R_R не полупрост, то T_1 не минимальный правый идеал, выберем в нём минимальный L_2 и выделим его прямым слагаемым $T_1 = L_2 \oplus T_2$ и т.д. Мы получаем бесконечную строго убывающую цепочку правых идеалов $T_1 \supsetneq T_2 \supsetneq T_3 \supsetneq \ldots$, причем каждый T_i является прямым слагаемым в R_R, а значит, порождается каким-то идемпотентом, откуда T_i — главный правый идеал. Мы получили противоречие с пунктом 3). □

Далее мы введем ещё один радикал кольца. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 18.21. Если I — правый (левый) нильидеал, J — двусторонний нильидеал кольца R, тогда $I + J$ — правый (левый) нильидеал. Отсюда сумма двусторонних нильидеалов снова является двусторонним нильидеалом.

Доказательство. Пусть $a \in I + J$, т.е. $a = x + y$, где $x \in I$, $y \in J$. Так как I — правый (левый двусторонний) нильидеал, то $x^n = 0$ для некоторого n. Рассмотрим $a^n = (x+y)^n$. Раскрывая скобки[24] в выражении $a^n = \underbrace{(x+y)\ldots(x+y)}_{n \text{ раз}}$, получаем, что $a^n = x^n + w = w$, где w — сумма произведений, содержащих хотя бы один y. Так как J — двусторонний идеал, то $w \in J$, поэтому $a^n \in J$. Однако J — нильидеал, откуда $(a^n)^m = 0$ для некоторого m. □

Определение 18.22. Сумма всех двусторонних нильидеалов кольца R называют *радикалом Кёте*, или *верхним нильрадикалом*. Обозначение $\mathrm{Nil}^* R$.

Как обычно $(a) = RaR = \{\sum\limits_i r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R\}$ — главный идеал, порождённый элементом a в кольце R.

Предложение 18.23. 1) $\mathrm{Nil}^* R$ — двусторонний идеал кольца R.

2) $\mathrm{Nil}^* R$ является наибольшим нильидеалом кольца R.

3) $\mathrm{Nil}^* R = \{a \in R \mid (a) \text{ — нильидеал}\}$.

Доказательство. Радикал $\mathrm{Nil}^* R$ — наибольший нильидеал по лемме. Включение $\mathrm{Nil}^* R \supseteq \{a \in R \mid (a) \text{ — нильидеал}\}$ выполнено по определению. Обратно, если $a \in \mathrm{Nil}^* R$, тогда $(a) \subseteq \mathrm{Nil}^* R$ и все элементы идеала (a) нильпотенты. □

Предложение 18.24. Для любого кольца R выполнено $\mathrm{Nil}_* R \subseteq \mathrm{Nil}^* R \subseteq J(R)$. Если R артиново справа, то все три радикала совпадают.

[24]Формула бинома Ньютона может не выполняться из-за некоммутативности умножения.

Доказательство. Так как $\mathrm{Nil}_* R$ — нильидеал, то $\mathrm{Nil}_* R \subseteq \mathrm{Nil}^* R$. Включение $\mathrm{Nil}^* R \subseteq J(R)$ следует из того, что радикал Джекобсона содержит все нильидеалы. Для артинова справа кольца $J(R)$ нильпотентен. Однако $\mathrm{Nil}_* R$ содержит все нильпотентные идеалы. Значит, $J(R) \subseteq \mathrm{Nil}_* R$ и все включения в цепочке радикалов обращаются в равенства. □

Гипотеза Кёте (1930). Если в произвольном кольце R выполнено $\mathrm{Nil}^* R = 0$, то R не имеет ненулевых односторонних нильидеалов.

Другими словами, если в кольце нет ненулевых двусторонних нильидеалов, то нет и ненулевых *односторонних* нильидеалов. В наибольшей общности эта проблема пока не решена. Мы покажем далее, что гипотеза Кёте верна для нётеровых справа колец.

Лемма 18.25 (Утуми)**.** Пусть кольцо R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых аннуляторов вида $\mathrm{rAnn}(a)$, $a \in R$. Тогда все правые, левые и двусторонние нильидеалы содержатся в первичном радикале $\mathrm{Nil}_* R$. В частности, если R полупервично (т.е. $\mathrm{Nil}_* R = (0)$), то в R нет ненулевых правых, левых и двусторонних нильидеалов.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай правого нильидеала I. От противного, пусть $I \not\subseteq \mathrm{Nil}_* R$. Среди элементов теоретико-множественной разности $I \setminus \mathrm{Nil}_* R$ выберем a, таким что его правый аннулятор $\mathrm{rAnn}(a)$ максимален.

Покажем, что для любого $x \in R$ выполнено $axa \in \mathrm{Nil}_* R$. Если $ax = 0$, то это, конечно, верно, пусть $ax \neq 0$. Так как I — правый нильидеал и $a \in I$, то элемент ax нильпотентен, т.е. можно найти такое k, что $(ax)^k = 0$, но $(ax)^{k-1} \neq 0$. Тогда элемент $x(ax)^{k-2}$ принадлежит правому аннулятору $\mathrm{rAnn}(axa)$, но не принадлежит $\mathrm{rAnn}(a)$, откуда $\mathrm{rAnn}(axa) \supsetneq \mathrm{rAnn}(a)$. В силу максимальности $\mathrm{rAnn}(a)$ получаем, что axa не может принадлежать $I \setminus \mathrm{Nil}_* R$, а значит, $axa \in \mathrm{Nil}_* R$.

Рассмотрим факторкольцо $\overline{R} = R/\mathrm{Nil}_* R$, пусть $\overline{a}, \overline{x}$ — образы элементов a, x при естественной проекции. В силу $axa \in \mathrm{Nil}_* R$ для произвольного $x \in R$ получаем, что $\overline{a}\overline{R}\overline{a} = \overline{0}$. Однако кольцо $\overline{R}$ полупервично, поэтому $\overline{a} = \overline{0}$, т.е. $a \in \mathrm{Nil}_* R$, и это потиворечит определению элемента a.

Если теперь I — левый нльидеал, то для всех $a' \in I$ можно рассмотреть правый идеал $a'R$. Покажем, что $a'R$ — правый нильидеал: для любого $b \in R$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $(a'b)^n = a'(ba')^{n-1}b$, причем $ba' \in I$, тогда, выбирая n достаточно большим, можно добиться $(ba')^{n-1} = 0$, откуда $(a'b)^n = 0$. Итак, $a'R$ — правый нильидеал, значит, по предыдущему $a'R \subseteq \mathrm{Nil}_* R$. В силу произвольности $a' \in I$ получаем $I \subseteq \mathrm{Nil}_* R$. □

Теорема 18.26 (Левицкий)**.** Пусть R — нётерово справа кольцо. Тогда все правые, левые и двусторонние нильидеалы нильпотентны. Более того, следующие множества совпадают:

1) первичный радикал $\mathrm{Nil}_* R$,
2) радикал Кёте $\mathrm{Nil}^* R$,
3) наибольший нильпотентый идеал,
4) наибольший правый нильпотентный идеал,
4') наибольший левый нильпотентный идеал.

Доказательство. Так как R — нётерово справа, то в множестве всех двусторонних нильпотентных идеалов существует максимальный идеал N. Тогда по теореме о соответствии идеалов в факторкольце R/N нет нильпотентных идеалов. Значит, R/N полупервично, откуда N — полуперывчиный идеал. В силу того, что $\mathrm{Nil}_* R$ — наименьший полупервчный идеал, имеем $\mathrm{Nil}_* R \subseteq N$. В то же время $\mathrm{Nil}_* R$ содержит все нильпотентные идеалы, откуда получаем обратное включение, а значит $\mathrm{Nil}_* R = N$.

Так как правые аннуляторы — это правые идеалы, то R удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых аннуляторов вида $\mathrm{rAnn}(a)$, $a \in R$. По лемме Утуми каждый односторонний нильидеал I содержится в первичном радикале $\mathrm{Nil}_* R$, но $\mathrm{Nil}_* R$ нильпотентен. Значит, I тоже нильпотентен.

Включение $\mathrm{Nil}_* R \subseteq \mathrm{Nil}^* R$ всегда выполнено. Снова по лемме Утуми каждый двусторонний нильидеал I содержится в первичном радикале $\mathrm{Nil}_* R$, тогда радикал Кёте $\mathrm{Nil}^* R$, как их сумма, также содержится в $\mathrm{Nil}_* R$. Поэтому получаем $\mathrm{Nil}_* R = \mathrm{Nil}^* R = N$.

Если I — произвольный правый (левый, двусторонний) нильпотентный идеал, то он содержится в первичном радикале $\mathrm{Nil}_* R = N$. Отсюда $\mathrm{Nil}_* R = N$ является наибольшим правым (левым, двусторонним) нильпотентным идеалом. □

Следствие 18.27. Гипотеза Кёте верна для нётеровых справа колец.

Доказательство. Любой правый нильидеал лежит в наибольшем правом нильидеале, который совпадает с радикалом Кёте по теореме Левицкого. Отсюда, если радикал Кёте равен нулю, то правый нильидеал может быть только нулевым. □

Задачи к лекции 18.

Задача 1. Приведите пример кольца R и его подкольца S, для которых $\mathrm{Nil}_*(S) \neq S \cap \mathrm{Nil}_*(R)$.

Задача 2. Приведите пример элемента некоторого кольца, который нильпотентен, но не строго нильпотентен.

Задача 3. Докажите, что если $I, J \lhd R$, то произведение идеалов $M_n(I) \cdot M_n(J)$ матричного кольца $M_n(R)$ совпадает с $M_n(IJ)$. Вывести отсюда, что кольцо матриц $M_n(R)$ над (полу)первичным кольцом R само окажется (полу)первичным.

Задача 4. Могут ли в первичном кольце быть ненулевые центральные а) делители нуля, б) нильпотенты? Тот же вопрос для полупервичного кольца.

Задача 5. Приведите пример кольца R такого, что его радикал Джекобсона а) совпадает с первичным радикалом, б) сторого содержит в себе первичный радикал.

Задача 6. В кольце многочленов $\mathbb{F}[x]$ над полем $\mathbb{F}$ дан идеал I, порожденный многочленом $(x^2-2x-3)^7$. Найдите $\sqrt{I}$. Представьте $\sqrt{I}$ в виде пересечения простых идеалов.

Задача 7. Покажите, что для любого кольца R выполнено равенство

$$\mathrm{Nil}^*(R) = \bigcap\{P|P \text{ — первичный идеал и } \mathrm{Nil}^*(R/P) = 0\}.$$

Задача 8. Пусть R — редуцированное кольцо, докажите следующее:

а) для любых $a, b \in R$ если $ab = 0$, то $ba = 0$;

б) для любых $a, b \in R$ если $ab = 0$, то $aRb = bRa = 0$;

в) для любых $a_1, \ldots, a_n \in R$ и любой подстановки σ на n элементах если произведение $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 0$, то тогда $Ra_{\sigma(1)}Ra_{\sigma(2)}R \ldots Ra_{\sigma(n)}R = 0$.

