Рациональные поверхности

Ю. Г. Прохоров

very preliminary version

Tue Oct 13 11:29:32 MSD 2009

Содержание

В этих записках мы следуем работам [1], [2], [3], [4], [5], [6].

Пусть X – гладкая проективная поверхность над полем $\Bbbk$. Поверхность X называется *рациональной*, если поверхность $\bar{X} = X \otimes \bar{\Bbbk}$ бирационально эквивалентна $\mathbb{P}^2$ над $\bar{\Bbbk}$, где $\bar{\Bbbk}$ – алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$.

1. G-поверхности

Алгебраическую схему V над полем $\Bbbk$ вместе с группой G, действующей на $V \otimes \bar{\Bbbk}$, где $\bar{\Bbbk}$ – алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$, мы будем называть, *G – схемой*. В дальнейшем мы будем рассматривать G-схемы размерностей 0, 1, 2 следующих двух типов.

(i) **Алгебраический случай.** Поле $\Bbbk$ совершенно, $G = \mathrm{Gal}(\bar{\Bbbk}/\Bbbk)$ – группа Галуа, действующая на $V \otimes \Bbbk$ через второй множитель. Действие G на V тривиально.

(ii) **Геометрический случай.** Поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. G – произвольная конечная группа. Действие G на V задается гомоморфизмом $G \to \mathrm{Aut}(V)$.

Пример 1.1. Пусть поле $\Bbbk$ несепарабельно (характеристики $p > 0$) и пусть $\theta \in \bar{\Bbbk} \setminus \Bbbk$ – чисто несепарабельный элемент такой, что $\theta^p \in \Bbbk$. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\Bbbk(\theta)/\Bbbk)$ тривиальна. Поэтому определенная над $\Bbbk(\theta)$ гиперповерхность $X \subset \mathbb{A}^n$, заданная уравнением $x_2 = \theta x_1$ инвариантна относительно $\mathrm{Aut}(\Bbbk(\theta)/\Bbbk)$.

Каждая подсхема $V' \subset V$ в алгебраическом случае и каждая G-инвариантная – в геометрическом случае естественным образом снабжены структурой G-схем. G-схема V называется G-неприводимой, если G действует транзитивно на множестве неприводимых компонент V.

Теорема 1.2. *Пусть X – неособое проективное многообразие над $\Bbbk$. Если X имеет $\Bbbk$-точку P, то* $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\bar{X})^G$.

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{Pic}(X) \subset \mathrm{Pic}(\bar{X})^G$. Рассмотрим некоторый класс $\mathscr{C} \in \mathrm{Pic}(\bar{X})^G$. Существует некоторое расширение Галуа $\Bbbk'/\Bbbk$, для которого на $X' := X \otimes \Bbbk'$ класс $\mathscr{C}$ реализуется как класс некоторого дивизора D' на X'. Ясно, что мы можем выбрать D', не проходящим через P. Пусть $\Gamma := \mathrm{Gal}(\Bbbk'/\Bbbk)$. Для каждого элемента $\gamma \in \Gamma$ класс дивизора ${}^{\gamma}D'$ совпадает с $\mathscr{C}$. Следовательно, существует рациональная функция $\phi_\gamma \in \Bbbk'(X')$ такая, что ${}^{\gamma}D' - D' = \mathrm{div}(\phi_\gamma)$. Таким образом, все функции ϕ_γ регулярны и обратимы в точке P. Заменяя ϕ_γ на $\phi_\gamma/\phi_\gamma(P)$, добьемся того, что $\phi_\gamma(P) = 1$. Поскольку

$$ {}^{\gamma_1\gamma_2}D' - D' = {}^{\gamma_1}({}^{\gamma_2}D' - D') + {}^{\gamma_1}D' - D', $$

то
$$\operatorname{div}(\phi_{\gamma_1\gamma_2}) = {}^{\gamma_1}\operatorname{div}(\phi_{\gamma_2}) + \operatorname{div}(\phi_{\gamma_1}).$$
Отсюда
$$\phi_{\gamma_1\gamma_2} = {}^{\gamma_1}(\phi_{\gamma_2}) \cdot \phi_{\gamma_1}.$$
для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Таким образом, набор $\{\phi_\gamma\}$ определяет коцикл группы когомологий Галуа $H^1(\Gamma, \Bbbk'(X')^*)$. По теореме Гильберта 90 имеем $H^1(\Gamma, \Bbbk'(X')^*) = 0$ и поэтому коцикл $\{\phi_\gamma\}$ является кограницей, т.е. существует функция $\psi \in \Bbbk'(X')^*$ такая, что $\phi_\gamma = {}^\gamma\psi - \psi$. Иначе говоря, ${}^\gamma D' - D' = \operatorname{div}({}^\gamma\psi - \psi)$. Полагая $D = D' - \operatorname{div}({}^\gamma\psi)$, получим, что ${}^\gamma D = D$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Таким образом, дивизор D определен над $\Bbbk$. □

Замечание 1.3. Теорема 1.2 допускает следующее обобщение. Рассмотрим спектральную последовательность Лере для структурного морфизма $\pi : X \to \operatorname{Spec}\Bbbk$:
$$H^p_{\mathrm{et}}(\operatorname{Spec}\Bbbk, R^q\pi_*\mathscr{O}^*_X) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathrm{et}}(X, \mathscr{O}^*_X).$$
Она дает нам точную последовательность
$$\begin{aligned} 0 \to H^1_{\mathrm{et}}(\operatorname{Spec}\Bbbk, \pi_*\mathscr{O}^*_X) &\to H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathscr{O}^*_X) \to \\ &\to H^0(\operatorname{Spec}\Bbbk, R^1\pi_*\mathscr{O}^*_X) \to H^2_{\mathrm{et}}(\operatorname{Spec}\Bbbk, \pi_*\mathscr{O}^*_X) \to H^2_{\mathrm{et}}(X, \mathscr{O}^*_X). \end{aligned}$$
Учитывая, что
$$\begin{aligned} &H^1_{\mathrm{et}}(\operatorname{Spec}\Bbbk, \pi_*\mathscr{O}^*_X) = H^1(\bar\Bbbk/\Bbbk, H^0(\bar X, \mathscr{O}^*_{\bar X})) = H^1(\bar\Bbbk/\Bbbk, \Bbbk^*) = 0, \\ &H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathscr{O}^*_X) = H^1(X, \mathscr{O}^*_X) = \operatorname{Pic}(X), \\ &H^0(\operatorname{Spec}\Bbbk, R^1\pi_*\mathscr{O}^*_X) = H^0(\operatorname{Spec}\Bbbk, H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathscr{O}^*_X)) = \operatorname{Pic}(\bar X)^G \\ &H^2_{\mathrm{et}}(\operatorname{Spec}\Bbbk, \pi_*\mathscr{O}^*_X) = H^2(\bar\Bbbk/\Bbbk, H^0(\bar X, \mathscr{O}^*_{\bar X})) = \operatorname{Br}\Bbbk, \\ &H^2_{\mathrm{et}}(X, \mathscr{O}^*_X) = \operatorname{Br} X, \end{aligned}$$
(см. [7]) получим
$$0 \to \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(\bar X)^G \to \operatorname{Br}\Bbbk \to \operatorname{Br} X.$$

Определение 1.4. G-поверхность X называется *G-минимальной*, если любой бирациональный морфизм $X \to X'$ является изоморфизмом.

2. Конус кривых

Пусть X – неособое проективное многообразие. Говорят, что циклы $Z, Z' \in Z_1(X)$ *численно эквивалентны* (это обозначается $Z \equiv Z'$), если $L \cdot Z = L \cdot Z'$ для всех $L \in \operatorname{Pic}(X)$; по двойственности определена численная эквивалентность на $\operatorname{Pic}(X)$. Билинейная форма $\mathrm{Pic}(X) \times Z_1(X) \to \mathbb{Z}$ – индуцирует невырожденную билинейную форму

$$\mathrm{N}^1(X) \times \mathrm{N}_1(X) \to \mathbb{R},$$

где $\mathrm{N}^1(X) := (\mathrm{Pic}(X)/\equiv) \otimes \mathbb{R}$ и $\mathrm{N}_1(X) := (Z_1(X)/\equiv) \otimes \mathbb{R}$. Согласно теореме Нерона-Севери пространство $\mathrm{N}^1(X)$ конечномерно. Его размерность называется *числом Пикара* многообразия X.

В пространстве $\mathrm{N}_1(X)$ рассмотрим выпуклый конус $\mathrm{NE}(X)$, порожденный всеми эффективными 1-циклами. Обозначим через $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ его замыкание. Таким образом, $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ – замкнутый выпуклый конус в конечномерном вещественном пространстве $\mathrm{N}_1(X)$. Он называется *конусом Мори*. Более того, $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ порождает $\mathrm{N}_1(X)$. Отметим однако, что элементы $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ необязательно представляются эффективными 1-циклами и необязательно имеют рациональные коэффициенты. Каждый дивизор $\mathbb{Q}$-Картье определяет линейную функцию на $\mathrm{N}_1(X)$.

Теорема 2.1 (критерий обильности Клеймана). *Дивизор Картье H обилен тогда и только тогда, когда он определяет строго положительную функцию на $\overline{\mathrm{NE}}(X) \setminus \{0\}$.*

Следствие 2.2. *Конус $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ не содержит прямых.*

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый конус, не содержащий прямых. Луч $R \subset K$ называется *экстремальным*, если из того, что $z_1 + z_2 \in R$, для некоторых элементов $z_1, z_2 \in K$, следует, что $z_1, z_2 \in R$. Для линейной функции f на $\mathbb{R}^n$ обозначим через H_f гиперплоскость $\{f = 0\}$, а через Π_f – полупространство $\{f \geq 0\}$.

Лемма 2.3. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклый конус, не содержащий прямых.*

(i) *Конус K порождается экстремальными лучами, т.е. для любого элемента $z \in K$ существуют экстремальные лучи $R_1, \dots, R_m$ и элементы $z_i \in R_i$ такие, что $z = z_1 + \dots + z_m$.*

(ii) *Луч $R \subset K$ является экстремальным тогда и только тогда, когда существует линейная функция f такая, что f неотрицательна на K, а луч R содержится и экстремален в конусе $K \cap H_f$.*

(iii) *Если луч $R \subset K$ экстремален, то существует линейная функция f такая, что $H_f \cap K = R$.*

Доказательство. Ясно, что мы можем считать, что $n > 1$. Если $R \subset K \cap H_f$ – экстремальный луч конуса K, то, очевидно он является экстремальным лучом меньшего конуса $K \cap H_f$. Наоборот, пусть $R \subset K \cap H_f$ – экстремальный луч конуса $K \cap H_f$ и пусть

$z_1 + z_2 \in R$, где $z_i \in K$. Так как $f(z_1 + z_2) = 0$ и $f(z_i) \geq 0$, то $f(z_i) = 0$. Следовательно, $z_i \in R$ и поэтому R – экстремальный луч конуса K.

Конус K является пересечением полупространств Π_{f_α} для некоторого набора линейных функций f_α, $\alpha \in I$. Пусть $R \subset K$ – экстремальный луч и пусть $z \in R$ – ненулевой элемент. Мы утверждаем, что систему функций f_α можно выбрать так, что $f_o(z) = o$ для некоторого $o \in I$. Действительно, иначе мы можем нормировать функции f_α так, что $f_\alpha(z) = 1$ для всех α. Пусть U_ϵ – ϵ-окрестность точки z. Если все f_α строго положительны на U_ϵ, то U_ϵ содержится в K, а это противоречит экстремальности R. Таким образом, для любого $\epsilon > 0$ существуют $z_\epsilon \in U_\epsilon$ и f_ϵ такие, что $f_\epsilon(z_\epsilon) \leq 0$. Пусть $f_o = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon$. Тогда $f_o(z) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(z_\epsilon) \leq 0$. С другой стороны, $f_o(z) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(z) = 1$. Противоречие.

□

Предложение 2.4. *Пусть X – нормальная проективная поверхность.*

(i) *Пусть $z \in \mathrm{N}_1(X)$ – ненулевой элемент. Если $z^2 > 0$ и $z \cdot H > 0$ для некоторого обильного дивизора H, то z принадлежит внутренности конуса $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.*

(ii) *Пусть $C \subset X$ – неприводимая кривая. Если $C^2 \leq 0$, то класс $[C]$ лежит на границе $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Если $C^2 < 0$, то $[C]$ порождает экстремальный луч.*

(iii) *Пусть $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ – экстремальный луч. Следующие условия эквивалентны*:

  (a) $R^2 < 0$,

  (b) $R \cdot C < 0$ *для некоторой кривой C,*

  (c) $R^2 < 0$ *и R порожден классом (неприводимой) кривой.*

Доказательство. (i) Условия $z^2 > 0$ и $z \cdot H > 0$ открыты, поэтому они выполнены в некоторой окрестности $U_{\varepsilon,z} \subset \mathrm{N}_1(X)$. Возьмем рациональный элемент $z' \in U_{\varepsilon,z}$ (т.е. $z' = [Z']$, где Z' – элемент с рациональными коэффициентами). Тогда nZ' – целый дивизор Картье для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Согласно нашим условиям имеем $Z'^2 > 0$ и $H \cdot Z' > 0$. По теореме Римана-Роха для $m \gg 0$ имеем $h^0(\mathscr{O}_X(mnZ')) > 0$. Таким образом, класс z' представляется эффективным циклом. Это доказывает утверждение.

