

Экзаменационные вопросы по алгебре

1 семестр, 2 поток, 2010/11 учебный год

лектор – Ю. Г. Прохоров

1. Системы линейных уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк. Метод Гаусса.
2. Ассоциативность отображений. Обратное отображение. Подстановки. Их количество. Понятие группы. Группа подстановок.
3. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Изменение четности при транспозиции. Четность подстановок.
4. Понятие гомоморфизма групп. Примеры и простейшие свойства. Порождающие элементы. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
5. Определитель. Определитель треугольной матрицы. Полилинейность и кососимметричность определителя.
6. Вычисление определителя при помощи элементарных преобразований. Определитель Вандермонда.
7. Определитель транспонированной матрицы. Определитель с углом нулей.
8. Разложение определителя по строке или столбцу. Фальшивое разложение.
9. Теорема и формулы Крамера.
10. Операции над матрицами. Их свойства. Ассоциативность умножения матриц. Матричная запись систем линейных уравнений. Понятие кольца.
11. Обратимые элементы и делители 0 в кольце. Кольцо матриц. Обратные матрицы. Единственность. Формула для обратной матрицы.
12. Делители 0 в кольце матриц. Критерий существования обратной матрицы.
13. Матричные единицы. Элементарные матрицы. Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Определитель произведения матриц. Полная и специальные линейные группы.
14. Понятие векторного пространства. Примеры. Понятие линейной зависимости векторов и ее свойства. Линейная зависимость m векторов в \mathbb{R}^n ($m > n$).
15. Базис системы векторов. Стандартный базис в \mathbb{R}^n . Основная лемма о линейной зависимости. Следствия. Ранг системы векторов.
16. Ранг матрицы. Критерий равенства определителя нулю (в терминах рангов).
17. Теорема о ранге матрицы.
18. Ранг произведения матриц. Нахождение базиса и ранга системы векторов.
19. Теорема Кронекера-Капелли. Связь решений неоднородной и соответствующей однородной систем линейных уравнений.
20. Базис и размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Задание подпространства однородной системой линейных уравнений.

21. Понятие поля. Примеры. Характеристика поля. Построение кольца вычетов. Обратимые элементы и делители 0. Когда кольцо вычетов является полем?
22. Построение поля комплексных чисел. Изоморфизмы объектов в алгебре. Поле комплексных чисел (аксиоматическое определение). Алгебраическое и геометрическое представление. Комплексное сопряжение.
23. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел.
24. Группа корней из 1. Ее изоморфизм с группой вычетов. Первообразные корни. Кольцо многочленов (над коммутативным ассоциативным кольцом с 1).
25. Алгебра многочленов над полем. Подстановка элемента в многочлен. Схема Горнера. Теорема Безу. Понятие делимости (в кольцах). Свойства.
26. Деление многочленов с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.
27. Неприводимые многочлены. Факториальность кольца многочленов над полем. Следствия. Число корней многочлена.
28. Функциональное равенство многочленов. Интерполяционная формула Лагранжа.
29. Дифференцирования. Дифференцирования алгебры многочленов (от одной переменной). Кратные множители и корни. Понижение кратности при дифференцировании. Отделение кратных множителей.
30. Формула Тейлора. Теорема Виета. Алгебраически замкнутые поля. Сходимость последовательностей комплексных чисел.
31. Лемма о возрастании модуля многочлена. Лемма Даламбера.
32. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Неприводимые многочлены над полем комплексных и полем действительных чисел.
33. Конструкция поля частных. Поле рациональных функций.
34. Простейшие и правильные дроби. Разложение в сумму простейших.
35. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Степень многочлена от нескольких переменных. Однородные многочлены. Свойства.
36. Факториальные кольца. Лемма Гаусса. Ее следствия.
37. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.
38. Симметрические многочлены. Лексикографический порядок. Старший член. Его свойства.
39. Теорема о симметрических многочленах.
40. Результант и дискриминант.
41. Подгруппы, порожденные элементами. Примеры. Циклические группы. Порядки элементов. Изоморфизм циклических групп одного порядка. Подгруппы циклических групп.
42. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Следствия.
43. Цикличность мультипликативной группы конечного поля.
44. Гомоморфизмы групп. Их свойства. Конструкция факторгруппы. Теорема о гомоморфизме.