19 Существенные подмодули. Равномерная размерность

Определение 19.1. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, или *большим*,[25] если $N \cap K \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля K модуля M. Обозначение $N \subseteq_e M$.

Примеры.

1. Тривиальным образом $M \subseteq_e M$ для любого модуля M.
2. Рассмотрим множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ как $\mathbb{Z}$-модуль, т.е. просто как абелеву группу по сложению. Пусть $K \leqslant \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ — ненулевой подмодуль. Если рациональное число $a/b \in K$, то $b \cdot a/b = a \in K$. Значит, любой ненулевой подмодуль в $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ содержит ненулевое целое число. Поэтому $\mathbb{Z} \subseteq_e \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$.
3. Если нетривиальный подмодуль $0 \neq N \subsetneq M$ выделяется прямым слагаемым $N \oplus K = M$, то N не может быть существенным в силу $N \cap K = 0$.

Замечание 19.2. Существенное расширение $\subseteq_e$ транзитивно, т.е. если $L \subseteq_e N$ и $N \subseteq_e M$, то $L \subseteq_e M$.

Доказательство. Пусть $K \leqslant M$ — ненулевой подмодуль. Так как N существенный подмодуль в M, то $K \cap N \neq 0$. Поэтому $K \cap N$ — ненулевой подмодуль в N. Но L — существенный подмодуль в N. Тогда $L \cap K \cap N \neq 0$. Отсюда $L \cap K \neq 0$, что и требовалось. □

[25] по-английски an essential (large) submodule

Лемма 19.3 (О существенном расширении)**.** Если N — подмодуль модуля M, то в M найдётся такой подмодуль[26] L, что $N \oplus L \subseteq_e M$.

Доказательство. Обозначим через Ω — множество таких подмодулей $L \leqslant M$, что $L \cap N = 0$. Ясно, что $\Omega \neq \varnothing$ ввиду $0 \in \Omega$. Упорядочим Ω по включению. Если в цепи $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ни один подмодуль не пересекается с N, то объединение цепи тоже не пересекается с N. По лемме Цорна в Ω найдётся максимальный элемент, обозначим его тоже как L.

Так как $L \cap N = 0$, то сумма $N \oplus L$ прямая. Покажем, что $N \oplus L \subseteq_e M$. Пусть $K \leqslant M$ — ненулевой подмодуль. Предположим противное, т.е. $(N \oplus L) \cap K = 0$. Попробуем поменять местами модули K и N. Рассмотрим пересечение $(K \oplus L) \cap N$. Произвольный элемент из этого пересечения имеет вид $n = k + \ell$, где $n \in N$, $k \in K$, $\ell \in L$. Тогда $k = n - \ell \in (N \oplus L) \cap K = 0$. Значит, $k = 0$, а также $n = \ell$. В силу $N \cap L = 0$, получаем, что $n = \ell = 0$.

Таким образом, $(K \oplus L) \cap N = 0$. Это означает, что $K \oplus L \in \Omega$. Противоречие с максимальностью L. □

Вспомним, что модуль называется полупростым, если он раскладывается в сумму неприводимых подмодулей.

Предложение 19.4. Для правого R-модуля M следующие условия эквивалентны:

1) M не содержит <u>собственных</u> существенных подмодулей;

2) M полупрост.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Пусть N — подмодуль в M. По лемме $N \oplus L \subseteq_e M$ для некоторого $L \leqslant M$. Но M не содержит собственных существенных подмодулей. Значит, $N \oplus L = M$. Мы получили, что любой подмодуль в M выделяется прямым слагаемым, откуда M полупрост (теорема 6.7).

2) $\Rightarrow$ 1) Любой подмодуль $N \leqslant M$ выделяется прямым слагаемым: $N \oplus L = M$. Поэтому $N \cap L = 0$. □

Следующая простая лемма даёт способ проверки существенности подмодуля.

Лемма 19.5. Для подмодуля $N \leqslant M$ следующие условия эквивалентны:

1) $N \subseteq_e M$;

2) для каждого $m \in M \setminus \{0\}$ найдётся такое $r \in R$, что $mr \in N \setminus \{0\}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Так как N существенный, то $N \cap mR \neq 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) Рассмотрим ненулевой подмодуль $K \leqslant M$. Выберем $0 \neq m \in K$. По условию найдётся $r \in R$ такое, что $0 \neq mr \in N$. Значит, $mr \in N \cap K \neq 0$. □

Существенные расширения $\subseteq_e$ устойчивы относительно взятия прямых сумм.

[26] Если N существенный, то $L = 0$.

Предложение 19.6. Пусть $\{M_i\}_{\in I}$ — возможно бесконечное семейство R-модулей, в которых выбраны существенные подмодули $N_i \subseteq_e M_i$. Обозначим $N = \bigoplus_{i\in I} N_i$, $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Тогда $N \subseteq_e M$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай конечных сумм $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ и $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$. Докажем индукцией по k, что $N \subseteq_e M$. При $k = 1$ имеем $N = N_1 \subseteq_e M_1 = M$. Пусть $k > 1$. Рассмотрим произвольный $0 \neq m \in M$. Запишем $m = m_1 + \ldots + m_k$, где $m_i \in M_i$. Так как $m \neq 0$, то хотя бы одно из m_i отлично от нуля. Без ограничения общности пусть $m_k \neq 0$. Обозначим $m' = m_1 + \ldots + m_{k-1}$.

В силу $N_k \subseteq_e M_k$ и леммы 19.5 найдётся такое $r_k \in R$, что $m_k r_k \in N_k \setminus \{0\}$. Умножив равенство $m = m' + m_k$ на r_k, получим $mr_k = m'r_k + m_k r_k$. Если первое слагаемое $m'r_k = 0$, то $mr_k = m_k r_k \in N_k \setminus \{0\} \subseteq N \setminus \{0\}$ и всё доказано. Далее $m'r_k \neq 0$.

По предположению индукции модуль $N' = N_1 \oplus \ldots \oplus N_{k-1}$ является существенным подмодулем в $M' = M_1 \oplus \ldots \oplus M_{k-1}$. Применяя лемму 19.5 к элементу $0 \neq m'r_k \in M'$, найдётся такое $r' \in R$, что $m'r_kr' \in N'$. Тогда

$$mr_kr' = m'r_kr' + m_kr_kr' \in N' \oplus N_k = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k.$$

Первое слагаемое лежит в N', а второе — в N_k. Причём первое слагаемое точно не нулевое. Сумма $N' \oplus N_k$ прямая, поэтому $mr_kr' \neq 0$. Шаг индукции доказан.

Теперь $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ — бесконечная сумма модулей. Элемент $0 \neq m \in M$ раскладывается в конечную сумму $m = m_{i_1} + \ldots + m_{i_k}$, где $m_{i_j} \in M_{i_j}$. Значит, $m \in M_{i_1} \oplus \ldots \oplus M_{i_k}$. По доказанному сумма $N_{i_1} \oplus \ldots \oplus N_{i_k}$ является существенным подмодулем в $M_{i_1} \oplus \ldots \oplus M_{i_k}$. По лемме 19.5 найдётся $r \in R$, что $0 \neq mr \in N_{i_1} \oplus \ldots \oplus N_{i_k} \subseteq \bigoplus_{i\in I} N_i = N$. Ввиду произвольности $m \in M \setminus \{0\}$ получаем $N \subseteq_e M$ по лемме 19.5. □

Определение 19.7. Модуль $U \neq 0$ называется *равномерным*,[27] если любой его ненулевой подмодуль является существенным. Это равносильно тому, что пересечение любых двух ненулевых подмодулей отлично от нуля.

Примеры.

1. Рассмотрим кольцо целых чисел $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ как модуль над собой. Если (a), (b) — произвольные идеалы, то $a \cdot b \in (a) \cap (b) \neq 0$. Поэтому $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ — равномерный модуль.

2. Полупростой модуль равномерен, только если он неприводим.

Замечание 19.8. Если $N \subseteq_e M$ и N равномерный, то M тоже равномерный.

Доказательство. Действительно, пусть K, L — ненулевые подмодули в M. Так как N существенный, то он нетривиально пересекается с ними: $N \cap L \neq 0$ и $N \cap K \neq 0$. В то

[27] по-английски a uniform module

же время, $N \cap L$ и $N \cap K$ — ненулевые подмодули в равномерном модуле N. Поэтому они нетривиально пересекаются. Но это значит, что модули K и L нетривиально пересекаются. $\square$

Можно применить это замечание к предыдущим примерам. Модуль $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ равномерный и $\mathbb{Z} \subseteq_e \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$. Значит, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ тоже равномерный. Впрочем, это можно проверить и напрямую.

Предложение 19.9. Для правого R-модуля U следующие условия эквивалентны:

1) U равномерный.

2) Для любых $u, v \in U \setminus \{0\}$ выполнено $uR \cap vR \neq 0$.

3) Пересечение любого конечного множества ненулевых подмодулей отлично от нуля.

4) U не содержит прямых сумм двух или более ненулевых подмодулей.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Любой ненулевой подмодуль в U существенный, в том числе uR.

2) $\Rightarrow$ 3) Пусть $N_1, \ldots, N_k$ — ненулевые подмодули в U. Индукция по k. База $k = 1$ тривиальна. По предположению индукции $N = N_1 \cap \ldots \cap N_{k-1} \neq 0$. Выберем ненулевые $u \in N$, $v \in N_k$. По пункту 2)

$$0 \neq uR \cap vR \subseteq N \cap N_k = N_1 \cap \ldots \cap N_k.$$

3) $\Rightarrow$ 4) Если сумма ненулевых подмодулей $N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$ прямая, то прямой будет сумма $N_1 \oplus N_2$, откуда $N_1 \cap N_2 = 0$.

4) $\Rightarrow$ 1) Пусть N — ненулевой подмодуль в U. По лемме о существенном расширении, $N \oplus L \subseteq_e U$ для некоторого $L \leqslant U$. Но по пункту 4) единственная возможность — это $L = 0$. Значит, $N \subseteq_e U$. $\square$

В нашем курсе мы не раз исследовали прямые суммы модулей $M = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ при различных дополнительных условиях. Рассмотрим более общую конструкцию. Не будем требовать, чтобы сумма совпадала со всем модулем, т.е. теперь $M \supseteq X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$. Зададимся вопросом, насколько длинные прямые суммы подмодулей может содержать заданный модуль M.

Определение 19.10. Пусть M — ненулевой R-модуль. *Равномерная размерность*,[28] или *размерность Голди*, $\mathrm{u.dim}\ M$ модуля M — это наибольшее такое натуральное n, что M содержит прямую сумму $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ некоторых n ненулевых подмодулей. Если такого n не существует, то полагаем $\mathrm{u.dim}\ M = \infty$. Считаем также, что размерность нулевого модуля равна нулю.

Следствие 19.11. Модуль M равномерный тогда и только тогда, когда $\mathrm{u.dim}\ M = 1$.

