

Экзаменационные вопросы по алгебре

3 семестр, 2 поток, 2011/12 учебный год

лектор – Ю. Г. Прохоров

- (1) Нормальные подгруппы. Примеры. Гомоморфизмы, изоморфизмы и автоморфизмы групп. Внутренние автоморфизмы. Центр группы. Примеры.
- (2) Смежные классы. Факторгруппы. Теорема о гомоморфизме групп. Примеры. Группа внутренних автоморфизмов.
- (3) Прямые произведения групп. Внешнее и внутренние определения. Примеры. Разложение циклической группы в прямое произведение. Лемма о факторизации по сомножителям.
- (4) Абелевы группы. Базисы и ранги. Свободные абелевы группы. Число элементов базиса в свободной абелевой группе не зависит от его выбора.
- (5) Подгруппа свободной абелевой группы свободна.
- (6) Универсальное свойство свободных абелевых групп. Приведение целочисленной матрицы к диагональному виду элементарными преобразованиями.
- (7) Замена базиса в свободной группе. Теорема о согласованных базисах.
- (8) Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (существование). Подгруппа кручения и p -примарная подгруппа в абелевой группе. Их существование и свойства.
- (9) Теорема о строении конечно порожденных абелевых групп (единственность).
- (10) Показатель абелевой группы. Существование элемента, порядок которого равен показателю.
- (11) Коммутант группы, его свойства. Пример: группа диэдра.
- (12) Разрешимые группы. Свойства.
- (13) Разрешимость группы треугольных матриц над полем.
- (14) Коммутант знакопеременной группы.
- (15) Коммутант специальной линейной группы.
- (16) Действие группы на множестве. Его ядро, орбиты и стабилизаторы. Разложение в объединение орбит.
- (17) Связь орбиты и стабилизатора. Примеры действий. Различные действия группы на себе. Регулярное действие группы, теорема Кэли.
- (18) Действие группы сопряжениями, разбиение на классы сопряжённых элементов. Нетривиальность центра конечной p -группы. Группа порядка p^2 абелева. Разрешимость групп порядка p^k .
- (19) Первая теорема Силова. Примеры силовских подгрупп.
- (20) Вторая теорема Силова.
- (21) Третья теорема Силова. Разрешимость групп порядка pq .
- (22) Классы сопряжённых элементов симметрической группы. Простота группы A_n .
- (23) Простота группы $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$.

- (24) Кольца. Примеры. Идеалы. Факторкольца. Гомоморфизмы колец. Примеры. Теорема о гомоморфизме колец. Простота кольца матриц.
- (25) Кольца главных идеалов. Примеры. Факториальные кольца. Факториальность колец главных идеалов.
- (26) Поля. Характеристика поля. Простые поля. Их классификация. Расширения полей. Алгебраические и трансцендентные элементы.
- (27) Минимальный многочлен алгебраического элемента, его свойства. Факторкольцо $k[t]/(f)$. Когда оно не имеет делителей нуля и когда оно – поле. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.
- (28) Критерий алгебраичности элемента. Теорема о башне полей. Алгебраические элементы образуют подполе.
- (29) Поля разложения. Существование и единственность. Примеры (кубические многочлены).
- (30) Отображение Фробениуса. Конечные поля. Первая теорема о строении.
- (31) Вторая теорема о строении конечных полей. Мультипликативная группа конечного поля. Следствия. Неприводимые многочлены над конечными полями.
- (32) Представления групп. Примеры. Регулярное представление. Изоморфизмы и гомоморфизмы. Подпредставления. Неприводимые представления. Прямые суммы представлений. Примеры.
- (33) Эквивалентность представления конечной группы над \mathbb{C} унитарному представлению. Теорема Машке (доказательство только над \mathbb{C}).
- (34) Неприводимые комплексные представления абелевых групп. Одномерные представления.
- (35) Характеры представлений, их свойства.
- (36) Лемма Шура. Следствия. Матричная форма.
- (37) Соотношения ортогональности. Следствия.
- (38) Регулярное представление. Разложение на неприводимые. Следствия. Сумма квадратов размерностей неприводимых представлений.
- (39) * Совпадение числа неприводимых комплексных представлений с числом классов сопряжённых элементов.
- (40) Алгебры над полем. Идеалы и гомоморфизмы алгебр. Конечномерные алгебры с делением. Алгебра кватернионов.
- (41) * Гомоморфизм $SU_2 \rightarrow SO_3$.
- (42) Теорема Фробениуса.