(ii) Каждый численно эффективный дивизор, не являющийся обильным, высекает на выпуклом конусе $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ некоторую грань F. Если $C^2 = 0$, то поскольку C – неприводимая кривая, то ее класс $[C]$ численно эффективен и лежит в грани F. Пусть $C^2 < 0$.

Рассмотрим конус $\mathcal{K} := \{z \mid z \cdot C \geq 0\} \cap \overline{\mathrm{NE}}(X)$. Этот конус содержит классы всех неприводимых кривых $L \neq C$. Поэтому $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ порождается $\mathcal{K}$ и $\mathbb{R}_+[C]$. Это доказывает, что $\mathbb{R}_+[C]$ – экстремальный луч.

(iii) Возьмем ненулевой элемент $z \in R$ и рассмотрим последовательность эффективных циклов $Z^{(i)}$ такую, что $\lim[Z^{(i)}] = z$.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Пусть $R^2 < 0$. Запишем $Z^{(i)} = \sum_j a_{ij} C_j$, где C_j – неприводимые кривые, а $a_{ij} \geq 0$. Так как $0 > z^2 = \lim z \cdot Z^{(i)}$, то существует неприводимая кривая $C = C_j$ такая, что $C \cdot Z < 0$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Пусть $R \cdot C < 0$. Мы можем считать кривую C неприводимой. Для $i \gg 0$ имеем $C \cdot Z^{(i)} < 0$. Поэтому $C^2 < 0$. Запишем $Z^{(i)} = \alpha_i C + Z'^{(i)}$, где $\alpha_i \geq 0$, цикл $Z'^{(i)}$ эффективен и C не является компонентой $Z'^{(i)}$. Для любого обильного дивизора H имеем $Z^{(i)} \cdot H \leq \mathrm{Const}$ и $Z^{(i)} \cdot H \geq 0$. Поэтому все α_i ограничены сверху. Переходя к подпоследовательности можно считать, что α_i сходится: $\lim \alpha_i = \alpha$. Положим $z' := z - \alpha[C]$. Тогда элемент $z' = \lim Z'^{(i)}$ принадлежит $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Так как $C \cdot Z'^{(i)} \geq 0$, то $C \cdot z' \geq 0$. Отсюда $\alpha > 0$. По определению экстремального луча $[C] \in R$. □

Следствие 2.5. *Если существует экстремальный луч R такой, что $R^2 > 0$, то $\rho(X) = 1$.*

Пример 2.6. Пусть X – неособая поверхность и пусть R – экстремальный луч на X такой, что $K_X \cdot R < 0$. Возможны следующие случаи:

(i) $R^2 > 0$, тогда $\rho(X) = 1$, дивизор $-K_X$ обилен, следовательно, $X \simeq \mathbb{P}^2$;

(ii) $R^2 < 0$, тогда $R = \mathbb{R}_+[C]$, где C – неприводимая кривая. Так как $C^2 < 0$ и $C \cdot K_X < 0$, то C – (-1)-кривая;

(iii) $R^2 = 0$, тогда X имеет структуру линейчатой поверхности и R порождается ее слоями (т.е. X – проективизация векторного расслоения ранга 2 на неособой кривой Γ).

Пункты (i) и (ii) очевидным образом следуют из предложения 2.4. Докажем последнее утверждение. Предположим, что $\rho(X) \geq 3$. Пусть $f\colon X \to X'$ – последовательность стягиваний (-1)-кривых, пусть $\sum E_i$ – исключительный дивизор и пусть $R' := f_*R$. Легко проверить, что R' – экстремальный луч в $\overline{\mathrm{NE}}(X')$, $K_{X'} \cdot R' \leq K_X \cdot R < 0$ и $R'^2 \leq R^2 \leq 0$. Поэтому $K_{X'}$ не может быть численно эффективен и мы можем считать, что X' – линейчатая поверхность над неособой кривой Γ. Тогда $\rho(X') = 2$ и, следовательно, $R'^2 = 0$. Из последнего условия легко выводится, что R' порождается целым дивизором D', а из теоремы Римана-Роха следует, что D' может быть взят эффективным. Пусть D – 1-цикл на X такой, что $[D] \in R$ и $f_*D = D'$. Запишем $D = f^*D' - \sum \alpha_i E_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R}$. Так как $D^2 = D'^2 = 0$, то $\sum \alpha_i E_i = 0$ и $D = f^*D'$ – эффективный целый дивизор. Снова по теореме Римана-Роха имеем $\dim |D| > 0$. Поскольку $D \cdot \sum E_i = 0$, то мы имеем разложение $D \sim D_0 + \sum \beta_i E_i$, где дивизор D_0 эффективен, $\beta_i \geq 0$ и не все β_i равны нулю. Последнее противоречит экстремальности $R = \mathbb{R}_+[D]$. Таким образом, $\rho(X) = 2$. Как и выше, из условия $R^2 = 0$ выводится, что R порождается целым дивизором D и линейная система $|D|$ задает морфизм $X \to \mathbb{P}^n$, который пропускается через морфизм со связными слоями на неособую кривую. За остальными утверждениями мы отсылаем читателя к [8, гл. 5, §2].

Теорема 2.7 (теорема о конусе). *Пусть X – проективная поверхность и пусть H – численно эффективный обильный дивизор на X. Для любого $\varepsilon > 0$ существует не более конечного числа экстремальных лучей $R_i \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ таких, что $(K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0$. Каждый луч R_i порождается классом неприводимой кривой C_i. Конус $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ порождается конусом $\overline{\mathrm{NE}}(X) \cap \{z \mid (K_X + \varepsilon H) \cdot z \geq 0\}$ и лучами R_i.*

Теорема 2.8 (теорема о стягивании). *Пусть $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ – экстремальный луч такой, что $R^2 = 0$ и $K_X \cdot R < 0$. Тогда существует стягивание $f\colon X \to Z$ луча R. Более того, $\rho(X) = 2$, любой приведенный слой $f^{-1}(z)_{\mathrm{red}}$ – неособая рациональная кривая и X имеет лишь рациональные особенности.*

Доказательство. По теореме о конусе $R = \mathbb{R}_+[D]$ для некоторой (неприводимой) кривой D. По теореме Римана-Роха имеем $h^0(nD) > 0$ при $n \gg 0$. Возьмем минимальное n такое, что $\dim |nD| > 0$. Ясно, что базисное множество линейной системы $|nD|$ содержится в кривой D. Если D – неподвижная компонента $|nD|$, то $\dim |(n-1)D| = \dim |nD| > 0$. Это противоречит нашему выбору n. Поэтому $|nD|$ не имеет неподвижных компонент, а так как $D^2 = 0$, то $|nD|$ не имеет и базисных точек. Таким образом, $|nD|$ определяет морфизм $X \to W \subset \mathbb{P}^N$. Рассмотрим факторизацию Штейна $X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} W$. Здесь многообразие Z нормально, а морфизм f имеет связные слои. Так как $D^2 = 0$, то Z – (неособая) кривая. По формуле для рода для общего слоя F имеем $p_a(F) = 0$, т.е. F – неособая рациональная кривая (теорема Тзена). Так как слои морфизма f имеют чистую коразмерность 1, то он – плоский и поэтому все схемные слои имеют арифметический род 0. Гомоморфизм-ограничение $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(F)$ является сюръективным, а его ядро порождается слоями и компонентами слоев. Пусть $f^{-1}(z_0)$ – любой схемный слой. Запишем $f^{-1}(z_0) = \sum m_i C_i$, где C_i

– неприводимые кривые, а $m_i \geq 0$. Класс $f^{-1}(z_0)$ пропорционален классу D и по определению экстремального луча, $[C_i] \in R$. Следовательно, $C_i \cdot C_j = 0$ для всех i, j. Так как слой $f^{-1}(z_0)$ связен, то он должен быть неприводимым: $f^{-1}(z_0) = m_1 C_1$. Поэтому $\rho(X) = 2$. Далее, по формуле для рода

$$2p_a(C_1) - 2 = (K_X + C_1) \cdot C_1 = K_X \cdot C_1 < 0.$$

Таким образом, $p_a(C_1) = 0$ и $C_1 \simeq \mathbb{P}^1$. Доказательсво последнего утверждения оставляется читателю. $\square$

Теперь рассмотрим подпространство $\mathrm{N}_1(X)^G \subset \mathrm{N}_1(X)$ состоящее из G-инвариантных векторов. Обозначим также $\overline{\mathrm{NE}}(X)^G = \overline{\mathrm{NE}}(X) \cap \mathrm{N}_1(X)^G$. Имеет место линейное отображение

$$\mathrm{Tr} : \mathrm{N}_1(X) \longrightarrow \mathrm{N}_1(X)^G, \quad z \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(z).$$

Это отображение является проектором: композиция $\mathrm{Tr} \circ \iota$, где $\iota : \mathrm{N}_1(X)^G \hookrightarrow \mathrm{N}_1(X)$ – естественное вложение, является тождественным отображением. Ясно также, что Tr сохраняет эффективность циклов и поэтому отображает $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ на $\overline{\mathrm{NE}}(X)^G$.

Утверждение 2.9. *Если $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)^G$ – экстремальный луч, то существует экстремальный луч $Q \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ такой, что $R = \mathrm{Tr}(Q)$.*

Доказательство. Возьмем ненулевой элемент $z \in R$. Так как $z \in \overline{\mathrm{NE}}(X)$, то по теореме о конусе имеет место представление $z = \sum z_i + z'$, где элемент z_i принадлежит экстремальному лучу $Q_i \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$, а элемент z' содержится в конусе $\overline{\mathrm{NE}}(X) \cap \{z \mid K_X \cdot z \leq 0\}$. Тогда $z = \mathrm{Tr}(z) = \sum \mathrm{Tr}(z_i) + \mathrm{Tr}(z')$, где $\mathrm{Tr}(z_i)$, $\mathrm{Tr}(z') \in \overline{\mathrm{NE}}(X)^G$. По определению экстремального луча $\mathrm{Tr}(z_i), \mathrm{Tr}(z') \in R$. Следовательно, $\mathrm{Tr}(z_i) \in R$. $\square$

Теорема 2.10 (G-инвариантная теорема о конусе)**.** *Пусть X – G-поверхность и пусть H – численно эффективный обильный G-инвариантный дивизор на X. Для любого $\varepsilon > 0$ существует не более конечного числа экстремальных лучей $R_i \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)^G$ таких, что $(K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0$. Каждый луч R_i порождается классом G-неприводимой кривой C_i. Конус $\overline{\mathrm{NE}}(X)^G$ порождается конусом $\overline{\mathrm{NE}}(X)^G \cap \{z \mid (K_X + \varepsilon H) \cdot z \geq 0\}$ и лучами R_i.*

Доказательство. Пусть R_i – экстремальные лучи конуса $\overline{\mathrm{NE}}(X)^G$ такие, что $(K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0$. Согласно 2.9 имеем $R_i = \mathrm{Tr}(Q_i)$, для некоторого экстремального луча Q_i конуса $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Ясно, что

$(K_X + \varepsilon H) \cdot Q_i = (K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0$. Поэтому число лучей R_i конечно. Остальное читателю предлагается доказать самостоятельно. $\square$

Теорема 2.11 (G-инвариантная теорема о стягивании)**.** *Пусть X – G-поверхность и пусть $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)^G$ – экстремальный луч такой, что $K_X \cdot R < 0$. Тогда существует G-эквивариантное стягивание $f\colon X \to Z$ луча R. Имеют место следующие случаи:*

(i) *$R^2 > 0$. Тогда Z – точка, $\rho(X)^G = 1$ и X – поверхность дель Пеццо.*

(ii) *$R^2 = 0$. Тогда Z – кривая, $\rho(X) = 2$, и f – расслоение на коники.*

(iii) *$R^2 < 0$. Тогда f – бирациональный морфизм, исключительный дивизор состоит из несвязного объединения (-1)-кривых.*

Доказательство. $\square$

Следствие 2.12. *Любая G-минимальная гладкая проективная рациональная поверхность X изоморфна поверхности из следующих двух семейств:*

(i) *поверхности дель Пеццо с $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$;*

(ii) *поверхности, имеющей структуру G-эквивариантного расслоения на коники $f\colon X \to Z$ над кривой рода 0.*

Доказательство. $\square$

3. Поверхности дель Пеццо

Поверхность X называется *поверхностью дель Пеццо*, если ее антиканонический класс $-K_X$ обилен.