[28]the uniform dimension (Goldie dimension)

Доказательство. По предыдущему предложению равномерность равносильна отсутствию прямых сумму двух и более подмодулей. □

Оказывается, что задача вычисления размерности сводится к суммам равномерных подмодулей.

Теорема 19.12. Для модуля $M \neq 0$ следующие условия эквивалентны:

1) $\mathrm{u.dim}\ M = n < \infty$.

2) Существуют равномерные подмодули $U_1, \ldots, U_n$ модуля M, сумма которых $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$ прямая и является существенным подмодулем $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \subseteq_e M$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Рассмотрим прямую сумму подмодулей $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \subseteq M$, где $n = \mathrm{u.dim}\ M$. Заметим, что каждый X_i равномерен, ведь иначе $X_i \supseteq Y \oplus Z$ для некоторых ненулевых подмодулей Y, Z (предложение 19.9). Тогда, заменяя X_i на $Y \oplus Z$, получаем прямую сумму большей длины, что противоречит максимальности n.

Осталось проверить, что $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \subseteq_e M$. Действительно, по лемме о существенном расширении $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \oplus L \subseteq_e M$ для некоторого $L \leqslant M$. Так как n максимально, то $L = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1) Пусть $X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$ — произвольная прямая сумма подмодулей модуля M. Требуется показать, что $m \leqslant n$. Индукция по n. При $n = 1$ имеем $U_1 \subseteq_e M$. Тогда из равномерности U_1 следует равномерность M (замечание 19.8). Но в равномерном модуле нет прямых сумм двух и более подмодулей (предложение 19.9). Значит, $m = 1$.

Далее $n > 1$. Обозначим $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$. По условию $V \subseteq_e M$, поэтому $\widetilde{X}_i = X_i \cap V \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Сумма $\widetilde{X}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{X}_m$ прямая, т.к. любое разложение нуля $0 = \widetilde{x}_1 + \ldots + \widetilde{x}_m$ для этой суммы является также и разложением нуля для $X_1 \oplus \ldots \oplus X_m$.

Обозначим $Y_i = \widetilde{X}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{X}_{i-1} \oplus \widetilde{X}_{i+1} \oplus \ldots \oplus \widetilde{X}_m$ для $i = 1, \ldots, m$. Другими словами, Y_i совпадает с множеством тех элементов из $\widetilde{X}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{X}_m$, чья проекция на $\widetilde{X}_i$ равна нулю. Значит, $\bigcap_{i=1}^m Y_i = 0$.

Рассмотрим модули $Y_1 \cap U_1, \ldots, Y_m \cap U_1$. Все они являются подмодулями в U_1, их общее пересечение лежит в $\bigcap_{i=1}^m Y_i$, а значит, равно нулю. Однако U_1 равномерен, поэтому хотя бы один из подмодулей $Y_i \cap U_1$ должен быть нулевым (предложение 19.9). С точностью до перенумерации можно считать, что $Y_1 \cap U_1 = 0$.

Введём проекцию

$$\pi : V \longrightarrow U_2 \oplus \ldots \oplus U_n.$$

Все $\widetilde{X}_i$ лежат в V по определению, поэтому Y_1 тоже лежит в V. Рассмотрим ограничение $\pi \Big|_{Y_1}$. Его ядро $\ker \pi \Big|_{Y_1} = \ker \pi \cap Y_1 = U_1 \cap Y_1 = 0$. По теореме о гомоморфизме модулей $\pi \Big|_{Y_1}$ задаёт изоморфизм Y_1 на образ $\pi(Y_1)$. Получаем

$$U_2 \oplus \ldots \oplus U_n \supseteq \pi(Y_1) = \pi(\widetilde{X}_2 \oplus \ldots \oplus \widetilde{X}_m) = \pi(\widetilde{X}_2) \oplus \ldots \oplus \pi(\widetilde{X}_m).$$

Так как ограничение $\pi \Big|_{Y_1}$ является изоморфизмом модулей, то последняя сумма действительно прямая и все слагаемые в ней ненулевые. Модули $U_2, \ldots, U_n$ равномерные и, очевидно, их сумма является существенным подмодулем в себе. Тогда мы можем применить предположение индукции к модулям $\pi(\widetilde{X}_2), \ldots, \pi(\widetilde{X}_m)$. Получаем, $m-1 \leqslant n-1$. Отсюда $m \leqslant n$, что и требовалось. $\square$

Первое следствие теоремы уточняет случай бесконечной размерности.

Следствие 19.13. Для модуля M следующие условия эквиваленты:

1) $\mathrm{u.dim}\ M = \infty$, т.е. M содержит суммы ненулевых подмодулей $X_{k,1} \oplus \ldots \oplus X_{k,k}$ любой длины $k \in \mathbb{N}$.

2) M содержит счётную сумму ненулевых подмодулей $M \supseteq \bigoplus_{i=1}^{\infty} X_i$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Модуль M не может быть неприводим, ведь иначе он равномерен, откуда $\mathrm{u.dim}\ M = 1$. Значит, найдётся $0 \neq N_0 \subsetneq M$. По лемме о существенном расширении $N_0 \oplus L_0 \subseteq_e M$ для некоторого $L_0 \leqslant M$ (если $L_0 = 0$, то уберём его из суммы). По предыдущей теореме модули N_0 и L_0 не могут быть оба равномерными, ведь иначе $\mathrm{u.dim}\ M$ конечна. Значит, хотя бы один из них содержит сумму ненулевых подмодулей. Пусть $N_0 \supseteq N_1 \oplus L_1$.

Заменим N_0 на сумму двух его подмодулей и рассмотрим $N_1 \oplus L_1 \oplus L_0$. По лемме о существенном дополнении найдётся L_{-1}, что $N_1 \oplus L_1 \oplus L_0 \oplus L_{-1} \subseteq_e M$ (если $L_{-1} = 0$, то уберём его из суммы). Снова по теореме все модули в сумме не могут быть равномерными, ведь иначе $\mathrm{u.dim}\ M$ конечна. Поэтому хотя бы один модуль содержит прямую сумму подмодулей и так далее. Сумму можно продолжать сколь угодно долго, поэтому M содержит счётную сумму подмодулей.

2) $\Rightarrow$ 1) Частичные суммы $\bigoplus_{i=1}^{n} X_i$ дают сколь угодно длинные суммы подмодулей. $\square$

Следствие 19.14. Равномерная размерность удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\mathrm{u.dim}\ (M_1 \oplus \ldots \oplus M_k) = \mathrm{u.dim}\ M_1 + \ldots + \mathrm{u.dim}\ M_k$. В частности, сумма бесконечномерна тогда и только тогда, когда по крайней мере одно слагаемое бесконечномерно.

2) Если N — подмодуль в M, то $\mathrm{u.dim}\ N \leqslant \mathrm{u.dim}\ M$. Для конечномерных M, N равенство размерностей равносильно $N \subseteq_e M$.

Доказательство. 1) Обозначим $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$. Пусть сначала все M_i конечномерны. Обозначим $n_i = \mathrm{u.dim}\ M_i$. По предыдущей теореме выберем в M_i равномерные подмодули $U_{i,1}, \ldots, U_{i,n_i}$, сумма которых $V_i = U_{i,1} \oplus \ldots \oplus U_{i,n_i}$ прямая и является существенным подмодулем $V_i \subseteq_e M_i$. Однако существенное расширение $\subseteq_e$ устойчиво относительно взятия прямых сумм (предложение 19.6). Поэтому $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ является существенным подмодулем в $M_1 \oplus \ldots \oplus M_k = M$. В итоге получаем

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=1}^{n_i} U_{i,j} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k = V \subseteq_e M.$$

По теореме $\dim M = n_1 + \ldots + n_k$, что и требовалось.

В частности, мы показали, что если все M_i конечномерны, то M тоже конечномерен. Теперь предположим, что найдётся бесконечномерный M_i. По предыдущему следствию M_i содержит счетную сумму подмодулей. Но тогда M тоже её содержит, а значит $\mathrm{u.dim}\ M = \infty$.

2) Если $\mathrm{u.dim}\ N = \infty$, то N содержит бесконечную прямую сумму подмодулей по предыдущему следствию. Но тогда M тоже её содержит, откуда $\mathrm{u.dim}\ M = \infty$.

Далее $\mathrm{u.dim}\ N = n < \infty$. По теореме выберем прямую сумму равномерных подмодулей $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \subseteq_e N$. Тогда она же будет и суммой подмодулей в M. Поэтому $\mathrm{u.dim}\ N \leqslant \mathrm{u.dim}\ M$ по определению размерности.

Пусть $N \subseteq_e M$. Так как существенное расширение транзитивно (замечание 19.2), то $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \subseteq_e M$, откуда $\mathrm{u.dim}\ M = n$.

Теперь предположим, что N не существенный подмодуль в M. По лемме о существенном расширении $N \oplus L \subseteq_e M$ для некоторого подмодуля L. Так как N не существенный в M, то $L \neq 0$. Значит, модуль M содержит прямую сумму $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n \oplus L$, которая длиннее, чем n. Поэтому $\mathrm{u.dim}\ M > n$ по определению размерности. $\square$

Задачи к лекции 19.

Задача 1. Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$. В каких случаях V равномерный модуль над $\mathbb{F}$?

Задача 2. Чему равна равномерная размерность кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ как модуля над собой?

Задача 3. Есть ли в кольце матриц над полем $M_n(\mathbb{F})$ существенные правые идеалы?

Задача 4. Вычислите равномерную размерность кольца многолченов $R[x]$ как модуля над кольцом R.

Задача 5. Пусть $R = \mathbb{F}[x]$ — кольцо многочленов над полем, $Q = \mathbb{F}(x)$ — поле рациональных дробей. Зададим на Q структуру R-модуля посредством умножение дроби на многочлен. Покажите, что $R_R \subseteq_e Q_R$.

Задача 6. Пусть модуль M обладет композиционным рядом длины ℓ. Докажите, что $\mathrm{u.dim}\ M \leqslant \ell$.

Задача 7. Вычислите равномерную размерность кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$ как $\mathbb{Z}$-модуля.

Задача 8. Пусть $R = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ — кольцо треугольных матриц с элементами в полях вещественных и рациональных чисел. Покажите, что $\mathrm{u.dim}\ {}_R R = 2$, но $\mathrm{u.dim}\ R_R = \infty$.

20 Кольца Голди

Напомним определения левого и правого аннуляторов подмножества кольца $S \subseteq R$.

$$\mathrm{lAnn}(S) = \{\ell \in R \mid \ell s = 0 \;\; \forall s \in S\}, \quad \mathrm{rAnn}(S) = \{r \in R \mid sr = 0 \;\; \forall s \in S\}.$$

В дальнейшем, мы будем очень часто использовать аннуляторы, поэтому введём для них более короткие обозначения $\mathbf{r}(S) = \mathrm{rAnn}(S)$, $\mathbf{l}(S) = \mathrm{lAnn}(S)$. Как обычно, если S состоит из одного элемента $S = \{a\}$, то вместо $\mathbf{r}(\{a\})$, $\mathbf{l}(\{a\})$ будем писать $\mathbf{r}(a)$, $\mathbf{l}(a)$.

