2007/2008 учебный год.

Ю.Г. Прохоров
Спецкурс "Алгебраическая геометрия"
(проблемы рациональности)

Лекции читаются по понедельникам
10.50-12.25, ауд. 12-25

Программа

(1) Рациональные отображения. Точки неопределенности. Случай кривых. Рациональное отображение в проективное многообразие определено в коразмерности 1. Рациональность и унирациональность (над незамкнутыми полями). Рациональные точки. Лемма Нишимуры. Примеры рациональных многообразий. Плоские кривые. Квадрики.

(2) Рациональные точки на квадриках. Поля типа C_1. Теорема Шевалле. Алгебраическое расширение поля типа C_1 – снова поле типа C_1. Теорема Цзена. Понятие о принципе Хассе.

(3) Кубические гиперповерхности. Некоторые условия рациональности и унирациональности. Существование прямой на кубической поверхности над алгебраически замкнутым полем. Дифференциальные (1-)формы. Определение и простейшие свойства. Примеры.

(4) Рациональные дифференциальные формы. Их свойства. Продолжение рациональной дифференциальной формы на подмножество коразмерности ≥ 2. Поведение форм при рациональных отображениях. Численные препятствия к рациональности и унирациональности.

(5) Понятие кодаировой размерности. Дифференциальные формы старшей степени на гиперповерхностях. О проблеме Э. Нетер. Группа Брауэра (определение). Когомологии групп. Интерпретация $H^0(G, A)$, $H^1(G, A)$ и $H^2(G, A)$.

(6) Когомологии групп (продолжение). Когомологии Галуа $H^q(K/k, K)$ и $H^1(K/k, K^*)$ (теорема Гильберта 90). Группа Брауэра (продолжение). Примеры. связь с $H^2(K/k, K^*)$.

(7) Группа Брауэра локального поля. Препятствия к рациональности полей инвариантов. Неразветвленная группа Брауэра. Достаточное условие ее нетривиальности.

(8) Неразветвленная группа Брауэра и достаточное условие ее нетривиальности (повторение). Когомологии $H^q(G, M)$, где G – конечная группа, а M – бесконечно делимый модуль с тривиальным действием G. Следствия. Построение контрпримера к проблеме Э. Нетер.

(9) Неразветвленная группа Брауэра поля рацинальных функций $K(t)$ ($\Phi \operatorname{Br} K(t) = \Phi \operatorname{Br} K$.). Стабильная эквивалентность различных факторов по точным представлениям конечной группы.

Задачи.

(1) Докажите аналог теоремы Хассе для полных пересечений в $\mathbb{P}^n$.

(2) Пусть X – гиперповерхность в $\mathbb{P}^{p-2}$ над $\mathbb{F}_p$ определенная уравнением $x_0^{p-1} + \cdots x_{p-2}^{p-1} = 0$. Докажите, что X неособа и не имеет $\mathbb{F}_p$-точек.

(3) Найдите число $\Bbbk$-точек на невырожденной квадрике $\sum x_i^2 = 1$ над полем $\Bbbk = \mathbb{F}_q$.

(4) Двумерная невырожденная квадрика $X \subset \mathbb{P}^3$ имеет $\Bbbk$-точку. Следует ли отсюда, что $X \simeq \mathbb{P}^1_{\Bbbk} \times \mathbb{P}^1_{\Bbbk}$?

(5) Сформулируйте необходимые и достаточные условия рациональности квадрик над $\mathbb{R}$. Когда эти квадрики изоморфны?

(6) Пусть X – алгебраическое многообразие и пусть $f \in \Bbbk(X)$ – рациональная функция такая, что $df = 0$. Когда это возможно?

(7) Докажите, что неособое полное пересечение $\mathbb{P}^n$ гиперповерхностей степеней d_1 и d_2 нерационально при $d_1 + d_2 \geq n + 1$.

(8) Докажите, что $\Bbbk(x, y)$ – не поле типа C_1.

(9) Рассмотрим кубическую поверхность

$$t(x^2 + y^2) = (4z - 7t)(z^2 - 2t^2)$$

Докажите, что множество вещественных точек имеет две компоненты связности, причем одна из них не имеет рациональных точек, а на другой рациональные точки плотны.

(10) Коразмерность семейства $2n$-мерных кубик, содержащих пару скрещенных подпространств размерности n, в пространстве всех кубик.

(11) Докажите, что конечномерная простая алгебра обязательно содержит единицу.

(12) Докажите, что произведение алгебры с ее инверсной изоморфно матричной алгебре.

(13) Докажите, что класс (обобщенной) кватернионной алгебры – элемент второго порядка в группе Брауэра.

(14) Докажите, что алгебра, заданная соотношениями $e_g \cdot e_h = f(g,h)e_{gh}$, $e_g \cdot b = g(b) \cdot e_g$, является центральной простой.

(15) Приведите примеры циклических некватернионных алгебр.

(16) Пусть K – поле частных кольца $\mathbb{Q}[x,y]/(y^2 - x^3 + x)$ (поле рациональных функций на эллиптической кривой). Рассмотрим обобщенную кватернионную алгебру $\mathbb{H}$ с $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{j}^2 = x$. Докажите, что эта алгебра неразветвлена. Докажите, что $\mathbb{H}$ не лежит в образе естественного отображения $\operatorname{Br}\mathbb{Q} \to \operatorname{Br} K$.

(17) Приведите пример конечно порожденного расширения полей $K/\Bbbk$ степени трансцендентности 1 такого, что отображение $\operatorname{Br}\Bbbk \to \operatorname{Br} K$ не является инъективным. *Указание*: Рассмотрите кватернионную алгебру.

(18) Дайте прямое доказательство того, что построенный элемент $\Phi\mathrm{Br}\,\Bbbk(V)^G$ (как образ элемента $H^2(G, \Bbbk^*)$) зануляется, если группа G абелева.