Теорема 3.1. *Пусть X – поверхность дель Пеццо над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$.*

(i) $K_X^2 + \rho(X) = 10$.

(ii) $\dim |-K_X| = K_X^2$.

(iii) *Общий элемент линейной системы $|-K_X|$ – неособая эллиптическая кривая.*

(iv) *Линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек при $K_X^2 \geq 2$ и является очень обильной при $K_X^2 \geq 3$. При $K_X^2 = 1$ линейная система имеет единственную базисную точку.*

Теорема 3.2. *Пусть X – поверхность дель Пеццо над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$.*

(i) *Если* $K_X^2 = 1$, *то* X *изоморфна гиперповерхности степени* 6 *во взвешенном проективном пространстве* $\mathbb{P}(1,1,2,3)$.
(ii) *Если* $K_X^2 = 2$, *то* X *изоморфна гиперповерхности степени* 4 *во взвешенном проективном пространстве* $\mathbb{P}(1,1,1,3)$.
(iii) *Если* $K_X^2 = 3$, *то* X *изоморфна кубической поверхности* $X_3 \subset \mathbb{P}^3$.
(iv) *Если* $K_X^2 = 4$, *то* X *изоморфна пересечению двух квадрик* $X_4 \subset \mathbb{P}^4$.
(v) *Если* $K_X^2 = 5$, *то* X *изоморфна сечению грассманиана* $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ *подпространством коразмерности* 4.
(vi) *Если* $K_X^2 = 6$, *то* X *изоморфна дивизору тристепени* $(1,1,1)$ *в* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. *Поверхность* X *изоморфна также пересечению двух дивизоров бистепени* $(1,1)$ *в* $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.
(vii) *Если* $K_X^2 = 7$, *то* X *изоморфна раздутию двух различных точек на* $\mathbb{P}^2$.
(viii) *Если* $K_X^2 = 8$, *то или* $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *или* X *изоморфна раздутию точки на* $\mathbb{P}^2$.
(ix) *Если* $K_X^2 = 9$, *то* $X \simeq \mathbb{P}^2$.

Лемма 3.3. *Пусть* Y *– поверхность дель Пеццо степени* 2 *и пусть* $\gamma : Y \to Y$ *– инволюция Гейзера. Тогда* $\mathrm{Pic}(Y)^{\langle\gamma\rangle} = \mathbb{Z} \cdot K_Y$. *Действие* γ^* *на* $\mathrm{Pic}(Y)$ *определяется следующими соотношениями:*

$$\gamma^*(-K_Y) = -K_Y,$$

$$L + \gamma^* L \sim -K_Y$$

для любой прямой $L \subset Y$.

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{Pic}(Y)^{\langle\gamma\rangle} \supset \mathbb{Z} \cdot K_Y$. С другой стороны,

$$\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(Y)^{\langle\beta\rangle} = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) = 1.$$

Далее, класс дивизора $L + \beta^* L$ инвариантен относительно инволюции γ. Поэтому класс $L + \gamma^* L$ пропорционален $-K_Y$. Таким образом, $L + \gamma^* L \sim -aK_Y$. С другой стороны,

$$2 = -K_Y \cdot (L + \beta^* L) \sim aK_Y^2 = 2a.$$

□

Лемма 3.4. *Пусть* Y *– поверхность дель Пеццо степени* 1 *и пусть* $\beta : Y \to Y$ *– инволюция Бертини. Тогда* $\mathrm{Pic}(Y)^{\langle\beta\rangle} = \mathbb{Z} \cdot K_Y$. *Действие* β^* *на* $\mathrm{Pic}(Y)$ *определяется следующими соотношениями:*

$$\beta^*(-K_Y) = -K_Y,$$

$$L + \beta^* L \sim -2K_Y$$

для любой прямой $L \subset Y$.

Доказательство. Ясно, что $\operatorname{Pic}(Y)^{\langle\beta\rangle} \supset \mathbb{Z}\cdot K_Y$. С другой стороны, $\operatorname{Pic}(Q') \simeq \mathbb{Z}$. Поэтому

$$\operatorname{rk}\operatorname{Pic}(Y)^{\langle\beta\rangle} = \operatorname{rk}\operatorname{Cl}(Y)^{\langle\beta\rangle} = \operatorname{rk}\operatorname{Cl}(Q') = \operatorname{rk}\operatorname{Pic}(Q') = 1.$$

Далее, класс дивизора $L + \beta^* L$ инвариантен относительно инволюции β. Поэтому класс $L + \beta^* L$ пропорционален $-K_Y$. Таким образом, $L + \beta^* L \sim -aK_Y$. С другой стороны,

$$2 = -K_Y \cdot (L + \beta^* L) \sim aK_Y^2 = a.$$

□

Обозначим через $N_{\mathbb{R}} \subset \operatorname{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$ ортогональное дополнение к K_X и пусть $N = N_{\mathbb{R}} \cap \operatorname{Pic}(X)$. По теореме Ходжа об индексе ограничение формы пересечения на $N_{\mathbb{R}}$ отрицательно определено. Пусть далее $\Delta = \{\alpha \in N \mid \alpha^2 = -2\}$. Тогда Δ система корней типа $A_1 \times A_2$, A_4, D_5, E_6, E_7, E_8 для $n = 3, \ldots, 8$, соответственно.

Задачи. (1) Задайте поверхность дель Пеццо X степени 6 уравнением в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и найдите все прямые на X.

(2) Докажите, что поверхность дель Пеццо степени 5 является дивизором бистепени $(1, 2)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$.

(3) Докажите, что поверхность дель Пеццо степени 5 является гиперповерхностью степени 6 в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$.

(4) Приведите примеры поверхностей дель Пеццо степени 1, 2, 3 и 4, имеющих ровно одну особую точку типа E_8, E_7, E_6 и D_5, соответственно. Какой смысл имеет система корней в этом случае?

(5) Могут ли все прямые на вещественной кубической поверхности быть вещественными?

(6) Пусть X – гладкий дивизор бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Докажите, что X – поверхность дель Пеццо. Каков ее тип?

(7) Приведите примеры кубических G-поверхностей с различным инвариантным числом Пикара (арифметические и геометрические случаи).

(8) Докажите, что на поверхности дель Пеццо степени $2 \le d \le 7$ любой эффективный дивизор является целочисленной линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами классов прямых. Когда это нарушается на поверхности дель Пеццо степени 1?

(9) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 1. Покажите, что имеется естественное взаимно однозначное соответствие между корнями в $\operatorname{Pic}(X)$ и прямыми на X.

(10) Покажите, что любую поверхность дель Пеццо $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ степени 4 можно задать уравнениями

$$x_0^2 + \cdots + x_4^2 = \lambda_0 x_0^2 + \cdots + \lambda_4 x_4^2 = 0$$

для некоторых $\lambda_i \in \Bbbk$.

(11) Пусть $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ – различные квадрики. Докажите, что поверхность $Q_1 \cap Q_2$ неособа (и является поверхностью дель Пеццо степени 4) тогда и только тогда, когда пучок $\langle Q_1,\ Q_2\rangle$ содержит ровно 5 вырожденных квадрик.

4. Расслоения на коники

Пусть X – проективная, неособая G-поверхность и пусть $f : X \to Z$ – G-морфизм на неособую проективную кривую Z. Говорят, что $f : X \to Z$ – (стандартное) *расслоение на коники*, если общий слой X_η – геометрически неприводим, приведен и имеет род нуль над полем вычетов $\Bbbk(\eta)$ общей точки $\eta \in Z$.

Заметим, что если каждый слой к тому же геометрически неприводим, то, очевидно, $f : X \to Z$ – линейчатая поверхность.

Замечание 4.1. Пусть $f : X \to Z$ – G-расслоение на коники, $\bar{z} \in Z \otimes \Bbbk$ – геометрическая точка. Если геометрический слой $X_{\bar{z}}$ вырожден, то он имеет вид $X_{\bar{z}} = E_1 + E_2$, где $E_i \subset Z \otimes \Bbbk$ – неприводимые (-1)-кривые и $E_1 \cdot E_2 = 1$.

Теорема 4.2. *Пусть $f : X \to Z$ – расслоение на коники.*

(i) *Пучок $\mathscr{E} := f_* \mathscr{O}_X(-K_X)$ локально свободен и имеет ранг 3.*

(ii) *Естественное отображение $X \to \mathbb{P}_Z(\mathscr{E})$ является вложением и отображает каждый слой X_ξ на приведенную конику в $\mathbb{P}^2_{\Bbbk(\xi)}$.*

Доказательство. Морфизм f является плоским. Для любого слоя X_ξ имеем $\omega_{X_\xi} = \omega_X \otimes \mathscr{O}_{X_\xi}$. Отсюда

$$H^1(X_\xi, \mathscr{O}_{X_\xi}(-K_X)) = H^1(X_\xi, \omega_{X_\xi}^\vee) = H^0(X_\xi, \omega_{X_\xi}^{\otimes 2}) = 0.$$

По теореме Римана-Роха на X_ξ имеем

$$\dim H^0(X_\xi, \mathscr{O}_{X_\xi}(-K_X)) = 3.$$

По теореме Грауэрта (см., например, [8, гл. 3, §12, следствие 12.9]) пучок $f_* \mathscr{O}_X(-K_X)$ локально свободен и имеет ранг 3. $\square$

Предложение 4.3. *Пусть $f : X \to Z$ – G-расслоение на коники и пусть $K_X^2 < 8$. Тогда группа $\operatorname{Pic}(\bar{X})^G$ порождена K_X и классом геометрического слоя $X_{\bar{z}}$.*

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathrm{Pic}(\bar{X})^G$. Так как $K_X \cdot_{\bar{z}} = -2$, то для некоторого $a \in \mathbb{Z}$ мы можем считать, что $(\xi + aK_X) \cdot X_{\bar{z}} = 0$ или 1. Пусть C – компонента вырожденного слоя $X_{\bar{z}}$. Так как расслоение на коники G-минимально, то для некоторого элемента $\delta \in G$ имеем $C \cap {}^{\delta}C \neq \emptyset$ и $C \neq {}^{\delta}C$. Тогда $C + {}^{\delta}C$ – геометрический слой. Следовательно,

Тогда $\xi \cdot C_1 = \cdots = \xi \cdot C_r$.

Предположим, что $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ for some $i \neq j$.

□

Лемма 4.4. *Пусть $f : X \to Z$ – расслоение на коники над кривой арифметического рода* 0. *Если K_X^2 нечетно, то $Z \simeq \mathbb{P}^1$ и* $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(\bar{X})^G$.

Задачи.

(1) Могут ли все слои расслоения на коники ($\mathrm{char}\,\Bbbk = 2$) быть особыми?

(2) Сколько различных пучков коник содержит поверхность дель Пеццо степени d?

(3) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 2. Покажите, что имеется естественное взаимно однозначное соответствие между корнями в $\mathrm{Pic}(X)$ и пучками коник на X.

(4) Пусть $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – поверхность дель Пеццо степени 4. Как описываются пучки коник на X в терминах квадратичных уравнений, задающих X.

5. Минимальность

Теорема 5.1. *Пусть $f : X \to Z$ – относительно G-минимальное расслоение на коники над рациональной кривой Z. Предположим, что $K_X^2 \leq 6$.*

(i) *Если X не является минимальной G-поверхностью, то X – поверхность дель Пеццо (с $\rho(X)^G = 2$).*

(ii) *Если $K_X^2 \notin \{3, 5, 6\}$, то X – G-минимальная G-поверхность.*

(iii) *Если $K_X^2 \in \{3, 5, 6\}$, то поверхность X не является G-минимальной (и, следовательно, X – поверхность дель Пеццо). Существует бирациональное стягивание $\varphi : X \to X'$ на поверхность дель Пеццо X'.*

   (a) *Если $K_X^2 = 3$, то $X' = X_4' \subset \mathbb{P}^4$ – поверхность дель Пеццо степени 4, морфизм $\varphi : X \to X'$ задается линейной системой $|-2K_X - F|$ и стягивает неприводимую (-1)-кривую $C \sim -K_X - F$ в G-точку.*

(b) *Если* $K_X^2 = 5$, *то* $X' \simeq \mathbb{P}^2$, *морфизм* $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ *задается линейной системой* $|-K_X - F|$ *и стягивает* G*-инвариантную четверку* (-1)*-кривых* $C = C_1 + \cdots + C_4 \sim -2K_X - 3F$.

(c) *Если* $K_X^2 = 6$, *то то* $X' = X_8' \subset \mathbb{P}^8$ *– поверхность дель Пеццо степени* 8, *морфизм* $\varphi : X \to X'$ *задается линейной системой* $|-2K_X - F|$ *и стягивает* G*-инвариантную пару* (-1)*-кривых* $C = C_1 + C_2 \sim -K_X - 2F$.