Предложение 20.1. Аннуляторы обладают следующими свойствами:
1) Аннуляторы обращают включения

$$S_1 \subseteq S_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{l}(S_1) \supseteq \mathbf{l}(S_2),\; \mathbf{r}(S_1) \supseteq \mathbf{r}(S_2).$$

2) Левые и правые аннуляторы «частично» обращают друг друга

$$S \subseteq \mathbf{r}(\mathbf{l}(S)), \quad S \subseteq \mathbf{l}(\mathbf{r}(S)).$$

3) Выполнена «формула тройного аннулятора»

$$\mathbf{r}(S) = \mathbf{r}(\mathbf{l}(\mathbf{r}(S))), \quad \mathbf{l}(S) = \mathbf{l}(\mathbf{r}(\mathbf{l}(S))).$$

4) Аннуляторы переводят объединение в пересечение[29]

$$\mathbf{l}(S_1 \cup S_2) = \mathbf{l}(S_1) \cap \mathbf{l}(S_2), \quad \mathbf{r}(S_1 \cup S_2) = \mathbf{r}(S_1) \cap \mathbf{r}(S_2).$$

Доказательство. 1) Если элемент кольца аннулирует (слева или справа) все элементы бóльшего множества, то тем более он аннулирует и все элементы меньшего множества.

2) По определению, если $s \in S$, то $\mathbf{l}(S) \cdot s = 0$. Это означает, что $s \in \mathbf{r}(\mathbf{l}(S))$.

3) В предыдущем пункте заменим S на $\mathbf{r}(S)$, получим $\mathbf{r}(S) \subseteq \mathbf{r}(\mathbf{l}(\mathbf{r}(S)))$. Чтобы доказать обратное включение, воспользуемся обоими предыдущими пунктами. Применим $\mathbf{r}(\cdot)$ к включению $S \subseteq \mathbf{l}(\mathbf{r}(S))$.

4) Элемент кольца аннулирует множество $S_1 \cup S_2$ тогда и только тогда, когда он одновременно аннулирует и S_1, и S_2. $\square$

Определение 20.2. Пусть на множестве X задан частичный порядок $\preceq$. Говорят, что X удовлетворяет *условию минимальности*, или является *фундированным*[30], если выполнено любое из эквивалентных условий:

1) Нет бесконечных строго убывающих цепей $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n \succ \ldots$.

2) Любая убывающая цепь $x_1 \succeq x_2 \succeq \ldots \succeq x_n \succeq \ldots$ стабилизируется (обрывается), т.е. начиная с некоторого номера $x_n = x_{n+1} = \ldots$.

3) Любое непустое подмножество $A \subseteq X$ содержит минимальный элемент.

[29] Но не наоборот

[30] well-founded

Доказательство корректности. 2) $\Rightarrow$ 1) Получается сразу.

1) $\Rightarrow$ 3) Пусть $A \subseteq X$ — подмножество, которое не содержит минимального элемента. Выберем любой $x_1 \in X$. Так как x_1 не минимальный, то найдётся такой $x_2 \in A$, что $x_2 \prec x_1$. Далее рассматриваем $x_3 \prec x_2$ и т.д. Получается бесконечная строго убывающая цепочка, противоречие.

3) $\Rightarrow$ 2) Бесконечная убывающая цепочка обязана стабилизироваться, начиная с минимального элемента. $\square$

Определение 20.3. Пусть на множестве X задан частичный порядок $\preceq$. Говорят, что X удовлетворяет *условию максимальности*, если выполнено любое из эквивалентных условий:

1) Нет бесконечных строго возрастающих цепей $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n \prec \ldots$.

2) Любая возрастающая цепь $x_1 \preceq x_2 \preceq \ldots \preceq x_n \preceq \ldots$ стабилизируется (обрывается), т.е. начиная с некоторого номера $x_n = x_{n+1} = \ldots$.

3) Любое непустое подмножество $A \subseteq X$ содержит максимальный элемент.

Доказательство корректности. Сведём к предыдущему при помощи противоположного частичного порядка: $x \preceq' y$ тогда и только тогда, когда $x \succeq y$. $\square$

Пример. Из определения сразу получаем, что модуль артинов (нётеров) тогда и только тогда, когда множество всех его подмодулей, удовлетворяет условию минимальности (максимальности) относительно включения $\subseteq$.

Далее мы будем рассматривать множества всех возможных правых и левых аннуляторов
$$\{\mathbf{r}(S) \mid \varnothing \neq S \subseteq R\}, \quad \{\mathbf{l}(S) \mid \varnothing \neq S \subseteq R\},$$
упорядоченные по включению $\subseteq$.

Следствие 20.4. Множество всех правых аннуляторов удовлетворяет условию максимальности тогда и только тогда, когда множество всех левых — условию минимальности.

Доказательство. Пусть $\mathbf{l}(S_1) \supseteq \mathbf{l}(S_2) \supseteq \ldots$ — убывающая цепочка левых аннуляторов. Если применить к ней правые аннуляторы, то получим возрастающую цепочку $\mathbf{r}(\mathbf{l}(S_1)) \subseteq \mathbf{r}(\mathbf{l}(S_2)) \subseteq \ldots$. Начиная с некоторого шага она стабилизируется $\mathbf{r}(\mathbf{l}(S_n)) = \mathbf{r}(\mathbf{l}(S_{n+1})) = \ldots$. Теперь применим левые аннуляторы и получим исходную цепочку согласно формуле тройного аннулятора. Обратная импликация доказывается аналогично. $\square$

Вспомним, что кольцо полупервично, если оно не содержит нильпотентных идеалов.

Лемма 20.5 (О разделении идеалов)**.** Пусть полупервичное кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов. Рассмотрим его правые идеалы $I \supseteq J$, для которых $\mathbf{l}(I) \neq \mathbf{l}(J)$. Тогда существует такое $v \in I$, что $vI \neq 0$, но $vI \cap J = 0$.

Доказательство. Кольцо R будет удовлетворять условию миниальности для *левых* аннуляторов (следствие 20.4). Рассмотрим упорядоченное по включению множество Ω всех левых аннуляторов $U = \mathbf{l}(S)$ таких, что $\mathbf{l}(I) \subsetneq U \subseteq \mathbf{l}(J)$. Тогда Ω содержит некоторый минимальный аннулятор K. Множество KI — это произведение левого идеала на правый. Значит, KI является двусторонним идеалом. Причём $KI \neq 0$, поскольку $\mathbf{l}(I) \neq K$.

В силу полупервичности идеал KI не нильпотентен, в частности, $(KI)^2 \neq 0$. Отсюда существует элемент $v = ik \in IK$, для которого $KvI \neq 0$. Тем более $vI \neq 0$.

Покажем, что $vI \cap J = 0$. Рассмотрим произвольный элемент $vx \in vI \cap J$, $x \in I$. Покажем сначала, что пересечение $\mathbf{l}(x) \cap K$ лежит в Ω.

1) Множество $\mathbf{l}(x) \cap K$ является левым аннулятором как пресечение двух аннуляторов (нужно взять объединение аннулируемых множеств).

2) Выполнено $\mathbf{l}(x) \cap K \subseteq \mathbf{l}(J)$ в силу $K \subseteq \mathbf{l}(J)$.

3) Проверим, что $\mathbf{l}(I) \subsetneq \mathbf{l}(x) \cap K$. В силу $x \in I$ имеем $\mathbf{l}(I) \subseteq \mathbf{l}(x)$. С учётом $\mathbf{l}(I) \subseteq K$ получаем $\mathbf{l}(I) \subseteq \mathbf{l}(x) \cap K$. Покажем, что включение строгое. Так как $vx \in J$, то по определению K имеем $Kvx = 0$, т.е. $Kv \subseteq \mathbf{l}(x)$. Так как K — левый идеал, то $v \in IK \subseteq K$. Значит, $Kv \subseteq \mathbf{l}(x) \cap K$. При этом $KvI \neq 0$, поэтому $Kv \not\subseteq \mathbf{l}(I)$. Получается, что множество Kv лежит в $\mathbf{l}(x) \cap K$, но не лежит в $\mathbf{l}(I)$. Отсюда $\mathbf{l}(I) \subsetneq \mathbf{l}(x) \cap K$.

Итак, $\mathbf{l}(x) \cap K$ лежит в Ω. Однако $\mathbf{l}(x) \cap K \subseteq K$ и K минимально. Следовательно $\mathbf{l}(x) \cap K = K$, т.е. $K \subseteq \mathbf{l}(x)$. Это означает, что $Kx = 0$, откуда $vx = ikx = 0$. В силу произвольности $vx \in vI \cap J$ получаем $vI \cap J = 0$. □

Отметим, что в предыдущей лемме правый идеал vI всегда содержится в I в силу того, что $v \in I$.

Вспомним, что правый идеал $I \leqslant R_R$ называется существенным, если его пересечение с любым ненулевым правым идеалом кольца R отлично от нуля.

Предложение 20.6. Пусть полупервичное кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов, xR, yR — его существенные правые идеалы. Тогда правый идеал xyR также существенный.

Доказательство. Пусть $0 \neq A$ — некоторый правый идеал в R. Требуется доказать, что $A \cap xyR \neq 0$. Заметим, что множество $I = \{t \in R \mid xt \in A\}$ — это правый идеал. Положим также $J = \mathbf{r}(x)$. Чтобы применить лемму, надо показать, что $\mathbf{l}(I) \neq \mathbf{l}(J)$. С одной стороны, элемент $x \notin \mathbf{l}(I)$, так как $xI = xR \cap A \neq 0$ ввиду существенности xR. С другой стороны, $\mathbf{l}(J) = \mathbf{l}(\mathbf{r}(x)) \ni x$. Тогда, применяя лемму к I и $J = \mathbf{r}(x)$, выберем элемент $v \in I$ такой, что для правого идеала $0 \neq T = vI \subseteq I$ выполнено $T \cap \mathbf{r}(x) = 0$.

Теперь рассмотрим правый идеал $L = \{r \in R \mid yr \in T\}$. Так как yR — существенный правый идеал, то $yL = yR \cap T \neq 0$. В силу того, что $yL \subseteq T$ и $T \cap \mathbf{r}(x) = 0$, имеем $xyL \neq 0$. Затем, используя включение $T \subseteq I$, можно показать, что $0 \neq xyL \subseteq xT \subseteq xI \subseteq A$. Отсюда заключаем, что пересечение $A \cap xyR$ не равно нулю, т.к. оно содержит $xyL \neq 0$. $\square$

Ненулевой элемент $s \in R$ *регулярен*, если он не является ни левым, ни правым делителем нуля, т.е. $\mathbf{r}(s) = \mathbf{l}(s) = 0$.

Следствие 20.7. Пусть полупервичное кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов, aR — его существенный правый идеал. Тогда элемент a регулярен, т.е. не является делителем нуля.

