АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА

Ю. Г. ПРОХОРОВ

1. Введение в алгебраическую геометрию

Задачи.

(1) [4, с. 25] Рассмотрим кривую $X \subset \mathbb{A}^3$, заданную параметрически:
$$x = t^3, \qquad y = t^4, \qquad z = t^5.$$
Показать, что $I(X)$ – простой идеал в $k[x, y, z]$ высоты 2, который не может быть порожден двумя элементами.

(2) Рассмотрим кривую $X \subset \mathbb{A}^3$, заданную параметрически:
$$x = t^3, \qquad y = t^{2m-3}, \qquad z = t^m,$$
где $m \equiv 1 \mod 3$. Найти систему порождающих идеала $I(X)$, состоящую из минимального числа элементов.

(3) Рассмотрим грассманиан $G = \mathrm{Gr}(k, V)$ k-мерных подпространств векторного пространства V.
   (a) показать, что G – неособое многообразие,
   (b) показать, что $T_{L,G}$ естественно изоморфно $\mathrm{Hom}(L, V/L)$,
   (c) показать, что $\mathrm{Pic}(G) \simeq \mathbb{Z}$,
   (d) вычислить канонический дивизор K_G.

(4) Рассмотрим квадратичный конус $Q \subset \mathbb{A}^3$. Доказать, что Q не является факториальным многообразием.

(5) Пусть $G \subset GL_2(k)$ – конечная подгруппа. Предположим, что фактормногообразие $\mathbb{A}^2/G$ неособо. Доказать, что тогда $\mathbb{A}^2/G \simeq \mathbb{A}^2$.

(6) Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – квадратичный конус. Вычислить $\mathrm{Pic}(X)$ и группу классов дивизоров Вейля $\mathrm{Cl}(X)$.

(7) Вычислить $\mathrm{Pic}(X)$, где $X \subset \mathbb{P}^n$ – неособая квадратичная гиперповерхность.

(8) По аналогии с проективным пространством $\subset \mathbb{P}^n$ можно определить *взвешенное проективное пространство* $\mathbb{P}(d_0, \ldots, d_n)$, $d_i \in \mathbb{N}$ следующим образом: точки $\mathbb{P}(d_0, \ldots, d_n)$ задаются набором взвешенных проективных координат $(x_0, \ldots, x_n)$,

---

Москва – 1999.

где не все x_i равны 0. Два набора координат $(x_0, \dots, x_n)$ и $(x'_0, \dots, x'_n)$ определяют одну и ту же точку $\mathbb{P}(d_0, \dots, d_n)$ если существует $\lambda \in k^*$ такое, что $x'_i = \lambda^{d_i} x_i$, $\forall i$. Доказать, что

(a) $\mathbb{P}(d_0, \dots, d_n)$ – проективное алгебраическое многообразие;
(b) если $\mathbb{P}(d_0, \dots, d_n)$ неособо, то $\mathbb{P}(d_0, \dots, d_n) \simeq \mathbb{P}^n$;
(c) $\mathbb{P}(d_0, \dots, d_n)$ изоморфно фактору $\mathbb{P}^n$ по конечной абелевой группе;
(d) рассмотрим гиперповерхность X, заданную уравнением $x_0^2 = f(x_1, \dots, x_n)$ в $\mathbb{P}(2m, 1, \dots, 1)$, где f – однородный многочлен степени $2m$. Показать, что проекция $X \to \mathbb{P}(1, \dots, 1) = \mathbb{P}^{n-1}$ является конечным морфизмом степени 2, более того, X неособо тогда и только тогда, когда неосба гиперповерхность $f = 0$ в $\mathbb{P}^{n-1}$. Вывести отсюда существование гиперэллиптических кривых любого рода.

(9) Показать, что $\mathbb{P}^n/\mathbb{Z}_2$ всегда является проективным многообразием. Построить проективное вложение.
(10) Доказать, что многообразие $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ не является аффинным.
(11) Доказать, что любой автоморфизм $\mathbb{P}^n$ является проективным.
(12) Вычислить кольцо когомологий комплексного тора $\mathbb{C}^n/\Lambda$.
(13) Пусть X – проективное алгебраическое многообразие и пусть H – обильный эффективный дивизор на X. Показать, что многообразие $X \setminus H$ аффинно.
(14) Пусть $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$ – неособая квадратичная гиперповерхность. Доказать, что Q рациональна, но не изоморфна $\mathbb{P}^n$ при $n \geq 2$.
(15) Доказать, что поверхность $F \subset \mathbb{P}^3$ степени $d \geq 2$ неизоморфна $\mathbb{P}^2$.
(16) Неособая гиперповерхность $V \subset \mathbb{P}^n$ изоморфна произведению многообразий $V_1 \times V_2$ лишь в одном случае: $V = V_2 \subset \mathbb{P}^3$. Доказать, не используя теорему Лефшеца о гиперплоских сечениях.
(17) Рассмотрим произведение $C_1 \times C_2$ двух неособых кривых. Вычислить кольцо когомологий. Показать, что $\mathrm{Pic}(C_1 \times C_2)$ может не быть изоморфен $\mathrm{Pic}(C_1) \times \mathrm{Pic}(C_2)$.

Список литературы

[1] Шафаревич И.Р. *Основы алгебраической геометрии,* Т. **1-2**, М. Наука (1988)

[2] Годеман Р. *Алгебраическая топология и теория пучков,* М. ИЛ (1961)

[3] Атья М., Макдональд И. *Введение в коммутативную алгебру,* М. Мир (1972)

[4] Хартсхорн Р. *Алгебраическая геометрия,* М. Мир (1981)

[5] Гриффитс Ф., Харрис Дж. *Принципы алгебраческой геометрии,* Т. **1-2**, М. Мир (1982)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА, Механико-математический факультет