(iv) *Если* $K_X^2 \in \{1, 2, 4\}$, *то* X *– поверхность дель Пеццо тогда и только тогда, когда она имеет две структуры* G*-расслоения на коники. Вторая структура задается линейной системой* $|-4K_X - F|$, $|-2K_X - F|$ *и* $|-K_X - F|$ *при* $K_X^2 = 1$, 2 *и* 4, *соответственно.*

Следствие 5.2. *Пусть* X *–* G*-минимальная поверхность дель Пеццо. Предположим, что* $\rho(X)^G > 1$. *Тогда* $\rho(X)^G = 2$, *поверхность* X *имеет две структуры* G*-минимального расслоения на коники и* $K_X^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Замечание 5.3. При $K_X^2 = 1$ и 2 две структуры на коники переставляются инволюцией Бертини и Гейзера, соответственно.

Доказательство. (i) следует из теоремы о конусе.

(ii) Пусть C – G-инвариантная исключительная кривая и пусть m – число ее компонент. Обозначим также $d := K_X^2$. Запишем $C \sim -aK_X + bF$, $a > 0$. Тогда

$$\begin{array}{rcll} -m & = & C^2 & = da^2 + 4ab \\ m & = & -K_X \cdot C & = da + 2b \end{array}$$

Исключая b, получим

$$b = (m - da)/2, \qquad da^2 - 2ma - m = 0.$$

Отсюда $d > 0$ и $m = a^2 m'$, где $m' \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$d = (2a + 1)m'.$$

Мы можем считать, что $d \leq 6$. Получаем возможности:

- $a = 1$, $m' = 1$, $d = 3$, $m = 1$, $b = -1$;
- $a = 1$, $m' = 2$, $d = 6$, $m = 2$, $b = -2$;
- $a = 2$, $m' = 1$, $d = 5$, $m = 4$, $b = -3$.

(iii) По лемме 4.4 $Z \simeq \mathbb{P}^1$. Пусть F – общий слой расслоения f. По теореме Римана-Роха $H^0(X, -K_X - F) \neq 0$. Следовательно, существует эффективный дивизор $C \sim -K_X - F$. Имеем $C^2 = -1$ и $-K_X \cdot C = 1$. Мы утверждаем, что кривая C неприводима. Действительно, иначе имеет место разложение $C = \Gamma + mF$, где

$m \geq 0$, а Γ – сумма горизонтальных компонент. Так как $\Gamma \cdot F = C \cdot F = 2$ и f не имеет инвариантных сечений, то кривая Γ приведена и имеет не более двух компонент. По формуле для рода

$$2p_a(\Gamma) - 2 = (K_X + \Gamma) \cdot \Gamma = \\ = -(m+1)F \cdot (-K_X - (m+1)F) = -2(m+1).$$

Отсюда $p_a(\Gamma) = -m \leq 0$. Если Γ неприводима, то $0 \leq p_a(\Gamma) = -m \leq 0$, т.е. $m = 0$ и кривая $C = \Gamma$ также неприводима. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. Тогда $K_X \cdot \Gamma_1 = K_X \cdot \Gamma_2$ и

$$3 = K_X^2 = -K_X \cdot (\Gamma_1 + \Gamma_2 + (m+1)F) = -2K_X \cdot \Gamma_1 + 2(m+1).$$

Противоречие. Таким образом, кривая C неприводима (и приведена).

Предположим, что X не является поверхностью дель Пеццо. Тогда существует неприводимая кривая Γ такая, что $-K_X \cdot \Gamma \leq 0$. Но тогда $C \cdot \Gamma < 0$ и поэтому $C = \Gamma$. Но с другой стороны, $-K_X \cdot C = 1$. Противоречие доказывает (iii).

(iv) По лемме 4.4 $Z \simeq \mathbb{P}^1$. Пусть $K_X^2 = 5$. По теореме Римана-Роха $H^0(X, -2K_X - 3F) \neq 0$. Следовательно, существует эффективный дивизор $C \sim -2K_X - 3F$. Имеем $C^2 = -4$ и $-K_X \cdot C = 4$. Запишем $C = \Gamma + mF$, где $m \geq 0$, а Γ – сумма горизонтальных компонент. Так как $\Gamma \cdot F = C \cdot F = 2$ и f не имеет инвариантных сечений, то кривая $\Gamma \sim -2K_X - (3+m)F$ имеет не более четырех компонент. Если $\Gamma = 2\Gamma'$, то $\Gamma' \sim -K_X - kF$, где $k = (m+3)/2$ и по формуле для рода

$$2p_a(\Gamma') - 2 = (K_X + \Gamma') \cdot \Gamma' = \\ = -kF \cdot (-K_X - kF) = -2k \leq -4.$$

Тогда $\Gamma' = \Gamma_1 + \Gamma_2$, $k = 2$ и

$$5 = K_X^2 = -K_X \cdot (\Gamma' + 2F) = -2K_X \cdot \Gamma_1 + 4.$$

Противоречие. Поэтому кривая Γ приведена. По формуле для рода

$$2p_a(\Gamma) - 2 = (K_X + \Gamma) \cdot \Gamma = \\ = (-K_X - (m+3)F) \cdot (-2K_X - (m+3)F) = -8 - 6m \leq -8.$$

Поэтому кривая Γ приводима и имеет 4 компоненты связности: $C = \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$. Отсюда несложно вывести, что Γ_i – (-1)-кривые.

(v) Пусть $K_X^2 = 6$. По теореме Римана-Роха $H^0(X, -K_X - 2F) \neq 0$. Следовательно, существует эффективный дивизор $C \sim -K_X - 2F$. Имеем $C^2 = -2$ и $-K_X \cdot C = 2$. Запишем $C = \Gamma + mF$, где $m \geq 0$, а Γ – сумма горизонтальных компонент. Так как $\Gamma \cdot F = C \cdot$

$F = 2$ и f не имеет инвариантных сечений, то кривая Γ приведена и имеет не более двух компонент. По формуле для рода

$$\begin{aligned} 2p_a(\Gamma) - 2 &= (K_X + \Gamma) \cdot \Gamma = \\ &= -(m+2)F \cdot (-K_X - (m+2)F) = -2(m+2) < -2. \end{aligned}$$

Поэтому кривая Γ приводима: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. Снова по формуле для рода

$$\begin{aligned} -2 = 2p_a(\Gamma_1) - 2 &= (K_X + \Gamma_1) \cdot \Gamma_1 = \\ &= -(\Gamma_2 + (m+2)F) \cdot \Gamma_1 = -\Gamma_2 \cdot \Gamma_1 - m - 2 \leq -2. \end{aligned}$$

Отсюда $m = 0$ и $\Gamma_2 \cdot \Gamma_1 = 0$, т.е. C – несвязное объединение (-1)-кривых.

(vi) Следует из теоремы о конусе. $\square$

Задачи.

(1) Пусть X – поверхность дель Пеццо степени 1 или 2 и пусть G – группа ее автоморфизмов, содержащая инволюцию Бертини β, если $K_X^2 = 1$, и инволюцию Гейзера γ, если $K_X^2 = 2$. Доказать, что тогда X является G-минимальной.

(2) Может ли кубическая поверхность над полем $\mathbb{R}$ быть минимальной?

(3) Является ли G-минимальной кубическая поверхность Ферма $x_0^3 + \cdots + x_3^3 = 0$ (над алгебраически замкнутым полем), где G – полная группа автоморфизмов?

(4) Рассмотрим кубическую поверхность X, заданную уравнениями

$$x_0^3 + \cdots + x_4^3 = x_0 + \cdots + x_4 = 0.$$

Пусть G – ее полная группа автоморфизмов. Является ли X G-минимальной? Изоморфна ли она кубике Ферма?

(5) Найдите группу автоморфизмов кубической поверхности Ферма над полем характеристики 2. Является ли эта поверхность G-минимальной?

(6) Найдите группу автоморфизмов поверхности дель Пеццо степени 2, заданной уравнением $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^2 = 0$ в $\mathbb{P}(1,1,1,2)$ над полем характеристики 3. Является ли эта поверхность G-минимальной?

(7) Приведите примеры G-минимальных поверхностей дель Пеццо X степени 1, 2 и 4 с $\rho(X)^G = 2$.

(8) Какие конфигурации особых точек возможны на дювалевской поверхности дель Пеццо степени 6? Приведите примеры, задав поверхность как дивизор в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

6. Кубические поверхности

Предложение 6.1. *Для кубической G-поверхности X следующие условия эквивалентны:*

(i) *X является G-минимальной;*
(ii) $\operatorname{Pic}(X)^G = \mathbb{Z}$*;*
(iii) *если $L_1, \ldots, L_m$ – G-инвариантное множество прямых, то дивизор $\sum L_i$ пропорционален K_X;*
(iv) *если $L_1, \ldots, L_m$ – G-инвариантное множество прямых, то $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ для некоторых $i \neq j$.*

Теорема 6.2 (Б. Сегре, Ю.И. Манин)**.** *Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – неособая G-минимальная кубическая поверхность.*

(i) *Тогда X не является G-рациональной.*
(ii) *Если $X_1 \subset \mathbb{P}^3$ – любая другая неособая кубическая поверхность бирационально изоморфная X, то поверхности X и X' являются G-проективно эквивалентными.*

Часть (i) теоремы следует из следующего, более общего предложения.

Предложение 6.3. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^3$ – кубическая поверхность и пусть $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – бирациональное отображение. Положим $\mathscr{H} := \phi_*^{-1}|\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$. Тогда $\mathscr{H} \not\subset |-nK_X|$ для любого n.*

6.4. Пусть X – любая неособая проективная поверхность и пусть $\mathscr{H}$ – линейная система без неподвижных компонент на X. Рассмотрим рациональное отображение $\phi = \phi_{\mathscr{H}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$, заданное линейной системой $\mathscr{H}$. Таким образом, $\mathscr{H} = \phi_*^{-1}|\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|$. Имеет место диаграмма

(6.4.1)
$$
\begin{tikzcd}
 & \tilde{X} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
X \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & \mathbb{P}^N
\end{tikzcd}
$$

Отображения p и q раскладываются в композиции раздутий точек. Запишем

(6.4.2)
$$
\begin{aligned}
p^*\mathscr{H} &= \tilde{\mathscr{H}} + \sum m_i E_i^*, \\
K_{\tilde{X}} &= p^*K_X + \sum E_i^*.
\end{aligned}
$$

Предложение 6.5. *В обозначениях 6.4 линейная система $\mathscr{H}$ задает бирациональное отображение на $\mathbb{P}^2$ тогда и только тогда, когда*

(6.5.3)
$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}^2 &= 1 + \sum m_i^2, \\
-K_X \cdot \mathscr{H} &= 3 + \sum m_i.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Вычисление индексов пересечений $\tilde{\mathscr{H}}^2$ и $\tilde{\mathscr{H}} \cdot K_{\tilde{X}}$ (с использованием (6.4.2)). □

Следствие 6.6. *Пусть X – G-поверхность дель Пеццо степени 1 с $\rho(X)^G = 1$. Тогда X не является G-рациональной.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H} \subset |-nK_X|$. Из (6.5.3) получаем

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + \sum m_i^2, \\ n &= 3 + \sum m_i. \end{aligned}$$

Отсюда

$$9 + \sum m_i^2 = (3 + \sum m_i)^2 = 1 + \sum m_i^2,$$

что невозможно. □

Из (6.5.3) получаем

$$\begin{aligned} \sum m_i^2 &= 3n^2 - 1, \\ \sum m_i &= 3n - 3. \end{aligned}$$

Следствие 6.7. *Для некоторого i имеем $m_i > n$.*

Лемма 6.8. *Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – кубическая поверхность и пусть $O \in X$ – точка, не лежащая на прямых. Пусть $\sigma : \bar{X} \to X$ – раздутие O. Тогда $\bar{X}$ – поверхность дель Пеццо степени 2.*

Доказательство. Пусть $E = \sigma^{-1}(O)$ – исключительный дивизор. Пусть $T := X \cap T_{O,X}$ – сечение касательной плоскостью и пусть $\bar{T}$ – собственный прообраз T на $\bar{X}$. Тогда кривая T особа в O и не содержит компонент степени 1, проходящих через O. Следовательно, T неприводима и $\bar{T} \sim \sigma^*T - 2E$.