Доказательство. Рассмотрим правые идеалы $I = R$, $J = aR$. Очевидно $\mathbf{l}(R) = 0$. Если предположить, что $\mathbf{l}(aR) \neq 0$, то по лемме найдётся ненулевой правый идеал, который тривиально пересекает aR. Это невозможно в силу существенности aR. Значит, $\mathbf{l}(aR) = 0$, откуда $\mathbf{l}(a) = 0$.

По предложению 20.6 вместе с aR существенны правые идеалы $a^2R, \dots, a^kR, \dots$ Теперь рассмотрим возрастающую цепочку $\mathbf{r}(a) \subseteq \mathbf{r}(a^2) \subseteq \dots$ Так как кольцо удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов, то $\mathbf{r}(a^n) = \mathbf{r}(a^{n+1}) = \dots$, начиная с некоторого n. Пусть $x \in a^nR \cap \mathbf{r}(a)$. Тогда $x = a^ny$, $0 = ax = a^{n+1}y$. Следовательно, $y \in \mathbf{r}(a^{n+1}) = \mathbf{r}(a^n)$ и $x = 0$. Поэтому $a^nR \cap \mathbf{r}(a) = 0$, откуда $\mathbf{r}(a) = 0$ в силу существенности a^nR. $\square$

Определение 20.8. Кольцо R называется *правым кольцом Голди*, если выполнены оба условия:

1) R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов, т.е. всякая цепочка $\mathbf{r}(S_1) \subseteq \mathbf{r}(S_2) \subseteq \dots$ стабилизируется;

2) $\mathrm{u.dim}\ R_R < \infty$, т.е. R_R не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых правых идеалов.

Аналогично определяется левое кольцо Голди. В общем случае это разные классы колец.

Примеры.

- Всякое нётерово справа кольцо является правым кольцом Голди.
- Любая область конечной правой размерности — правое кольцо Голди. Все аннуляторы в этом случае нулевые.
- Заметим, что если K — коммутативная область, то $\mathrm{u.dim}\ K_K = 1$. Действительно, для любых идеалов I, J выберем ненулевые $a \in I$, $b \in J$. Тогда[31]

[31]Здесь мы пользуемся тем, что в коммутативном кольце все идеалы двусторонние

$0 \neq a \cdot b \in I \cap J$. Значит, K_K — равномерный модуль и u.dim $K_K = 1$ (следствие 19.11). Таким образом, коммутативная область — правое и левое кольцо Голди как частный случай предыдущего примера.

Лемма 20.9. Пусть R — полупервичное правое кольцо Голди, $c \in R$, $\mathbf{r}(c) = 0$. Тогда cR существенный, а значит, c регулярен.

Доказательство. Пусть $I \cap cR = 0$, где I — правый идеал. От противного, предположим, что $I \neq 0$. Рассмотрим правые идеалы $c^n I$, $n \geqslant 0$. Так как R — правое кольцо Голди, то их сумма не может быть прямой. Выберем наименьшее n, для которого выполнено $c^n i_n + \ldots + c i_1 + i_0 = 0$ при некоторых $i_j \in I$. Отметим, что I — правый идеал, но необязательно левый, поэтому произведения $c^k i_k$, $k \geqslant 1$ могут и не лежать в I.

Сумма всех слагаемых без i_0, равна $-i_0$, а значит, лежит в $I \cap cR = 0$, поэтому $i_0 = 0$. Кроме того, $c(c^{n-1} i_n + \ldots + i_1) = 0$, откуда $c^{n-1} i_n + \ldots + i_1 = 0$, поскольку $\mathbf{r}(c) = 0$ по условию. Получаем противоречие с минимальностью n. Значит, $I = 0$.

Регулярность элемента c вытекает из предыдущего следствия. □

Отметим, что если в *правом* полупервичном кольце Голди у некоторого элемента равен нулю его *левый* аннулятор, то такой элемент не обязан быть регулярным.

Теорема 20.10. Пусть R — полупервичное правое кольцо Голди, I — его существенный правый идеал. Тогда в I содержится регулярный элемент.

Доказательство. Согласно лемме Утуми (лемма 18.25), если полупервичное кольцо удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых аннуляторов, то в таком кольце нет правых, левых и двусторонних нильидеалов отличных от нулевого.

Сначала покажем, что каждый ненулевой правый идеал J нашего кольца R содержит элемент x, который не является нильпотентом, и при этом $\mathbf{r}(x) = \mathbf{r}(x^2)$. Рассмотрим семейство аннуляторов

$$\Omega = \{\mathbf{r}(x) \mid x \in J,\ x^n \neq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}\},$$

упорядоченное по включению. Так как J не правый нильидеал, то Ω непусто. Любая цепь в Ω стабилизируется в силу условия максимальности на аннуляторы. По лемме Цорна в Ω есть некоторый максимальный элемент $\mathbf{r}(x)$. Соотношение $\mathbf{r}(x) \subseteq \mathbf{r}(x^2)$ выполнено всегда, но строгое включение противоречило бы максимальности $\mathbf{r}(x)$, значит, $\mathbf{r}(x) = \mathbf{r}(x^2)$.

Будем доказывать теорему от противного: предположим, что в существенном правом идеале I нет регулярных элементов. В силу предыдущей леммы это значит, что правый аннулятор каждого $a \in I$ отличен от нуля. Далее будем индуктивно строить бесконечную последовательность ненулевых элементов $a_1, a_2, \ldots$, таких что
1) $\mathbf{r}(a_i) = \mathbf{r}(a_i^2)$;

2) если $i < j$, то $a_i a_j = 0$;
3) сумма правых идеалов $a_1 R \oplus \ldots \oplus a_n R$ является прямой для всех n.
База индукции $n = 1$ доказана ранее, достаточно положить $J = I$.

Пусть теперь построены элементы $a_1, \ldots, a_n$. Положим $b = a_1 + \ldots + a_n$. Так как сумма $a_1 R \oplus \ldots \oplus a_n R$ прямая, то $b \neq 0$, а также $\mathbf{r}(b) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{r}(a_i)$. Причём $\mathbf{r}(b) \neq 0$ ввиду нашего предположения. Рассмотрим правый идеал $J = \mathbf{r}(b) \cap I$, он не равен нулю в силу существенности I. Тогда по предыдущему в J тоже имеется ненильпотентный элемент a_{n+1}, такой что $\mathbf{r}(a_{n+1}) = \mathbf{r}(a_{n+1}^2)$. Так как $a_{n+1} \in J \subseteq \mathbf{r}(b) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbf{r}(a_i)$, то выполнено $a_i a_{n+1} = 0$ при $i \leqslant n$.

Осталось доказать, что новое слагаемое $a_{n+1} R$ имеет нулевое пересечение с суммой $a_1 R \oplus \ldots \oplus a_n R$. Пусть $y \in (a_1 R \oplus \ldots \oplus a_n R) \cap a_{n+1} R$. Тогда $y = a_{n+1} z = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i$ для некоторых $z, z_i \in R$. Умножим это равенство на a_1 слева, тогда в силу пункта 2) получаем $0 = a_1 a_{n+1} z = a_1^2 z_1$, откуда $z_1 \in \mathbf{r}(a_1^2) = \mathbf{r}(a_1)$ и $a_1 z_1 = 0$. Аналогично умножаем далее на $a_2, a_3, \ldots, a_n$ (строго в этом порядке) и получаем, что $0 = a_2 z_2 = \ldots = a_n z_n$. Значит, $y = 0$ и сумма $a_1 R \oplus \ldots \oplus a_{n+1} R$ действительно прямая.

Построена бесконечная прямая сумма правых идеалов $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a_i R \subseteq R$, что противоречит определению кольца Голди. Поэтому в I обязан найтись регулярный элемент. $\square$

Задачи к лекции 20.

Задача 1. Приведите пример правого полупервичного кольца Голди и его элемента такого, что левый аннулятор этого элемента равен нулю его, но элемент не является регулярным.

Задача 2. Приведите пример полупервичного правого кольца Голди, которое не является нётеровым справа.

Задача 3. Верно ли, что примитивное справа правое кольцо Голди является простым кольцом?

Задача 4. Покажите, что кольцо рациональных верхнетреугольных матриц $T_n(\mathbb{Q})$ является правым кольцом Голди.

Задача 5. Покажите, что кольцо матриц $M_n(\mathbb{F})$ над конечным полем $\mathbb{F}$ является правым кольцом Голди.

Задача 6. Покажите, что кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{R}[[x]]$ является правым кольцом Голди.

21 Классическое кольцо частных

Продолжаем использовать наши сокращенные обозначения для аннуляторов подмножества кольца $\varnothing \neq S \subseteq R$.

$$\mathbf{l}(S) = \{\ell \in R \mid \ell s = 0 \ \ \forall s \in S\}, \quad \mathbf{r}(S) = \{r \in R \mid sr = 0 \ \ \forall s \in S\}.$$

Вспомним, что ненулевой элемент $s \in R$ *регулярен*, если он не является ни левым, ни правым делителем нуля, т.е. $\mathbf{r}(s) = \mathbf{l}(s) = 0$. Далее нам понадобится обозначение для множества всех регулярных элементов кольца

$$\mathbf{S}(R) = \{s \in R \mid \mathbf{r}(s) = \mathbf{l}(s) = 0\}.$$

Замечание 21.1. Произведение двух регулярных элементов регулярно.

Доказательство. Пусть a, b — регулярные элементы кольца R. Покажем, что произведение ab не может быть делителем нуля справа (слева аналогично). Если $c(ab) = 0$, то $ca = 0$, т.к. b регулярен. Но тогда $c = 0$ в силу регулярности a. □

Обратимый элемент кольца всегда регулярен. Однако если элемент обратим только справа (или только слева), то он может и не быть регулярным (пример 17.2).

Предложение 21.2. Пусть R — полупростое кольцо. Для элемента $a \in R$ следующие условия эквивалентны:
1) a регулярен;
2) a обратим.

Доказательство. 2) $\Rightarrow$ 1) Верно всегда.

1) $\Rightarrow$ 2) Так как модуль R_R полупрост, то правый идеал aR выделяется прямым слагаемым (теорема 6.7). Значит, $aR = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$ (предложение 11.13), откуда $a = er$. Если $e \neq 1$, то $(1-e)a = (1-e)er = 0$, что противоречит регулярности элемента a. Значит, $e = 1$ и $aR = R$, т.е. a обратим справа. Аналогично a обратим слева. □

Определение 21.3. Рассмотрим кольцо Q и его подкольцо $R \subseteq Q$. Тогда Q называется *правым классическим кольцом частных* для R, если
1) все регулярные элементы кольца R обратимы в Q
2) каждый элемент $q \in Q$ может быть представлен в виде $q = ab^{-1}$, где $a, b \in R$ и b регулярен.

Аналогично определяется левое классическое кольцо частных[32].

Пример. $\mathbb{Q}$ — правое и левое классическое кольцо частных для $\mathbb{Z}$.

[32] В случае левого кольца частных $q = b^{-1}a$.

