

Экзаменационные вопросы по алгебре,

1 семестр, 2 поток, 2008/09 учебный год

лектор – Ю. Г. Прохоров

- (1) Системы линейных уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк. Метод Гаусса.
- (2) Ассоциативность отображений. Подстановки. Понятие группы. Группа подстановок.
- (3) Разложение подстановки в произведение транспозиций. Четность подстановок.
- (4) Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
- (5) Определитель квадратной матрицы. Полилинейность и кососимметричность определителя.
- (6) Вычисление определителя при помощи элементарных преобразований. Определитель Вандермонда.
- (7) Определитель транспонированной матрицы. Определитель с углом нулей.
- (8) Разложение определителя по строке или столбцу. Фальшивое разложение.
- (9) Теорема и формулы Крамера.
- (10) Операции над матрицами. Их свойства. Понятие кольца.
- (11) Обратные матрицы. Единственность. Формула для обратной матрицы.
- (12) Определитель произведения матриц. Критерий существования обратной матрицы.
- (13) Матричные единицы. Элементарные матрицы. Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.
- (14) Понятие векторного пространства. Примеры. Понятие линейной зависимости векторов и ее свойства.
- (15) Базис системы векторов. Стандартный базис в \mathbb{R}^n . Основная лемма о линейной зависимости. Следствия. Ранг системы векторов.
- (16) Критерий равенства определителя нулю (в терминах рангов).
- (17) Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы.
- (18) Ранг произведения матриц. Нахождение базиса и ранга системы векторов.
- (19) Матричная запись систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Связь решений неоднородной и соответствующей однородной систем линейных уравнений.
- (20) Базис и размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Задание подпространства однородной системой линейных уравнений.
- (21) Понятие кольца, простейшие свойства, обратимые элементы и делители нуля. Понятие поля. Примеры. Характеристика поля.
- (22) Построение поля комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение. Его свойства.
- (23) Формула Муавра. Извлечение корней в поле комплексных чисел. Группа корней из 1. Понятие циклической группы. Первообразные корни.
- (24) Построение колец вычетов. Делители нуля и обратимые элементы. Когда кольцо вычетов является полем?
- (25) Кольцо многочленов $R[x]$ от одной переменной над коммутативным кольцом R . Степень многочлена. Свойства. Делители нуля и обратимые элементы (для случая, когда R не имеет делителей нуля).

- (26) Корни многочлена, теорема Безу и ее следствия, схема Горнера. Функциональное и алгебраическое равенство многочленов. Интерполяционная формула Лагранжа.
- (27) Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной над полем. Свойства делимости многочленов.
- (28) Наибольший общий делитель в кольце многочленов от одной переменной над полем (единственность, существование). Алгоритм Евклида. Представление НОД (f, g) в виде $fu + gv$.
- (29) Неприводимые элементы в кольце многочленов над полем. Примеры. Однозначное разложение на неприводимые множители.
- (30) Дифференцирование в кольце многочленов от одной переменной. Поведение кратности неприводимого множителя многочлена при дифференцировании. Отделение кратных множителей. Формула Тейлора.
- (31) Понятие алгебраически замкнутого поля. Свойство сходимости последовательностей комплексных чисел. Лемма о возрастании модуля многочлена.
- (32) Лемма Даламбера. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.
- (33) Разложение на неприводимые множители многочленов над полем действительных чисел. Построение поля частных (поля отношений) области целостности. Поле рациональных дробей. Правильные и несократимые дроби.
- (34) Разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей и многочлена.
- (35) Понятие факториального кольца. Примеры. Лемма Гаусса и ее следствия.
- (36) Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.
- (37) Кольцо многочленов от нескольких переменных над полем. Степень. Делители нуля. Функциональное и алгебраическое равенство.
- (38) Симметрические многочлены. Примеры. Формулы Виета. Лексикографический порядок. Старший член и его свойства.
- (39) Основная теорема о симметрических многочленах. Ее применения. Формулы Виета. Дискриминант.
- (40) Порождающие элементы в группе. Примеры. Циклические подгруппы. Порядки элементов. Их свойства.
- (41) Изоморфизм циклических групп одного порядка. Подгруппы циклических групп.
- (42) Разбиение на смежные классы. Теорема Лагранжа и ее следствия.
- (43) Нормальные подгруппы и гомоморфизмы. Примеры гомоморфизмов и их ядер.
- (44) Построение факторгруппы. Теорема о гомоморфизме групп.
- (45) Идеалы в кольцах. Построение факторкольца. Теорема о гомоморфизме колец. Примеры.
- (46) Результант и дискриминант.
- (47) Теорема Декарта.
- (48) * Когда факторкольцо коммутативного кольца с единицей не имеет делителей нуля и когда оно является полем?
- (49) * Алгебраические и целые алгебраические числа.
- (50) * Цикличность мультипликативной группы конечного поля.
- (51) * Теорема Штурма.

*Вопросы, помеченные *, не входят в обязательный материал.