Предположим, что $-K_{\bar{X}} \cdot \bar{C} \leq 0$ для некоторой неприводимой кривой $\bar{C}$. Ясно, что $-K_{\bar{X}} \sim -\sigma^*K_X - E \sim \bar{T} + E$. Так как $-K_{\bar{X}} \cdot E = 1$, то $C := \sigma(\bar{C})$ – кривая и поэтому $-\sigma^*K_X \cdot \bar{C} = -K_X \cdot C > 0$. Отсюда $E \cdot \bar{C} > 0$ и $\bar{T} \cdot \bar{C} < 0$. Следовательно, $\bar{T} = \bar{C}$. С другой стороны,

$$-K_{\bar{X}} \cdot \bar{T} = (-\sigma^*K_X - E) \cdot (-\sigma^*K_X - 2E) = 3 - 2 = 1.$$

Противоречие. □

Доказательство предложения 6.3. Выберем n минимальным возможным. Имеем

$$\bar{\mathscr{H}} = n\sigma^*(-K_X) - mE = -nK_{\bar{X}} - (m-n)E,$$

где $\bar{\mathscr{H}}$ – собственный прообраз $\mathscr{H}$ на $\bar{X}$. Отсюда

$$\begin{aligned}\gamma_*\bar{\mathscr{H}} \sim -nK_{\bar{X}} - (m-n)\gamma_* E = \\ - nK_{\bar{X}} - (m-n)(-K_{\bar{X}} - E) = \\ - (n-(m-n))K_{\bar{X}} + (m-n)E = \\ - (n-(m-n))\sigma^* K_{\bar{X}} + (2m-3n)E.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_*\gamma_*\sigma_*^{-1}\mathscr{H} = \sigma_*\gamma_*\bar{\mathscr{H}} \subset |-\bar{n}K_X|,$$

где $\bar{n} = n-(m-n) < n$. Противоречие. □

Приступим теперь к доказательству (ii) теоремы 6.2. Из (6.5.3) получаем

$$\begin{aligned}\sum m_i^2 &= 3n^2-3,\\ \sum m_i &= 3n-3.\end{aligned}$$

Следствие 6.9. (i) *Для некоторого i имеем $m_i > n$.*

(ii) *Неравенство $m_i > n$ имеет место не более чем для двух значений i.*

Лемма 6.10. *Пусть $\sigma : \bar{X} \to X$ – раздутие точек O_1 и O_2. Тогда $\bar{X}$ – поверхность дель Пеццо степени* 1.

Доказательство. Предположим, что $-K_{\bar{X}} \cdot \bar{C} \le 0$ для некоторой неприводимой кривой $\bar{C}$. Пусть $\bar{\mathscr{H}}$ – собственный прообраз $\mathscr{H}$ на $\bar{X}$. Запишем

$$\bar{\mathscr{H}} = n\sigma^*(-K_X) - mE_1 - mE_2 = -nK_{\bar{X}} - (m-n)(E_1+E_2).$$

Отсюда

$$0 \le \bar{\mathscr{H}} \cdot \bar{C} = -nK_{\bar{X}} \cdot \bar{C} - (m-n)(E_1+E_2)\cdot \bar{C} \le 0.$$

Получаем $-K_{\bar{X}} \cdot \bar{C} = E_i \cdot \bar{C} = 0$. Но тогда

$$\sigma^* K_X \cdot \bar{C} = K_{\bar{X}} \cdot \bar{C} - (E_1+E_2)\cdot \bar{C} = 0.$$

Противоречие. □

Завершение доказательства теоремы 6.2. Имеем

$$\bar{\mathscr{H}} = n\sigma^*(-K_X) - mE_1 - mE_2 = -nK_{\bar{X}} - (m-n)(E_1+E_2),$$

где $\bar{\mathscr{H}}$ – собственный прообраз $\mathscr{H}$ на $\bar{X}$. Отсюда

$$\begin{aligned}\beta_*\bar{\mathscr{H}} \sim -nK_{\bar{X}} - (m-n)\beta_*(E_1+E_2) = \\ - nK_{\bar{X}} - (m-n)(-4K_{\bar{X}} - E_1 - E_2) = \\ - (n-4(m-n))K_{\bar{X}} + (m-n)(E_1+E_2) = \\ - (n-4(m-n))\sigma^* K_{\bar{X}} + (5m-6n)(E_1+E_2).\end{aligned}$$

Таким образом,
$$\sigma_*\beta_*\sigma_*^{-1}\mathscr{H} = \sigma_*\beta_*\bar{\mathscr{H}} \subset |-\bar{n}K_X|,$$
где $\bar{n} = n - 4(m-n) < n$. □

Теорема 6.11. *Пусть $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – бирациональное отображение и пусть $\mathscr{H} = \phi_*^{-1}|\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$ – собственный прообраз на X полной линейной системы прямых на $\mathbb{P}^2$. Тогда не существует коники F на X такой, что*

$$\mathscr{H} \sim -aK_X + bF \qquad \text{для} \quad a \in \mathbb{N} \text{ и } b \in \mathbb{Z}. \tag{6.11.4}$$

Следствие 6.12. *Пусть $f : X \to Z$ относительно минимальное G-расслоение на коники с $K_X^2 = 3$. Тогда поверхность X не является G-бирационально тривиальной.*

Следствие 6.13. *Пусть X – кубическая G-поверхность с $\rho(X)^G = 2$. Если на X имеется G-эквивариантный пучок коник, то поверхность X не является G-бирационально тривиальной.*

Доказательство. В основном, мы следуем работам [6] и [4]. Рассмотрим разрешение точек неопределенности отображения (6.4.1). Мы имеем (6.4.2) и (6.5.3).

Предположим противное: соотношение (6.11.4) выполнено для некоторой коники F на X. Предположим, что величина $a > 0$ – наименьшая возможная. Так как $F^2 = 0$ на X, то из (6.11.4) и (6.5.3) мы получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = 3a^2 + 4ab - 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i = 3a + 2b - 3. \tag{6.13.5}$$

Пусть $f = f_{|F|} : X \to \mathbb{P}^1$ – расслоение на коники опредленное пучком $|F|$. Далее мы используем следующие леммы 6.14 – 6.17.

Лемма 6.14. *Существует бирациональный изоморфизм над $\mathbb{P}^1$*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & X' \arrow[dl, "f'"] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

где X' – снова кубическая поверхность такая, что для собственных прообразов $\mathscr{H}'$ линейной системы $\mathscr{H}$ и слоя F' расслоения f' мы имеем
$$\mathscr{H}' \sim -aK_X + b'F'$$
с тем же значением a как и в (6.11.4)*, и дополнительно с*
$$m' := \max_i \{m_i'\} \le a \quad \forall i,$$
где целые m_i' имеют то же значение на X', что и m_i на X.

Доказательство леммы 6.14. Предположим, что $m_i > a$ для некоторого i. Рассмотрим расслоение на коники $f = f_{|F|} : X \to \mathbb{P}^1$ и сделаем элементарное преобразование f в точке $P = p(E_i) \in X$. Во-первых, раздуем эту точку $\sigma : \hat{X} \to X$. Пусть E – исключительный дивизор. Предполагая, что $m_i = \mathrm{mult}_P(\mathscr{H})$, на новой поверхности $\hat{X}$ имеем

$$(6.14.6) \qquad \hat{\mathscr{H}} := \sigma_*^{-1}(\mathscr{H}) = \sigma^*\mathscr{H} - m_i E \quad \text{и} \quad K_{\hat{X}} = \sigma^* K_X + E.$$

Выберем конику F (в пучке) проходящей через точку P. Тогда F неприводима. Действительно, иначе $F = F_1 + F_2$, где F_1, F_2 пара прямых на X и F_1 проходит через P. Таким образом,

$$a < m_i \le (F_1 \cdot \mathscr{H})_P \le F_1 \cdot \mathscr{H} = F_1 \cdot (-aK_X + b(F_1 + F_2)) = a\,,$$

что невозмозно. Отсюда следует, что собственный прообраз $\hat{F} \sim \sigma^* F - E$ коники F на $\hat{X}$ явялется (-1)-кривой.

Стягивание $\sigma' : \hat{X} \to X'$ кривой $\hat{F}$ в точку $P' \in X'$ дает невырожденную конику $F' := \sigma'_*(E)$ проходящую через P' на полученной кубической поверхности X', причем

$$\mathscr{H}' := \sigma'_*(\hat{\mathscr{H}}) \sim -aK_X + b'F' \qquad \text{для некоторого} \quad b' \in \mathbb{Z}.$$

Применяя (6.11.4) и (6.14.6) на X' получим

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}_{P'}(\mathscr{H}') = \hat{\mathscr{H}} \cdot \hat{F} = \sigma^* H \cdot \hat{F} - m_i E \cdot \hat{F} = \\ = H \cdot F - m_i = -aK_X \cdot F - m_i = 2a - m_i < a. \end{aligned}$$

Продолжая процесс, мы добъемся того, что $m'_i \le a$ для всех i, как и утверждалось. □

Таким образом, далее мы предполагаем, что

$$(6.14.7) \qquad m = \max_i \{m_i\} \le a \ \forall i.$$

Лемма 6.15. *В предпооженияx* (6.14.7) *имеем* $b < 0$.

Доказательство леммы 6.15. Из (6.13.5) и (6.14.7) получаем

$$\begin{aligned} (6.15.8) \quad 3a^2 + 4ab = 1 + \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \le 1 + m \sum_{i=1}^{n} m_i \le \\ \le 1 + m(3a + 2b - 3) \le 1 + a(3a + 2b - 3). \end{aligned}$$

Долее, из (6.15.8) следует, что $2ab \le 1 - 3a$. Так как $a \ge 1$, то $b \le \frac{1}{2a} - \frac{3}{2} \le -1$. □

Лемма 6.16 (Неравенство Нётера-Фано). *Для* m *такого, как в* (6.14.7) *имеем*

$$a \ge m > a + b.$$

Доказательство леммы 6.16. Первое неравенство следует из (6.14.7). Для доказательства второго предположим противное

$$m \leq a+b. \tag{6.16.9}$$

Из (6.15.8) и (6.16.9) получаем

$$3a^2+4ab \leq 1+m(3a+2b-3) \leq 1+(a+b)(3a+2b-3). \tag{6.16.10}$$

Таким образом, согласно (6.16.9) и (6.16.10) имеем

$$3 \leq 3m \leq 3(a+b) \leq 1+b(a+2b). \tag{6.16.11}$$

Покажем, что $a+2b \geq 0$. Действительно, пусть C вычетная прямая к конике F на X. Таким образом, $F+C \sim -K_X$. Тогда (6.11.4) дает нам

$$0 \leq \mathscr{H} \cdot C = (-aK_X + bF) \cdot C = a+2b.$$

Теперь (6.16.11) приводит к противоречию, поскольку $b < 0$ по лемме 6.15. $\square$

Лемма 6.17. *Положим $m = m_i$ и пусть $Q = p(E_i) \in X$. Если через точку Q проходит прямая l на X, то l – компонента слоя $f^{-1}(f(Q))$ морфизма f.*

Доказательство леммы 6.17. Имеем

$$(\mathscr{H} \cdot l)_Q \geq \operatorname{mult}_Q(\mathscr{H}) = m > a+b. \tag{6.17.12}$$

С другой стороны,

$$(\mathscr{H} \cdot l)_Q \leq \mathscr{H} \cdot l = (-aK_X + bF) \cdot l = a + bF \cdot l. \tag{6.17.13}$$

Согласно (6.17.12) и (6.17.13) имеем $b < bF \cdot l$, где $b < 0$ по лемме 6.15. Следовательно, $F \cdot l = 0$, что и доказывает нашу лемму. $\square$

Пусть снова C – вычетная (-1)-кривая к конике F на X. Таким образом, $-K_X \sim F + C$. Обозначим через V поверхность дель Пеццо степени 4, полученную стягиванием $\pi : X \to V$ кривой C, а через $\mathscr{H}_V$, F_V и.т.д. одозначим образы на V линейной системы $\mathscr{H}$, F, и.т.д. Согласно (6.11.4),

$$-K_V \sim F_V \quad \text{и} \quad \mathscr{H}_V \sim -aK_V + bF_V \sim -(a+b)K_V. \tag{6.17.14}$$

По лемме 6.17 через точку $Q_V := \pi(Q)$ не проходит прямых (в V). Поэтому раздутие $\sigma : X' \to V$ в точке Q_V дает еще одну кубическую поверхность X' с (-1)-кривой $E = \sigma^{-1}(Q_V)$. Для собственного прообраза $\mathscr{H}' = \sigma_*^{-1}(\mathscr{H}_V)$ на X' имеем по (6.17.14):

(6.17.15)

$$\mathscr{H}' \sim \sigma^*\mathscr{H}_V - mE \sim -(a+b)\sigma^*K_V - mE \sim -(a+b)K_{X'} + (a+b-m)E.$$

Линейная система

$$|F'| = |-K_{X'} - E|$$

Задает расслоение на коники на X'. Подстявляя $E \sim -K_{X'} - F'$ в (6.17.15) получаем:

$$\mathscr{H}' \sim (2a + 2b - m)(-K_{X'}) - (a + b - m)F'. \tag{6.17.16}$$

По леммам 6.15 и 6.16,

$$2a + 2b - m = (a + b) + (a + b - m) < a. \tag{6.17.17}$$

Учитывая (6.17.16), видим, что последнее неравенство противоречит минимальности a. Это заканчивает доказательство теоремы 6.11. $\square$

Задачи. (1) Приведите примеры кубических поверхностей, таких как в 6.13 (арифметический и геометрический случаи). Возможен ли такой пример над полем $\mathbb{R}$?