Пример. $M_n(\mathbb{Q})$ — правое и левое классическое кольцо частных для $M_n(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Определим функцию $d : M_n(\mathbb{Q}) \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{N}$, которая каждой матрице X ставит в соответствие наименьшее общее кратное d_X знаменателей всех ненулевых элементов $(X)_{ij}$ матрицы X. Тогда $d_X \cdot X \in M_n(\mathbb{Z})$.

1) Если $A \in M_n(\mathbb{Z})$ не делитель нуля, то A не делитель нуля и в большем кольце $M_n(\mathbb{Q})$. Действительно, если $AB = O$, где $B \in M_n(\mathbb{Q})$, то $O = A(B \cdot d_B)$. Отсюда $B \cdot d_B = O$ и $B = O$. Аналогично, если $BA = O$, то $B = O$. Однако кольцо $M_n(\mathbb{Q})$ полупростое (теорема Молина-Веддербёрна-Артина). Поэтому B обратима в $M_n(\mathbb{Q})$ по предыдущему предложению.

2) Произвольная матрица $X \in M_n(\mathbb{Q}) \setminus \{O\}$ может быть представлена в виде $X = (d_X X)(d_X E)^{-1} = (d_X E)^{-1}(d_X X)$, где E — единичная матрица. □

Определение 21.4. Кольцо R удовлетворяет *правому условию Оре*, или является *правым кольцом Оре*, если для любых $a \in R$, $s \in \mathbf{S}(R)$ существуют такие $a' \in R$, $s' \in \mathbf{S}(R)$, что $as' = sa'$. Симметрично определяется левое условие Оре[33]

Пример. Коммутативное кольцо всегда удовлетворяет условию Оре с обеих сторон, достаточно положить $a' = a$ и $s' = s$.

Лемма 21.5. Пусть R обладает правым классическим кольцом частных $Q \supseteq R$. Тогда R удовлетворяет правому условию Оре.

Доказательство. Пусть $a \in R$, $s \in \mathbf{S}(R)$. Тогда s обратим в Q, причем элемент $s^{-1}a$ можно представить в виде $a's'^{-1}$, где $s' \in \mathbf{S}(R)$, $a' \in R$. Тогда $as' = sa'$. □

Докажем, что правое условие Оре не только необходимое, но и достаточное условие того, что у кольца имеется классическое правое кольцо частных.

Лемма 21.6 (Приведение к общему знаменателю)**.** Пусть R — правое кольцо Оре, $a, b \in \mathbf{S}(R)$. Тогда существуют такие $c, d \in \mathbf{S}(R)$, что $ac = bd$.

Доказательство. По условию Оре найдутся элементы $x_0, x_1 \in R$, $s_0, s_1 \in \mathbf{S}(R)$, для которых $ax_0 = bs_0$, $as_1 = bx_1$. Достаточно доказать, например, что $x_0 \in \mathbf{S}(R)$, то есть что $\mathbf{l}(x_0) = \mathbf{r}(x_0) = 0$.

Правый аннулятор $\mathbf{r}(x_0) \subseteq \mathbf{r}(bs_0) = 0$ ввиду регулярности b и s_0. Для левого аннулятора воспользуемся правым условием Оре для элементов x_1, s_0. Получим $s_0x_2 = x_1s_2$ для некоторых $x_2 \in R$, $s_2 \in \mathbf{S}(R)$. Тогда

$$ax_0x_2 = bs_0x_2 = bx_1s_2 = as_1s_2,$$

откуда $0 = a(x_0x_2 - s_1s_2) = x_0x_2 - s_1s_2$ из регулярности a. Следовательно, $\mathbf{l}(x_0) \subseteq \mathbf{l}(x_0x_2) = \mathbf{l}(s_1s_2) = 0$, т.к. s_1, s_2 регулярны. □

[33] Левое условие Оре $s'a = a's$.

«Уравнивающие» элементы a', s' в условии Оре определены однозначно с точностью до умножения на регулярные элементы.

Лемма 21.7 (Об «уравнивающих» коэффициентах)**.** Предположим, что R — правое кольцо Оре. Пусть $as' = sa'$ и $as'' = sa''$ для некоторых $a, a', a'' \in R$, $s, s', s'' \in \mathbf{S}(R)$. Тогда найдутся регулярные $u', u'' \in \mathbf{S}(R)$ такие, что $s'u' = s''u''$ и $a'u' = a''u''$.

Доказательство. По лемме о приведении к общему знаменателю выберем регулярные $u', u'' \in \mathbf{S}(R)$ такими, что $s'u' = s''u''$. Тогда

$$s(a'u') = (sa')u' = (as')u' = a(s'u') = a(s''u'') = (as'')u'' = (sa'')u'' = s(a''u'').$$

Получаем $s(a'u' - a''u'') = 0$, откуда $a'u' = a''u''$ в силу регулярности s. □

Теорема 21.8. Кольцо R удовлетворяет правому условию Оре тогда и только тогда, когда для него существует правое классическое кольцо частных.

Доказательство (без проверки аксиом кольца). Достаточность была показана в лемме 21.5, докажем необходимость. Обозначим $\mathbf{S} = \mathbf{S}(R)$. Рассмотрим декартово произведение множеств $M = R \times \mathbf{S}$ и определим на нём отношение $\sim$:

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ если существуют } s_1, s_2 \in \mathbf{S}, \text{ для которых } bs_1 = ds_2 \text{ и } as_1 = cs_2.$$

Если понимать M как полугруппу с покомпонентным умножением $*$, то предыдущее условие можно переписать в виде $(a, b) * (s_1, s_1) = (c, d) * (s_2, s_2)$. Заметим также, что при $s \in \mathbf{S}$ всегда выполнено $(a, b) \sim (as, bs)$.

Рефлексивность и симметричность отношения $\sim$ очевидны. Проверим транзитивность. Пусть $(a, b) \sim (c, d)$ и $(c, d) \sim (e, f)$. Тогда для некоторых $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbf{S}$ выполнено

$$bs_1 = ds_2, \quad as_1 = cs_2, \qquad ds_3 = fs_4, \quad cs_3 = es_4.$$

По лемме 21.6 существуют $s_5, s_6 \in \mathbf{S}$ такие, что $s_2s_5 = s_3s_6$. Имеем

$$bs_1s_5 = ds_2s_5 = ds_3s_6 = fs_4s_6, \qquad as_1s_5 = cs_2s_5 = cs_3s_6 = es_4s_6,$$

откуда $(a, b) * (s_1s_5, s_1s_5) = (e, f) * (s_4s_6, s_4s_6)$. Это значит, что $(a, b) \sim (e, f)$.

Класс эквивалентности пары $(a, b) \in M$ назовём *дробью* и обозначим символом a/b. На множестве всех дробей введём операции следующим образом.

1. Сложение: Для дробей a/b и c/d применяем лемму 21.6, находим $s_1, s_2 \in \mathbf{S}$ такие, что $bs_1 = ds_2 = s$. Тогда $a/b = (as_1)/s$ и $c/d = (cs_2)/s$, и полагаем

$$a/b + c/d = (as_1 + cs_2)/s.$$

1.1. Операция сложения не зависит от выбора вспомогательных элементов s_1, s_2. Пусть $b\hat{s}_1 = d\hat{s}_2 = \hat{s}$ — другое представление. Применим лемму 21.6 к знаменателям

s и $\hat{s}$. Найдём такие $u, \hat{u} \in \mathbf{S}$, что $su = \hat{s}\hat{u}$. Тогда $bs_1u = b\hat{s}_1\hat{u}$, откуда $s_1u = \hat{s}_1\hat{u}$ в силу регулярности b. Аналогично $s_2u = \hat{s}_2\hat{u}$ из регулярности d. Значит,

$$(as_1 + cs_2, s) * (u, u) = (as_1u + cs_2u, su) = (a\hat{s}_1\hat{u} + c\hat{s}_2\hat{u}, \hat{s}\hat{u}) = (a\hat{s}_1 + c\hat{s}_2, \hat{s}) * (\hat{u}, \hat{u}).$$

1.2. Операция сложения не зависит от выбора представителей классов эквивалентности дробей. Пусть $(\hat{a}, \hat{b}) \sim (a, b)$. Согласно определению сложения выберем $s_1, s_2 \in \mathbf{S}$ такие, что $s = ds_2 = bs_1$. Тогда $(as_1, bs_1) \sim (a, b) \sim (\hat{a}, \hat{b})$. Значит, для некоторых $v, \hat{v} \in \mathbf{S}$ выполнено $(as_1, bs_1) * (v, v) = (\hat{a}, \hat{b}) * (\hat{v}, \hat{v})$. Получаем, что

$$sv = ds_2v = bs_1v = \hat{b}\hat{v}.$$

Тогда

$$(a, b) + (c, d) \sim (as_1 + cs_2, s) \sim (as_1 + cs_2, s) * (v, v) =$$
$$(as_1v + cs_2v, sv) = (\hat{a}\hat{v} + cs_2v, sv) \sim (\hat{a}, \hat{b}) + (c, d),$$

где в последнем равенстве мы взяли $\hat{v}$ и s_2v в качестве вспомогательных элементов и воспользовались доказанной ранее независимостью суммы от их выбора.

По определению операция сложения коммутативна. Поэтому если дополнительно дано $(c, d) \sim (\hat{c}, \hat{d})$, то

$$(a, b) + (c, d) \;\sim\; (\hat{a}, \hat{b}) + (c, d) \;=\; (c, d) + (\hat{a}, \hat{b}) \;\sim\; (\hat{c}, \hat{d}) + (\hat{a}, \hat{b}) \;=\; (\hat{a}, \hat{b}) + (\hat{c}, \hat{d})$$

2. Умножение: Рассмотрим дроби a/b и c/d. Применяем правое условие Оре к b и c. Найдутся $c' \in R$, $b' \in \mathbf{S}$ такие, что $bc' = cb' = g$. Если бы c' был регулярен, то мы могли бы записать $a/b = (ac')/g$; также в любом случае $c/d = g/(db')$. Естественно положить $(a/b) \cdot (c/d) = (ac')/(db')$, где мы как будто «сократили» на g. Однако c' необязательно регулярен. Тем не менее, можно корректно задать

$$(a/b) \cdot (c/d) = (ac')/(db')$$

просто по определению.

