

Программа курса «Теория колец», осенний семестр 2023/2024

Лектор — доцент, к.ф.-м.н. О. В. Маркова

1. Ассоциативные кольца с единицей. Правые, левые, двусторонние идеалы. Гомоморфизмы колец. Факторкольца. Простые кольца. Идеалы полного матричного кольца. Частично упорядоченные множества. Теорема Крулля. Идеалы и необратимые элементы кольца.
2. Правые и левые модули над кольцом. Гомоморфизмы модулей. Фактормодули. Прямая сумма и прямое произведение модулей. Порождающее подмножество модуля. Наличие максимального подмодуля в конечно порождённом модуле.
3. Неприводимые (простые) модули. Свободные модули. Все модули над телом свободны. Эквивалентные определения тела.
4. Закон модулярности для подмодулей. Эквивалентные определения артиновых и нётеровых модулей. Критерий артиновости (нётеровости) в терминах подмодуля и фактормодуля. Критерий артиновости (нётеровости) конечной прямой суммы модулей.
5. Кольцо эндоморфизмов модуля. Эндоморфизмы конечной прямой суммы модулей. Эндоморфизмы регулярного модуля. Эндоморфизмы артиновых и нётеровых модулей. Лемма Фиттинга.
6. Артиновы и нётеровы кольца. Конечно порожденный модуль над артиновым (нётеровым) кольцом. Критерий нётеровости модуля в терминах порождающих подмножеств подмодулей. Критерий нётеровости кольца справа в терминах порождающих подмножеств правых идеалов.
7. Теоремы Нётер об изоморфизме модулей. Лемма Цассенхауза о бабочке. Теорема Шраера. Теорема Жордана-Гёльдера. Критерий существования композиционного ряда модуля.
8. Лемма Шура. Теорема плотности для неприводимых модулей. Примитивные кольца.
9. Полупростой (вполне приводимый) модуль. Критерий полупростоты модуля. Конечно порождённый полупростой модуль. Единственность разложения конечно порождённого полупростого модуля в прямую сумму неприводимых с точностью до изоморфизма слагаемых.
10. Классы изоморфизма неприводимых правых модулей. Цоколь и изотипные компоненты модуля. Вполне инвариантные подмодули полупростого модуля.
11. Построение изотипной компоненты по разложению полупростого модуля в прямую сумму неприводимых. Разложение кольца эндоморфизмов полупростого модуля в прямое произведение колец эндоморфизмов изотипных компонент.
12. Модуль строк элементов тела над кольцом матриц. Теорема Молина-Веддербёрна-Артина (без доказательства единственности). Классически полупростые кольца. Любой модуль над классически полупростым кольцом полупрост.
13. Классификация неприводимых модулей над классически полупростым кольцом. Доказательство единственности в теореме Молина-Веддербёрна-Артина.
14. Строение простых артиновых колец. Теорема Молина-Веддербёрна-Артина для ассоциативных алгебр над полем. Алгебра Вейля над полем нулевой характеристики.
15. Радикал Джекобсона модуля. Критерий полупростоты и конечной порождённости модуля.

16. Радикал Джекобсона кольца: эквивалентные определения и простейшие свойства. Квази-регулярные идеалы. ПолупрIMITивные кольца: определение, примеры. Фактор артинова кольца по радикалу Джекобсона — классически полупростое кольцо.
17. Произведение аддитивных подгрупп кольца. Нильпотентные идеалы и нильидеалы. Радикал Джекобсона содержит все нильидеалы. Радикал Джекобсона артинова справа кольца нильпотентен.
18. Лемма Накаямы (без предположения коммутативности кольца). Теорема Акидзуки-Хопкинса-Левицкого и её основные следствия.
19. Локальные кольца: эквивалентные определения, примеры и простейшие свойства.
20. Идемпотенты кольца, их связь с разложениями в прямую сумму.