7. Неравенство Нётера-Фано и бирациональная супержесткость

Определение 7.1. Минимальная G-поверхность дель Пеццо X называется *бирационально супержесткой*, если любое G-бирациональное отображение $X \dashrightarrow X'$ на любую G-поверхность является изоморфизмом. Минимальное G-расслоение на коники $X \to Z$ называется *бирационально супержестким*, если для любого G-бирационального отображения $X \dashrightarrow X'$ на относительно минимальную модель, эта модель также имеет структуру G-расслоения на коники над Z и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ Z \arrow[r, equal] & Z \end{tikzcd}$$

7.2. Пусть $\phi : X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение неособых проективных минимальных G-поверхностей. Предположим, что ϕ не является изоморфизмом. Рассмотрим разрешение точек неопределённости:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\phi"] & & X' \end{tikzcd}$$

Пусть $\mathscr{H}'$ – линейная система без неподвижных компонент на X' и пусть $\mathscr{H} = \phi_*^{-1}\mathscr{H}'$ – ее собственный прообраз на X. Запишем

$$\begin{aligned} f^*\mathscr{H} &= \tilde{\mathscr{H}} + \textstyle\sum m_i E_i^*, \\ K_{\tilde{X}} &= f^*K_X + \textstyle\sum E_i^*. \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Конечно, линейная система $\mathscr{H}$ зависит от выбора $\mathscr{H}$. Мы будем использовать следующий стандартный выбор. Если X' – поверхность дель Пеццо, то пусть линейная система $\mathscr{H}'$ порождена образующей группы $\mathrm{Pic}(X')^G$. Если же X' имеет структуру расслоения на коники, то пусть $\mathscr{H}'$ – линейная система, порожденная слоем.

Теорема 7.3 (Неравенство Нётера). *В обозначениях 7.2 предположим, что $|\mathscr{H}' + aK_{X'}| = \emptyset$. Тогда имеет место одно из следующих:*

(i) $|\mathscr{H} + aK_X| = \emptyset$ *или*

(ii) *существует точка $O_i \in X$ кратности $m_i > a$ (максимальная особенность).*

Доказательство. Из (7.2.1) получаем

$$\tilde{\mathscr{H}} + aK_{\tilde{X}} = f^*(\mathscr{H} + aK_X) + \sum (a - m_i)E_i^*,$$

$$\mathscr{H}' + aK_{X'} = g_*(\tilde{\mathscr{H}} + aK_{\tilde{X}}) = g_*f^*(\mathscr{H} + aK_X) + \sum (a - m_i)g_*E_i^*.$$

Если $|\mathscr{H} + aK_X| \neq \emptyset$, то $a - m_i < 0$ для некоторого i, поскольку $|\mathscr{H}' + aK_{X'}| = \emptyset$. □

Обозначим через $\mathrm{d}(\phi)$ число исключительных дивизоров E_i^*, для которых выполняется неравенство $m_i > a$.

Предложение 7.4. *Пусть X – минимальная G-поверхность дель Пеццо степени $K_X^2 \leq 6$ и в обозначениях 7.2 Тогда $\mathrm{d}(\phi) < K_X^2$.*

Доказательство. Поскольку $-K_X$ порождает группу $\mathrm{Pic}(X)^G$, то мы можем записать $\mathscr{H} = -nK_X$ для некоторого $n > 1$. Мы применим теорему 7.3, полагая $n = a$. Тогда очевидно случай (i) невозможен. Из (7.2.1) имеем

$$0 \leq \tilde{\mathscr{H}}^2 = n^2K_X^2 - \sum m_i^2 < n^2K_X^2 - \mathrm{d}(\phi)n^2.$$

□

Следствие 7.5. *Пусть X – минимальная G-поверхность дель Пеццо степени $K_X^2 = 1$. Тогда X является бирационально сверхжесткой.*

Следствие 7.6. *Пусть X – минимальная G-поверхность дель Пеццо степени $K_X^2 = 2$. Предположим, что X не имеет G-неподвижных точек. Тогда X является бирационально сверхжесткой.*

Следствие 7.7. *Пусть X – минимальная G-поверхность дель Пеццо степени $K_X^2 = d \leq 6$. Если любая G-орбита содержит $\geq d$ элементов, то X является бирационально сверхжесткой.*

Предложение 7.8. *Пусть X – минимальное G-расслоение на коники с $K_X^2 \leq 0$. Тогда X является бирационально сверхжестким.*

Доказательство. Согласно следствию 7.5 X' не может быть поверхностью дель Пеццо степени 1. В частности, линейная система $\mathscr{H}'$ не имеет базисных точек. Из (7.2.1) имеем

$$\mathscr{H}'^2 = \tilde{\mathscr{H}}^2 = f^*\mathscr{H}^2 + (\sum m_i E_i^*)^2 = \mathscr{H}^2 - \sum m_i^2.$$

По формуле для рода

$$\begin{aligned}(K_{X'} + \mathscr{H}') \cdot \mathscr{H}' = 2p_a(\mathscr{H}') - 2 = 2p_a(\tilde{\mathscr{H}}) - 2 = \\ = (K_{\tilde{X}} + \tilde{\mathscr{H}}) \cdot \tilde{\mathscr{H}} = (K_X + \mathscr{H}) \cdot \mathscr{H} - \sum (m_i - 1)m_i.\end{aligned}$$

Отсюда

$$K_{X'} \cdot \mathscr{H}' = K_X \cdot \mathscr{H} + \sum m_i.$$

Поскольку $-K_X$ и класс слоя F порождают группу $\mathrm{Pic}(X)^G$, то мы можем записать $\mathscr{H} = -aK_X + bF$ для некоторых a, b, где $a > 1$.

$$\begin{aligned}\mathscr{H}'^2 = f^*(-aK_X + bF)^2 - \textstyle\sum m_i^2 = a^2K_X^2 + 4ab - \sum m_i^2, \\ K_{X'} \cdot \mathscr{H}' = K_X \cdot (-aK_X + bF) + \textstyle\sum m_i = -aK_X^2 - 2b + \sum m_i.\end{aligned}$$

Предположим, что $a = 0$. Тогда $\mathscr{H}'^2 = 0$ и $m_i = 0$ для любого i. Это означает, что $\mathscr{H}'$ порождена слоями расслоения на коники и ϕ не имеет базисных точек.

Рассмотрим случай $a > 0$. Имеем для любого i

$$0 \leq \tilde{\mathscr{H}} \cdot (f^*F - E_i) = \mathscr{H} \cdot F - m_i = 2a - m_i.$$

Получаем

$$\mathscr{H}'^2 = a^2K_X^2 + 4ab - \sum m_i^2 \geq a^2K_X^2 + 4ab - 2a\sum m_i.$$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}'^2 \geq a^2K_X^2 + 4ab - 2a(K_{X'} \cdot \mathscr{H}' + aK_X^2 + 2b) = \\ = a(-2K_{X'} \cdot \mathscr{H}' - aK_X^2).\end{aligned}$$

Если X' – поверхность дель Пеццо, то $-K_{X'} = r\mathscr{H}'$, где $r \leq 3$. Тогда

$$\frac{1}{a}\mathscr{H}'^2 \geq 2r\mathscr{H}'^2 - aK_X^2, \qquad \left(\frac{1}{a} - 2r\right)\mathscr{H}'^2 \geq -aK_X^2 \geq 0,$$

что невозможно. Если же X' имеет структуру расслоения на коники, то $\mathscr{H}'^2 = 0$ и $-K_{X'} \cdot \mathscr{H}' = 2$. Отсюда $aK_X^2 \geq 4$. Снова противоречие. □

8. Рациональность

Предложение 8.1. *Пусть X – поверхность дель Пеццо и пусть $\sigma : \tilde{X} \to X$ – раздутие точки $O \in X$. Если O не лежит на прямой и $K_X^2 \geq 3$, то $\tilde{X}$ – также поверхность дель Пеццо.*

Доказательство. Пусть $K_X^2 \geq 4$. Рассмотрим линейную систему гиперплоских сечений $\mathscr{M}$, проходящих через касательную плоскость $T_{O,X}$. Пусть $\tilde{\mathscr{M}}$ – собственный пробраз $\mathscr{M}$ на $\tilde{X}$. Линейная система $\mathscr{M}$ не имеет неподвижных компонент и ее общий элемент особ в точке O. Следовательно, $\tilde{\mathscr{M}} = \sigma^*\mathscr{M} - mE \sim -K_{\tilde{X}} - (m-1)E$, где $m \geq 2$.

Предположим, что $-K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} \leq 0$ для некоторой неприводимой кривой $\tilde{C}$. Тогда $\tilde{C} \cdot E > 0$ и $\tilde{M} \cdot \tilde{C} < 0$, т.е. $\tilde{C}$ – неподвижная компонента $\tilde{\mathscr{M}}$. Противоречие. □

Лемма 8.2. *На поверхности дель Пеццо X степени $4 \leq K_X^2 \leq 7$ через каждую точку проходит не более двух прямых.*

Доказательство. Следует из того, что $X = X_d \subset \mathbb{P}^d$ является пересечением квадрик. Действительно, пусть $L_1, \dots, L_r \subset X$ – прямые, проходящие через точку $P \in X$. Тогда $T_{P,X} \cap X \supset \{L_1, \dots, L_r\}$. С другой стороны, $T_{P,X} \cap X$ – пересечение квадрик на $T_{P,X} \simeq \mathbb{P}^2$, проходящих через P. □

Теорема 8.3. *Пусть X – рациональная G-поверхность дель Пеццо степени $d \geq 5$. Предположим, что она имеет G-точку. Тогда X является G-рациональной.*

Доказательство. По теореме 5.1 мы можем считать, что поверхность X является G-минимальной. Мы также можем считать, что $d < 8$. Таким образом, $\operatorname{Pic}(X)^G = -K_X \cdot \mathbb{Z}$. Мы утверждаем, что точка P не лежит на прямых. Действительно, если точка P лежит на единственной прямой E, то стягивание $\varphi : X \to Y$ является G-морфизмом и поверхность X не G-минимальна. Пусть P лежит на пересечении двух прямых: $\{P\} = E_1 \cap E_2$. Тогда класс $E_1 + E_2$ принадлежит $\operatorname{Pic}(X)^G$. Поэтому $E_1 + E_2 \sim -aK_X$, $a \in \mathbb{Z}$. Но тогда $2 = -K_X \cdot (E_1 + E_2) = ad \geq 5$. Противоречие. Таким образом, через P не проходят прямые. Тогда при раздутии $\sigma : \tilde{X} \to X$ точки P мы получим поверхность дель Пеццо $\tilde{X}$ степени $d - 1$. Прямую $E = \sigma^{-1}(P)$ пересекают пять (соответственно, три) других прямых $E_1, \dots, E_m$ при $d = 5$ (соответственно, при $d = 6$). Поскольку $\tilde{X}$ не содержит "треугольников", то эти прямые не пересекаются. Стягивание $\varphi : \tilde{X} \to Y$ кривых $E_1, \dots, E_m$ является G-морфизмом и Y

– поверхность дель Пеццо степени $d-1+m$. Получим диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

При $d = 5$ Y – поверхность дель Пеццо степени 9, содержащая G-инвариантную пятёрку точек $\varphi(E_i)$. Образ прямой E является коникой, проходящей через эти точки. На этой конике имеется G-орбита нечетной степени. Следовательно, $\varphi(E)$ – рациональная кривая. Но тогда поверхность Y имеет G-точку и поэтому G-рациональна. Аналогично, при $d = 6$ Y – поверхность дель Пеццо степени 8, содержащая G-инвариантную тройку точек $\varphi(E_i)$. Образ прямой E является неособой рациональной кривой с индексом самопересечения 2. На этой кривой имеется G-орбита нечетной степени. Следовательно, $\varphi(E)$ – рациональная кривая. Но тогда поверхность Y имеет G-точку и поэтому G-рациональна. □

Предложение 8.4. *Пусть $X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ – G-поверхность дель Пеццо степени 5. Предположим, что X содержит G-точку степени 2 (т.е. пару G-сопряженных точек). Тогда X является G-рациональной.*

Доказательство. Пусть $P = \{P_1, P_2\} \in X$ – G-точка степени 2. Предположим, что через P не проходит прямых и не существует коники, проходящей через P_1 и P_2. Рассмотрим раздутие $\sigma : \tilde{X} \xrightarrow{\sigma_2} X_1 \xrightarrow{\sigma_1} X$ точек P_1 и P_2. Мы утверждаем, что $\tilde{X}$ – поверхность дель Пеццо. Предположим, что существует G-инвариантная неприводимая кривая $\tilde{C}$ такая, что $-K_{\tilde{X}} \cdot \tilde{C} \leq 0$. Поскольку через P_1 не проходит прямых, то X_1 – поверхность дель Пеццо степени 4. Следовательно, $\sigma_2(\tilde{C})$ – объединение ≤ 2 прямых.
□

Предложение 8.5. *Пусть $X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ – поверхность дель Пеццо степени 5. Пусть $\sigma : \tilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^5$ – раздутие X, E – исключительный дивизор и $H^* = \sigma^* H$ – полный прообраз класса гиперплоскости в $\mathbb{P}^5$.*

(i) *Линейная система $|2H^* - E|$ задает морфизм $\varphi : \tilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^4$, который является $\mathbb{P}^1$-расслоением.*

Доказательство. Мы следуем заметке [9].