2.1. Операция умножения не зависит от выбора вспомогательных элементов b', c'. Пусть $bc'' = cb''$ — другое представление. По лемме об уравнивающих коэффициентах найдутся регулярные $u', u'' \in \mathbf{S}$ такие, что $c'u' = c''u''$, $b'u' = b''u''$. Тогда

$$(ac', db') \sim (ac', db') * (u', u') = (ac'u', db'u') =$$
$$= (ac''u'', db''u'') = (ac'', db'') * (u'', u'') \sim (ac'', db'').$$

2.2. Операция умножения не зависит от выбора представителей классов эквивалентности дробей. Пусть $(a, b) \sim (\hat{a}, \hat{b})$ и $(c, d) \sim (\hat{c}, \hat{d})$. Это значит, что для некоторых регулярных $u, \hat{u}, v, \hat{v} \in \mathbf{S}$ выполнено

$$(a, b) * (u, u) = (\hat{a}, \hat{b}) * (\hat{u}, \hat{u}), \qquad (c, d) * (v, v) = (\hat{c}, \hat{d}) * (\hat{v}, \hat{v}). \tag{1}$$

Применяя условие Оре к элементам cv и bu, подберём такие $c''' \in R$, $b''' \in \mathbf{S}$, что

$$(cv)b''' = (bu)c''', \quad \text{откуда} \quad (\hat{c}\hat{v})b''' = (\hat{b}\hat{u})c'''.$$

Переставляя скобки, получаем соотношение Оре для элементов b, c и $\hat{b}, \hat{c}$

$$c(vb''') = b(uc'''), \qquad \hat{c}(\hat{v}b''') = \hat{b}(\hat{u}c'''), \tag{2}$$

т.к. $vb''', \hat{v}b''' \in \mathbf{S}$. По предыдущему произведение дробей не зависит от выбора уравнивающих коэффициентов в соотношении Оре, поэтому

$$(a/b)\cdot(c/d) \underset{(2)}{=} (auc''', dvb''') \underset{(1)}{=} (\hat{a}\hat{u}c''', \hat{d}\hat{v}b''') \underset{(2)}{=} (\hat{a}/\hat{b})\cdot(\hat{c}/\hat{d}).$$

3. Кольцо частных. Обозначим через Q множество всех дробей (классов эквивалентности) с заданными операциями сложения и умножения. Тогда Q — ассоциативное кольцо с единицей $1/1$. Непосредственная проверка аксиом кольца требует аналогичных технических рассуждений и будет предложена в качестве упражнения.

Покажем, что Q — правое классическое кольцо частных кольца R. Для этого заметим, что $(0,b) \sim (0,1) \not\sim (a,b)$ для любых $b \in \mathbf{S}$, $a \in R \setminus \{0\}$. Поэтому отображение $r \mapsto r/1$ задаёт инъективный гомоморфизм колец $R \longrightarrow Q$. По теореме о гомоморфизме R изоморфно своему образу. Отождествляя $r \in R$ с дробью $r/1$, можно считать, что $R \subseteq Q$. Для любого регулярного $s \in \mathbf{S}$ выполнено $s(1/s) = (1/s)s = 1/1$, откуда s обратим в Q. Также $a/b = (a/1)(1/b) = ab^{-1}$ для любой дроби $a/b \in Q$. $\square$

Задачи к лекции 21.

Задача 1. Проверить, удовлетворяет ли кольцо $\left(\begin{smallmatrix}\mathbb{Z} & \mathbb{Q}\\ 0 & \mathbb{Q}\end{smallmatrix}\right)$ правому или левому условию Оре.

Задача 2. Докажите, что $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ является классическим кольцом частных для кольца $R = \{(a,b)\colon a \equiv b \pmod 7\} \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Задача 3. В доказательстве теоремы 21.8 проверить ассоциативность сложения.

Задача 4. В доказательстве теоремы 21.8 проверить аксиомы дистрибутивности.

Задача 5. В доказательстве теоремы 21.8 проверить ассоциативность умножения.

Задача 6. Докажите, что если правое классическое кольцо частных кольца R существует, то оно единственно, с точностью до изоморфизма, тождественного над R.

Задача 7. Покажите, что левое и правое классические кольца частных кольца R, которое удовлетворяет одновременно левому и правому условиям Оре, можно отождествить.

22 Области Оре. Теорема Голди

Ранее мы определили правое классическое кольцо частных. Кольцо обладает правым классическим кольцом частных тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет правому условию Оре: для всех $a \in R$ и $s \in \mathbf{S}(R)$ найдутся $a' \in R$ и $s' \in \mathbf{S}$, что $as' = sa'$ (теорема 21.8).

Теорема 22.1. Для <u>области</u> R следующие условия эквивалентны:

1) R обладает правым классическим кольцом частных.
2) $aR \cap bR \neq 0$ для всех $a, b \neq 0$
3) u.dim $R_R = 1$;
4) u.dim $R_R < \infty$;

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Так как в области все ненулевые элементы регулярны, то это переформулировка правого условия Оре.

2) $\Leftrightarrow$ 3) Равносильные определения равномерного модуля (предложение 19.9 и следствие 19.11)

3) $\Rightarrow$ 4) Частный случай.

4) $\Rightarrow$ 2) Предположим противное, т.е. $aR \cap bR = 0$ для некоторых $a, b \in R \setminus \{0\}$. Покажем, что правые идеалы $a^k bR$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ образуют бесконечную прямую сумму. Действительно, пусть $a^{k_1} br_1 + \ldots + a^{k_n} br_n = 0$. С точностью до перенумерации можно считать, что $k_1 < \ldots < k_n$. Так как R — область, то можно сократить слева на a^{k_1}, останется $br_1 + a^{k_2 - k_1} br_2 + \ldots + a^{k_n - k_1} br_n = 0$, тогда

$$-br_1 = a^{k_2 - k_1} br_2 + \ldots + a^{k_n - k_1} br_n \in aR \cap bR = 0.$$

Значит, $br_1 = 0$, откуда $r_1 = 0$ ввиду $b \neq 0$. Применяя индукцию по n, получаем, что $r_1 = \ldots = r_n = 0$. $\square$

Определение 22.2. Область R называется *правой областью Оре*, если $aR \cap bR \neq 0$ для всех $a, b \neq 0$.

Замечание 22.3. Классическое кольцо частных области является телом.

Доказательство. Если Q — правое классическое кольцо частных области R, то любой $q \in Q$ представим в виде $q = as^{-1}$, где $a \in R$, $s \in \mathbf{S}(R)$. Но $\mathbf{S}(R) = R \setminus \{0\}$, т.к. R — область. Поэтому если $q \neq 0$, то $a \neq 0$ и a регулярен в R, а значит, обратим в Q по определению кольца частных. Но тогда sa^{-1} — обратный элемент к q. $\square$

Отметим, что существуют правые области Оре, которые не являются левыми.

Продолжаем использовать наши сокращенные обозначения для аннуляторов подмножества кольца $\varnothing \neq S \subseteq R$.

$$\mathbf{l}(S) = \{\ell \in R \mid \ell s = 0 \ \ \forall s \in S\}, \quad \mathbf{r}(S) = \{r \in R \mid sr = 0 \ \ \forall s \in S\}.$$

Элемент $s \in R$ регулярен, если он не является делителем нуля, т.е. $0 = \mathbf{r}(s) = \mathbf{l}(s)$. Множество всех регулярных элементов обозначаем как обычно через $\mathbf{S}(R)$. Это полугруппа по умножению.

Вспомним, что R называется правым кольцом Голди, если 1) любая возрастающая цепочка правых аннуляторов стабилизируется, а также 2) $\mathrm{u.dim}\, R_R < \infty$, т.е. R_R не содержит бесконечной прямой суммы правых идеалов.

Оказывается, что полупервичные правые кольца Голди – это в точности те кольца, у которых правое классическое кольцо частных полупросто, т.е. изоморфно прямому произведению колец матриц над телами. Разобьём доказательство на несколько этапов.

Вспомним, что правый идеал называется существенным, если его пересечение с любым ненулевым правым идеалом отлично от нуля.

Лемма 22.4. У полупервичного правого кольца Голди R есть правое классическое кольцо частных Q.

Доказательство. Достаточно показать, что кольцо R удовлетворяет правому условию Оре (теорема 21.8). Если $a \in R$, $s \in \mathbf{S}(R)$, то правый идеал sR существенный (лемма 20.9). Множество $I = \{u \in R \mid au \in sR\}$ является правым идеалом. Покажем, что I также окажется существенным. Рассмотрим правый идеал J такой, что $I \cap J = 0$. По определению I получаем, что $aJ \cap sR = 0$. Поэтому $aJ = 0$ ввиду существенности sR. Значит, $aJ = 0 \subseteq sR$ и $J \subseteq I$ по определению I. Таким образом, $J = I \cap J = 0$, т.е. I действительно существенный.

Получается, что I — существенный правый идеал в полупервичном правом кольце Голди. Тогда I содержит регулярный элемент (теорема 20.10), обозначим его s'. Из определения идеала I получаем, что при некотором $a' \in R$ выполнено $as' = sa'$, что совпадает с правым условием Оре. □

Лемма 22.5. Пусть Q — правое классическое кольцо частных кольца R. Рассмотрим произвольный правый идеал J в R. Обозначим через $I = JQ$ – правый идеал кольца Q, порождённый множеством J. Тогда

$$I = \{as^{-1} \mid a \in J,\ s \in \mathbf{S}(R)\}.$$

Доказательство. Включение $I \supseteq \{as^{-1} \mid a \in J,\ s \in \mathbf{S}(R)\}$ сразу следует из определения правого идеала, порождённого множеством. Проверим обратное включение. Рассмотрим произвольный $x \in I$. Так как $I = JQ$, то $x = \sum_{i=1}^{n} x_i q_i$, где $x_i \in J$, $q_i \in Q$. Однако Q — правое кольцо частных, поэтому $q_i = p_i s_i^{-1}$ для некоторых $p_i \in R$, $s_i \in \mathbf{S}(R)$. Значит, $x = \sum x_i p_i s_i^{-1}$. Применяя лемму об общем знаменателе $n-1$ раз (лемма 21.6) найдём такие регулярные $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{S}(R)$, что $s_1 t_1 = \ldots = s_n t_n = s$. Тогда

$$x = \sum x_i p_i s_i^{-1} = \sum (x_i p_i t_i)(s_i t_i)^{-1} = (\sum x_i p_i t_i) s^{-1}.$$

Элемент $a = \sum x_i p_i t_i$ лежит в I, так как все x_i лежат в I и I — правый идеал. □

Лемма 22.6. Пусть R — полупервичное правое кольцо Голди. Тогда его правое классическое кольцо частных Q существует и является полупростым кольцом.

Доказательство. Существование Q доказано в лемме 22.4. Покажем, что Q полупросто, т.е. Q_Q — полупростой модуль. Для этого нужно проверить что каждый правый идеал $I \leqslant Q_Q$ выделяется прямым слагаемым (теорема 6.7).

Так как $R \subseteq Q$, то мы можем рассмотреть $J = I \cap R$. Тогда J — группа по сложению как пересечение двух групп по сложению. В силу того, что I устойчиво относительно умножения справа на элементы Q, то тем более I устойчиво относительно умножения на элементы подкольца $R \subseteq Q$. Поэтому $J \leqslant R_R$ — правый идеал в R. Выберем другой правый идеал $J' \leqslant R_R$ такой, что сумма $J \oplus J' \subseteq_e R_R$ — существенный правый идеал в R_R (лемма 19.3).

Обозначим через $I' = J'Q$ — правый идеал кольца Q, порождённый множеством J'. Далее мы покажем, что $I' \oplus I = Q_Q$.

1) Проверим $I \cap I' = 0$. Выберем произвольный $y \in I \cap I'$. Так как $y \in I' = J'Q$, то по лемме 22.5 $y = as^{-1}$ для некоторых $a \in J'$, $s \in \mathbf{S}(R)$. Следовательно, $ys \in J'$. С учётом $y \in I$ получаем

$$ys \in J' \cap I \underset{J' \subseteq R}{=} (J' \cap R) \cap I = J' \cap (R \cap I) = J' \cap J \underset{J \oplus J'}{=} 0.$$

Тогда $y = 0$ ввиду регулярности s.

2) Докажем, что $I' \oplus I = Q_Q$. По построению $J \subseteq I$ и $J' \subseteq I'$, поэтому $J' \oplus J \subseteq I' \oplus I$. Однако $J \oplus J' \subseteq_e R_R$ — существенный правый идеал, и R — полупервичное правое кольцо Голди. Значит, $J \oplus J'$ содержит некоторый регулярный $u \in \mathbf{S}(R)$ (теорема 20.10). Значит, $u \in I' \oplus I$, но в Q все регулярные элементы кольца R должны быть обратимы по определению кольца частных. Отсюда $I' \oplus I = Q_Q$. □

Лемма 22.7. Пусть Q — правое классическое кольцо частных кольца R. Предположим, что Q полупросто. Тогда R — полупервичное правое кольцо Голди.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{r}_Q(\cdot)$, $\mathbf{l}_Q(\cdot)$ — аннуляторы в кольце Q и через $\mathbf{r}_R(\cdot), \mathbf{l}_R(\cdot)$ — аннуляторы в кольце R. По определению аннуляторов получаем, что для любого $\varnothing \neq S \subseteq R$ выполнено $\mathbf{r}_R(S) = \mathbf{r}_Q(S) \cap R$ и $\mathbf{l}_R(S) = \mathbf{l}_Q(S) \cap R$.

1) Проверим, что R удовлетворяет условию обрыва цепей правых аннуляторов. Рассмотрим возрастающую цепь $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$, где каждый $I_k = \mathbf{r}_R(S_k)$ — правый аннулятор некоторого подмножества $S_k \subseteq R$, $k \in \mathbb{N}$. Применяя к этой цепи левые аннуляторы $\mathbf{l}_R(\cdot)$, получим $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots$, где $J_k = \mathbf{l}_R(I_k)$. К это цепи теперь применим $\mathbf{r}_Q(\cdot)$. Тогда $\mathbf{r}_Q(J_1) \subseteq \mathbf{r}_Q(J_2) \subseteq \dots$ — возрастающая цепь правых идеалов кольца Q. Однако Q полупросто, а значит, нётерово (предложение 7.7). Поэтому найдётся номер n, что для всех $k \geqslant n$ выполнено $\mathbf{r}_Q(J_n) = \mathbf{r}_Q(J_k)$. Отсюда $\mathbf{r}_Q(J_n) \cap R = \mathbf{r}_Q(J_k) \cap R$. Однако

$$\mathbf{r}_Q(J_k) \cap R = \mathbf{r}_R(J_k) = \mathbf{r}_R(\mathbf{l}_R(I_k)) = \mathbf{r}_R(\mathbf{l}_R(\mathbf{r}_R(S_k))) = \mathbf{r}_R(S_k) = I_k.$$

Значит, при $k \geqslant n$ получаем $I_k = I_n$, что и требовалось.

2) Покажем, что u.dim $R_R < \infty$. Предположим противное, тогда R_R содержит бесконечную прямую сумму ненулевых правых идеалов $\bigoplus_{k=1}^{\infty} J_k$ (следствие 19.13). Обозначим через $I_k = J_k Q$ — правый идеал кольца Q, порождённый множеством J_k. Проверим, что сумма всех I_k тоже будет прямой. Рассмотрим разложение нуля $0 = x_{k_1} + \ldots + x_{k_n}$, где $x_{k_i} \in I_{k_i} = J_{k_i} Q$. По лемме 22.5 $x_{k_i} = a_{k_i} s_{k_i}^{-1}$ для $a_{k_i} \in J_{k_i}$, $s_{k_i} \in \mathbf{S}(R)$. Применяя $n-1$ раз лемму об общем знаменателе подберём такие $t_{k_1}, \ldots, t_{k_n} \in \mathbf{S}(R)$, что $s_{k_1} t_{k_1} = \ldots = s_{k_n} t_{k_n} = s$. Тогда

$$0 = \sum x_{k_i} = \sum a_{k_i} s_{k_i}^{-1} = \sum (a_{k_i} t_{k_i})(s_{k_i} t_{k_i})^{-1} = (\sum a_{k_i} t_{k_i}) s^{-1}.$$

Умножая на s получаем, что $0 = \sum a_{k_i} t_{k_i}$. Так как сумма правых идеалов $\bigoplus_{k=1}^{\infty} J_k$ прямая, то $0 = a_{k_1} t_{k_1} = \ldots = a_{k_n} t_{k_n}$. Из регулярности t_{k_i} следует $0 = a_{k_1} = \ldots = a_{k_n}$.

Мы показали, что Q_Q содержит бесконечную прямую сумму правых идеалов $\bigoplus_{k=1}^{\infty} I_k$. Это противоречит нётеровости Q, т.к. $I_1 \subsetneq I_1 \oplus I_2 \subsetneq \ldots$ — бесконечная возрастающая цепь.

3) Осталось проверить, что R полупервично. Пусть $J \lhd R$ — двусторонний идеал и $J^2 = 0$. Рассмотрим двусторонний идеал QJQ кольца Q, порождённый множеством J. В частности, QJQ — левый идеал и подмодуль полупростого модуля ${}_Q Q$. Поэтому QJQ выделяется прямым слагаемым в ${}_Q Q$ (теорема 6.7), а значит, порождается идемпотентом $QJQ = Qe$ (предложение 11.13). В силу $e \in QJQ$ выполнено $e = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i q_i$ для $p_i, q_i \in Q$, $a_i \in J$. По определению кольца частных $q_i = c_i s_i^{-1}$, где $c_i \in R$, $s_i \in \mathbf{S}(R)$. Применяя лемму об общем знаменателе $n-1$ раз, найдём такие $t_1, \ldots, t_n$, что $s_1 t_1 = \ldots = s_n t_n = s$. Тогда

$$e = \sum p_i a_i q_i = \sum p_i a_i c_i s_i^{-1} = \sum p_i a_i (c_i t_i)(s_i t_i)^{-1} \underset{b_i = a_i c_i t_i}{=} (\sum p_i b_i) s^{-1},$$

откуда $es = \sum p_i b_i$, где $b_i \in J$. Причём элемент s регулярен в R, а значит, обратим в Q. Тогда $Qs = Q$. Умножая равенство $Qe = QJQ$ на s справа, получаем $Qes = QJ(Qs) = QJQ$.

Теперь возведём в квадрат левый идеал $QJ \leqslant {}_Q Q$

$$(QJ)^2 = QJQJ = (QJQ)J = QesJ = Q(\sum p_i b_i)J \underset{b_i \in J}{\subseteq} QJ^2 \underset{J^2=0}{=} 0.$$

Однако Q полупросто, а значит, полупервично (теорема 18.20). Отсюда в Q нет ненулевых нильпотентных левых идеалов (теорема 18.13), поэтому $QJ = 0$. Так как $1 \in Q$, то $J = 0$. Это означает, что R полупервично. □

Теорема 22.8 (Голди)**.** Для кольца R следующие условия эквивалентны:

1) R — полупервичное правое кольцо Голди.

2) R обладает классическим правым кольцом частных, которое является полупростым, т.е. изоморфно прямому произведению колец матриц над телами.

Доказательство. Объединение результатов предыдущих лемм. $\square$

Определение 22.9. Пусть Q — кольцо, его *правым порядком* P будем называть аддитивную подгруппу, замкнутую относительно умножения, такую что любой элемент $q \in Q$ может быть представлен в виде $q = ab^{-1}$, где $a, b \in P$.

Отметим, что в определении элемент b^{-1} не обязан лежать в P, т.е. b обратим в Q, но необязательно в P.

Пример 22.10.

- Если Q — правое кольцо частных для R, то R — правый порядок в кольце Q.
- Для любого $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ множество $n\mathbb{Z}$ является двусторонним порядком в $\mathbb{Q}$: любое рациональное число a/b может быть записано в виде na/nb.
- Множество $P = \left(\begin{smallmatrix} 2\mathbb{Z} & 3\mathbb{Z} \\ 6\mathbb{Z} & 3\mathbb{Z} \end{smallmatrix}\right)$ — двусторонний порядок в $M_2(\mathbb{Q})$. Действительно, для матрицы A из $M_2(\mathbb{Q})$ положим d равным наименьшему общему кратному знаменателей всех элементов, при этом скалярная матрица $6dE = \left(\begin{smallmatrix} 6d & 0 \\ 0 & 6d \end{smallmatrix}\right)$ лежит в P, тогда $A = (6dA)(6dE)^{-1}$.

Правое кольцо частных Q также может быть определено и в случае, когда исходное кольцо R не содержало единицы. Тем не менее Q, разумеется, должно обладать единицей — иначе бессмысленно говорить об обратимых элементах.

В этих терминах, если P — правый порядок в Q, то P в общем случае является кольцом без единицы, тогда Q — его правое классическое кольцо частных.

Часть предыдущих результатов переносится на кольца без единицы практически с теми же доказательствами, но в ряде случаев требуются модификации.

Теорема 22.11 (Фейт, Утуми)**.** Пусть P — правый порядок в полупростом кольце $Q = M_{n_1}(D_1) \times \ldots \times M_{n_k}(D_k)$, где D_i — тела. Тогда P содержит подмножество $M_{n_1}(F_1) \times \ldots \times M_{n_k}(F_k)$, где F_i — некоторые правые порядки в D_i.

Без доказательства. $\square$

Отметим, что в теореме Фейта — Утуми множество $M_{n_1}(F_1) \times \ldots \times M_{n_k}(F_k)$ может и не содержать единицу 1_Q кольца Q даже в ситуации $1_Q \in P$. Например, рассмотрим упомянутый в начале лекции порядок $P = \{(a, b) : a \equiv b \pmod 7\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ в полупростом кольце $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Можно показать, что для любых порядков F_1, F_2 в $\mathbb{Q}$ таких, что $F_1 \times F_2 \subseteq P$, будет заведомо выполнено $(1, 1) \notin F_1 \times F_2$. Хотя при этом очевидно $(1, 1) \in P$.

Задачи к лекции 22.

Задача 1. Пусть R — область, в которой все конечнопорождённые правые идеалы главные. Докажите, что тогда R — правая область Оре. Указание: рассмотрите порождающий элемент суммы двух правых главных идеалов.

Задача 2. Покажите, что если R — первичное правое кольцо Голди, то его классическое правое кольцо частных — простое кольцо.

Задача 3. Верно ли, что примитивное справа правое кольцо Голди является простым кольцом?