Поверхность $X = X_5 \subset \mathbb{P}^5$ (как схема) является пересечением 5 линейно независимых квадрик, поэтому линейная система, порожденная этими квадриками задает рациональное отображение $\mathbb{P}^5 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$. Разрешение точек неопределённости этого отображения

– это раздутие $X \subset \mathbb{P}^5$. Таким образом, линейная система $|2H^* - E|$ задает морфизм $\varphi : \tilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^4$.

Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathscr{T}_X \longrightarrow \mathscr{T}_{\mathbb{P}^5}|_X \longrightarrow \mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5} \longrightarrow 0$$

где $\mathscr{T}$ – касательное, а $\mathscr{N}$ – нормальное расслоения. Для тотальных классов Чженя имеем $c(X) \cdot c(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) = c(\mathbb{P}^5)|_X = (1 + H|_X)^6$. Отсюда

$$c_1(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) = c_1(\mathbb{P}^5)|_X - c_1(X) = 5H,$$
$$\deg c_2(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) = \deg \big(c_2(\mathbb{P}^5)|_X - c_1(X) \cdot c_1(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) - c_2(X)\big) = 43.$$

Дивизор E естественно отождествляется с $\mathbb{P}(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5})$, а ограничение $-E|_E$ – с тавтологическим дивизором L на $\mathbb{P}(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5})$. Пусть $\pi : E = \mathbb{P}(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) \to X$ – естественная проекция. Так как

$$L^3 + \pi^* c_1(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) \cdot L^2 + \pi^* c_2(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) \cdot L = 0,$$

то мы имеем

$$\pi^*(-K_X) \cdot L^3 = -\pi^*(-K_X) \cdot \pi^* c_1(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) \cdot L^2 = -25,$$

$$\begin{aligned} L^4 = -\pi^* c_1(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) \cdot L^3 - \pi^* c_2(\mathscr{N}_{X/\mathbb{P}^5}) \cdot L^2 = \\ = -5\pi^*(-K_X) \cdot L^3 - 43 = 125 - 43 = 82. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} (2H^* - E)^4 \cdot E = (2H^*|_E - E|_E)^4 = (-2\pi^* K_X + L)^4 = \\ = L^4 + 8\pi^*(-K_X) \cdot L^3 + 24\pi^* K_X^2 \cdot L^2 = \\ = 82 - 8 \cdot 25 + 24 \cdot 5 = 2. \end{aligned}$$

Поэтому ограничение $\varphi|_E : E \to \mathbb{P}^4$ – двулистный в общей точке морфизм и, в частности, $\varphi(\tilde{\mathbb{P}}) = \varphi(E) = \mathbb{P}^4$.

Пусть $\ell \subset \mathbb{P}^5$ – 2-секущая поверхности X и пусть $\tilde{\ell}$ – собственный прообраз ℓ на $\tilde{\mathbb{P}}$. Тогда $(2H^* - E) \cdot \tilde{\ell} = 0$. Следовательно, $\tilde{\ell}$ содержится в слое морфизма φ. □

Определение 8.6. Говорят, что поле $\Bbbk$ удовлетворяет свойству c_1, если любое уравнение[1] $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, где f – однородный многочлен степени $d < n$ с коэффициентами из $\Bbbk$, имеет нетривиальное решение в $\Bbbk^n$.

Примеры 8.7. (i) Очевидно, что алгебраически замкнутое поле является полем типа c_1.

(ii) Любое конечное поле имеет тип c_1 (теорема Шевалле, см., например, [10, гл. V, §10]).

[1] С этого места – на след. семестр

(iii) Если $\Bbbk_0$ – алгебраически замкнутое поле и $\Bbbk \supset \Bbbk_0$ – его расширение степени трансцендентности 1, то $\Bbbk$ имеет тип c_1 (теорема Тзена, см., например, [11, гл. 1, §6]).

(iv) Поле типа c_1 должно быть квадратично замкнуто. Поэтому $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ не являются полями типа c_1.

Теорема 8.8. *Пусть X – рациональная поверхность над полем $\Bbbk$ типа c_1. Тогда X имеет $\Bbbk$-точку.*

Доказательство. Мы можем считать, что поверхность X минимальна. Пусть сначала X имеет структуру расслоения на коники $f : X \to Z$. Тогда Z – кривая арифметического рода 0. Следовательно, Z изоморфна конике в $\mathbb{P}^2$. Поскольку $\Bbbk$ – поле типа c_1, то Z имеет $\Bbbk$-точку z. Если слой $f^{-1}(z)$ – вырожденная коника, то точка пересечения ее компонент определена над $\Bbbk$. Если, же слой $f^{-1}(z)$ невырожден, то снова он имеет $\Bbbk$-точку поскольку $\Bbbk$ – поле типа c_1. Таким образом, мы можем считать, что X – поверхность дель Пеццо с $\operatorname{Pic}(X) = \mathbb{Z}$. Рассмотрим случаи согласно значениям степени K_X^2.

$K_X^2 = 1$. Тогда базисная точка пучка $|-K_X|$ определена над $\Bbbk$ при любом выборе поля $\Bbbk$.

$K_X^2 = 3$. Тогда $X = X_3 \subset \mathbb{P}^3$ – кубическая поверхность и существование $\Bbbk$-точки следует из определения свойства c_1.

$K_X^2 = 4$. Тогда $X = X_4 \subset \mathbb{P}^4$ – пересечение двух квадрик. Соответствующий пучок квадрик определен над $\Bbbk$ и параметризуется $\Bbbk$-рациональной кривой. Вырожденные квадрики пучка □

Задачи. (1) Приведите примеры поверхностей дель Пеццо степени 2, 4, 8 над полем $\mathbb{R}$, не имеющих $\mathbb{R}$-точек.

(2) Покажите, что вещественная кубическая поверхность обязательно имеет $\mathbb{R}$-точку.

(3) Пусть T – двумерный алгебраический тор (групповая схема над полем $\Bbbk$ такая, что $T \otimes \bar{\Bbbk} \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m},\bar{\Bbbk}} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m},\bar{\Bbbk}}$). Докажите, что T является $\Bbbk$-рациональным. *Указание.* Рассмотреть компактификацию $V \supset T$ и применить программу минимальных моделей к минимальному разрешению поверхности X.

(4) Наоборот, пусть X – компактификация главного однородного пространства U двумерного алгебраического тора T. Докажите, что X бирационально изоморфно поверхности дель Пеццо степени 6, 8 или 9.

(5) Может ли кубическая поверхность над $\mathbb{Q}$ содержать ровно одну рациональную точку?

(6) Докажите, что все рациональные точки на кубике Ферма над полем $\mathbb{F}_4$ лежат на прямых. Для каких полей $\mathbb{F}_{2^n}$ верно то же самое?

9. Программа Саркисова

Обозначения 9.1. Пусть $\pi : X \to Z$ и $\pi' : X' \to Z'$ – G-минимальные минимальные рациональные поверхности и пусть

(9.1.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\chi"] \arrow[d, "\pi"] & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ Z & Z' \end{tikzcd}$$

– бирациональное отображение. Предположим, что линейная система $\mathscr{H}'$ очень обильна на X'. Запишем $\mathscr{H}' \sim -a'K_{X'} + b'F'$, где a', b' – неотрицательные рациональные числа и мы предполагаем, что $b' = 0$ и $F' = 0$ если Z' – точка. Более того, мы можем считать, что a', $b' > 0$. Пусть $\mathscr{H} := \chi_*^{-1}\mathscr{H}'$. Как и выше запишем $\mathscr{H} \sim -aK_X + bF$, где a, $b \in \mathbb{Q}$ и $a > 0$ (мы также предполагаем, что $b = 0$ и $F = 0$ если Z – точка). Пусть $c = \mathrm{ct}(X, \mathscr{H})$ – канонический порог пары $(X, \mathscr{H})$.

Определение 9.2. Определим *степень Саркисова* бирационального отображения 9.1.1 следующим образом:

$$\deg^{\mathrm{S}}(\chi) = (a, r = 1/c, e)$$

Отношение порядка на множестве степеней определяется лексикографически.

Определение 9.3. Говорят, что отображение χ (или линейная система $\mathscr{H}$) *имеет максимальную особенность*, если $a < 1/c$.

Предложение 9.4 (неравенство Нётера-Фано). (i) *$a \geq a'$ и равенство имеет место когда или χ – изоморфизм или π и π' – расслоения на коники и (9.1.1) замыкается до коммутативного квадрата с $Z \simeq Z'$.*

(ii) *Если пара $(X, \frac{1}{a}\mathscr{H})$ канонична, т.е. $\mathscr{H}$ не имеет максимальных особенностей и $b \geq 0$ (это выполнено автоматически, если Z – точка), то $a = a'$. Более того, χ не является изоморфизммом только если π и π' – расслоения на коники и χ индуцирует изоморфизм $Z \simeq Z'$.*

Доказательство. Рассмотрим общее разрешение особенностей

(9.4.2)
$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\chi"] \arrow[d, "\pi"] & & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ Z & & Z' \end{tikzcd}$$

Для любого $\alpha \in \mathbb{Q}$ мы можем написать

$$(9.4.3)\quad K_{\tilde X} + \alpha\tilde{\mathscr{H}} = \phi^*(K_X + \alpha\mathscr{H}) + \\ + \sum a_i E_i = \psi^*(K_{X'} + \alpha\mathscr{H}') + \sum a_i' E_i',$$

где $a_i' > 0$ поскольку линейная система $\mathscr{H}'$ свободна. Пусть L (соотв. L') – кривая на X (соотв. X'). Мы возьмем $L \sim -K_X$, если X – поверхность дель Пеццо и $L \sim F$, где F – слой, если X – расслоение на коники. Аналогично для X'. Полагая $\alpha = 1/a'$ в (9.4.3) получим

$$(9.4.4)\qquad \left(K_{\tilde X} + \frac{1}{a'}\tilde{\mathscr{H}}\right)\cdot\phi^*L = \left(\frac{b'}{a'}\psi^*F' + \sum a_i'E_i'\right)\cdot\phi^*L \geq 0$$

(поскольку $a' > 0$, $b' \geq 0$). Далее

$$\left(K_X + \frac{1}{a}\mathscr{H}\right)\cdot L = \frac{b}{a}F\cdot L = 0,$$

поэтому

$$\left(K_{\tilde X} + \frac{1}{a}\tilde{\mathscr{H}}\right)\cdot\phi^*L = \sum a_iE_i\cdot\phi^*L = 0.$$

Отсюда $a' \leq a$. Предположим, что имеет место равенство $a' = a$. Тогда мы имеем также равенство в (9.4.4):

$$\left(\frac{b'}{a'}\psi^*F' + \sum a_i'E_i'\right)\cdot\phi^*L = 0 \quad\Longrightarrow\quad b'\psi^*F'\cdot\phi^*L = E_i'\cdot\phi^*L = 0, \forall i.$$

Если Z – точка, то это равенство влечет $b' = 0$ и исключительность всех дивизоров E_i' для морфизма ϕ. Но тогда Z' – также точка и мы можем считать, что ψ – тождественное отображение и $\phi = \chi$. Так как $\rho(X)^G = \rho(X')^G = 1$, то χ – изоморфизм.

Пусть теперь Z – кривая, т.е. π – расслоение на коники. Тогда ψ^*F' и все дивизоры E_i' содержатся в слоях композиции $\pi\circ\phi$. Это ознаает, что (9.1.1) замыкается до коммутативного квадрата.

(ii) Пусть пара $(X, \frac{1}{a}\mathscr{H})$ канонична. Положим $\alpha = 1/a$ в (9.4.3). Тогда $a_i \geq 0$. Отсюда получим

$$\left(K_{\tilde X} + \frac{1}{a}\tilde{\mathscr{H}}\right)\cdot\psi^*L' = \left(\frac{b}{a}\phi^*F + \sum a_iE_i\right)\cdot\psi^*L' \geq 0.$$

С другой стороны, $(K_{\tilde X} + \frac{1}{a'}\tilde{\mathscr{H}})\cdot\psi^*L' = 0$. Отсюда $a \leq a'$. Из пункта (i) получаем тогда, что $a = a'$ и χ не является изоморфизмом только если $\dim Z = \dim Z' = 1$ и нижняя часть диаграммы (9.4.2) замыкается до коммутативного квадрата. В последнем случае из (9.4.2) с $\alpha = 1/a = 1/a'$ имеем

$$\frac{b}{a}\phi^*F + \sum a_iE_i \equiv \frac{b'}{a}\psi^*F' + \sum a_j'E_j'.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$\frac{b}{a}\phi^*F + \sum s_iE_i \equiv \frac{b'}{a}\psi^*F' + \sum s'_jE'_j,$$

где $\sum s_iE_i$ и $\sum s'_jE'_j$ – эффективные дивизоры без общих компонент. Отсюда

$$0 \le \left(\frac{b}{a}\phi^*F + \sum s_iE_i\right) \cdot \sum s'_jE'_j = \left(\sum s'_jE'_j\right)^2.$$

Это возможно только если $\sum s'_jE'_j = 0$, т. е. все дивизоры E'_j являются исключительными для ϕ. Так как $\rho(X)^G = \rho(X')^G = 2$, то χ – изоморфизм. □

9.5. Элементарные преобразования (линки) Саркисова.

Тип I.

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dd, "\pi'"] \\ X \arrow[d, "\pi"] & \\ Z = \operatorname{Spec}\Bbbk & Z' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Тип II.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\sigma'"] & \\ X \arrow[dr, "\pi"'] & & X' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Тип III.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dd, "\pi"'] & \\ & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ Z \arrow[r] & Z' = \operatorname{Spec}\Bbbk \end{tikzcd}$$

Тип IV.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ Z \arrow[dr] & & Z' \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec}\Bbbk & \end{tikzcd}$$

Теорема 9.6. *Любое бирациональное отображение раскладывается в композицию конечного числа линков* I – IV.

Доказательство. Мы предполагаем, что χ не является изоморфизмом. Предположим сначала, что линейная система $\mathscr{H}$ имеет максимальную особенность кратности $r > a$, где $r = 1/\operatorname{ct}(X, \mathscr{H})$. Пусть $\mu : Y \to X$ – раздутие этой максимальной особенности. Таким образом,

$$K_Y + c\mathscr{H}_Y = \mu^*(K_X + c\mathscr{H}), \qquad c_Y := \operatorname{ct}(Y, \mathscr{H}_Y) \ge \operatorname{ct}(X\mathscr{H}) = c.$$

Положим, $\alpha := \min\{c_Y, 1/a\}$. Предположим, что дивизор $K_Y + \alpha\mathscr{H}_Y$ численно эффективен над Z. Имеем

$$K_Y + \alpha\mathscr{H}_Y = \sigma^*\left(K_X + \alpha\mathscr{H}\right) + (1 - \alpha r)E.$$

Поэтому дивизор $K_X + \alpha\mathscr{H}$ также численно эффективен над Z. Это возможно только если $\alpha \ge 1/a$, т.е. $\alpha = 1/a$ и

$$K_Y + \alpha\mathscr{H}_Y = \frac{b}{a}\sigma^*F + (1 - r/a)E,$$

где $1 - r/a < 0$ и поэтому $b > 0$. Следовательно, π – расслоение на коники. Пусть $F^\sharp$ – собственный прообраз слоя, проходящего через центр раздутия. Тогда $(K_Y + \alpha\mathscr{H}_Y) \cdot F^\sharp < 0$. Противоречие.

Таким образом, дивизор $K_X + \alpha\mathscr{H}$ не является численно эффективным над Z. Применим программу минимальных моделей к паре $(Y, \alpha\mathscr{H}_Y)$ над Z.

Рассмотрим случай, когда мы имеем дивизориальное стягивание $\sigma' : Y \to X'$. Тогда мы получаем линк типа II. Так как $1/a > c = \mathrm{ct}(C, \mathscr{H})$, то

$$\sigma^*\left(K_X + \frac{1}{a}\mathscr{H}\right) = K_Y + \frac{1}{a}\mathscr{H}_Y + \lambda E, \quad \lambda > 0.$$

Отсюда

$$\left(K_X + \frac{1}{a}\mathscr{H}\right) \cdot \sigma_*\sigma'^*L' = \left(K_Y + \frac{1}{a}\mathscr{H}_Y\right) \cdot \sigma'^*L' + \lambda E \cdot \sigma'^*L' \geq$$
$$\geq \left(K_Y + \frac{1}{a}\mathscr{H}_Y\right) \cdot \sigma'^*L' = \left(K_{X'} + \frac{1}{a}\mathscr{H}_{X'}\right) \cdot L'$$

Если Z – точка, то отсюда получаем, что $a' < a$ и $\deg^{\mathrm{S}}(X, \mathscr{H}) > \deg^{\mathrm{S}}(X', \mathscr{H}')$. Пусть Z – кривая. Тогда $a' = a$ и

$$\mathrm{ct}(X', \mathscr{H}') \geq \mathrm{ct}(Y, \mathscr{H}_Y) \geq \mathrm{ct}(X, \mathscr{H}),$$

причем если имеет место равенство, то $e(X', \mathscr{H}') > \mathrm{ct}(X, \mathscr{H})$. Таким образом, снова $\deg^{\mathrm{S}}(X, \mathscr{H}) > \deg^{\mathrm{S}}(X', \mathscr{H}')$.

Рассмотрим случай, когда мы имеем стягивание $\sigma' : Y \to Z$ расслоенного типа. Положим $X' := Y$. Тогда мы получаем линк типа I с $\deg^{\mathrm{S}}(X, \mathscr{H}) > \deg^{\mathrm{S}}(X', \mathscr{H}')$.

Пусть теперь линейная система $\mathscr{H}$ не имеет максимальных особенностей. Из неравенства Нетера-Фано 9.4 получаем, что π и π' – расслоения на коники и $b < 0$. В этом случае дивизор $K_X + \frac{1}{a}\mathscr{H} \equiv \frac{b}{a}F$ численно не эффективен. Следовательно, существует экстремальный луч $R \neq \mathbb{R}_+[F]$ такой, что $(K_X + \frac{1}{a}\mathscr{H}) \cdot R < 0$. Рассмотрим его стягивание $\varphi_R : X \to X_1$.

Если φ_R – расслоенного типа, то это расслоение на коники и мы имеем линк типа IV с $Z' = X_1$, $\pi' = \varphi_R$. Запишем

$$\mathscr{H} \sim -aK_X + bF \sim -a'K_X + b'F',$$

где $2a' = \mathscr{H} \cdot F' = 2a + bF \cdot F' < 2a$. Таким образом, $\deg^{\mathrm{S}}(X, \pi, \mathscr{H}) > \deg^{\mathrm{S}}(X, \pi', \mathscr{H})$.

Наконец, пусть φ_R – дивизориальное стягивание. Тогда мы имеем линк типа III с $X' = X_1$, $\sigma = \varphi_R$. В этом случае

$$\mathscr{H}_{X'} \sim -a'K_{X'} = \sigma_*\mathscr{H} = \sigma_*(-aK_X + bF) = -aK_{X'} + b\sigma_*F.$$

Отсюда $a' < a$ и снова $\deg^{\mathrm{S}}(X, \pi, \mathscr{H}) > \deg^{\mathrm{S}}(X', \pi', \mathscr{H}_{X'})$.

$\square$

Задачи. (1) Обобщите неравенство Нетера-Фано 9.4 на случай, когда линейная система $\mathscr{H}'$ свободна, но необязательно обильна.

10. Группа Кремоны

В этом параграфе мы изучим группу бирациональных автоморфизмов плоскости $\mathbb{P}^2$ над совершенным полем $\Bbbk$. Эта группа обычно называется двумерной группой Кремоны и обозначается через $\mathrm{Cr}_2(\Bbbk)$. Она изоморфна группе $\Bbbk$-автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\Bbbk(x, y))$ поля рациональных функций от двух переменных $\Bbbk(x, y)$ над $\Bbbk$.

Основным результатом является описание образующих группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\Bbbk)$ над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$.

(10.0.1) $$(x_0 : x_1 : x_2) \dashrightarrow (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1) = (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1})$$

Определение 10.1. Бирациональное отображение $\chi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ называется преобразованием *де Жонкьера* (de Jonquières), если оно включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{F}_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[ddl] & \mathbb{F}_1 \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
& \mathbb{P}^1 \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{P}^1 & \\
\mathbb{P}^2 \arrow[rrr, dashed, "\chi"] & & & \mathbb{P}^2
\end{tikzcd}$$

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 10.2.

Как и в (9.4.2) рассмотрим общее разрешение особенностей

(10.2.2) $$\begin{tikzcd}
& \tilde{X} \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
X \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & X'
\end{tikzcd}$$

и запишем

$$\tilde{\mathscr{H}} = \phi^*\mathscr{H} - \sum m_i E_i^*,$$
$$K_{\tilde{X}} = \phi^* K_X + \sum E_i^*.$$

Теорема 10.3. *Любое преобразование Кремоны раскладывается в композицию преобразований де Жонкьера.*

Доказательство. Пусть $\chi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – преобразование Кремоны. По теореме 9.6 χ раскладывается в композицию $\mathbb{P}^2 \leftarrow \mathbb{F}^1 \dashrightarrow \mathbb{F}^1 \to \mathbb{P}^2$, мы имеем $\square$

Теорема 10.4. *Любое преобразование де Жонкьера* $\chi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ *раскладывается в композицию квадратичных преобразований.*

Доказательство. Мы можем считать, что χ задается формулой

$$\chi : (x, y) \longmapsto \left(x, \frac{\alpha(x)y + \beta(x)}{\gamma(x)y + \delta(x)}\right), \quad \text{где} \quad \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0.$$

Это преобразованние может быть разложено в композицию преобразований

$$\chi_1 : (x, y) \longmapsto (x, yp(x))$$

$$\chi_2 : (x, y) \longmapsto (x, y/q(x))$$

$$\chi_3 : (x, y) \longmapsto (x, y + r(x))$$

$$\chi_4 : (x, y) \longmapsto (x, 1/y)$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ – некоторые многочлены. Ясно, что χ_4 является квадратичным, а преобразования χ_1 и χ_2 раскладываются в композиции квадратичных преобразований вида

$$(x, y) \longmapsto (x, y(x - c)), \quad c \in \Bbbk$$

и обратных к ним. Для χ_3 мы запишем $r(x) = (x - c)r_1(x)$, где c – корень $r(x)$. Тогда χ_3 раскладываются в композицию $(x, y) \mapsto (x, y(x - c)^{-1})$, $(x, y) \mapsto (x, y + r_1(x))$, и $(x, y) \mapsto (x, y(x - c))$. Далее – по индукции. □

Теорема 10.5. *Пусть* $C \subset \mathbb{P}^2$ *– кривая степени* d*. Предположим, что пара* $(\mathbb{P}^2, \frac{3}{d}C)$ *имеет лишь канонические особенности. Тогда для любого преобразования Кремоны* $\chi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ *кривая* $\chi(C)$ *имеет степень* $\geq d$*.*

Задачи.

(1) Докажите, что любое квадратичное преобразование Кремоны в некоторых координатах может быть приведено к одному из следующих форм:

$$(x_0 : x_1 : x_2) \longmapsto \begin{cases} (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1) \quad (\text{см. } (10.0.1)) \\ (x_0x_2 : x_1x_2 : x_0^2) \\ (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2 + x_0x_2) \end{cases}$$

(2) Докажите, что любое квадратичное преобразование Кремоны является преобразованием де Жонкьера.

Список литературы

[1] *Manin Y. I.* Rational surfaces over perfect fields // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1966. — no. 30. — Pp. 55–113.

[2] *Манин Ю. И.* Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика. — Москва: Наука, 1972.

[3] *Исковских В. А.* Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1979. — Т. 43, № 1. — С. 19–43.

[4] *Исковских В. А.* Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // *УМН.* — 1996. — Т. 51, № 4(310). — С. 3–72.

[5] *Исковских В. А.* Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых // *Матем. сб.* — 1967. — Т. 74(116), № 4. — С. 608–638.

[6] *Исковских В. А.* Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса // *Матем. сб.* — 1970. — Т. 83(125), № 1(9). — С. 90–119.

[7] *Милн Д.* Этальные когомологии. — Москва: Мир, 1983.

[8] *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. — Москва: Мир, 1981.

[9] *Shepherd-Barron N. I.* The rationality of quintic Del Pezzo surfaces—a short proof // *Bull. London Math. Soc.* — 1992. — Vol. 24, no. 3. — Pp. 249–250.

[10] *Ленг С.* Алгебра. — Москва: Мир, 1968.

[11] *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. — II изд. — Москва: Наука, 1988. — Т. I, II.