

Экзаменационные вопросы по алгебре,

1 семестр, 2 поток, 2012/13 учебный год

лектор – Ю. Г. Прохоров

- (1) Системы линейных уравнений. Приведение матрицы к ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк. Метод Гаусса. Критерии совместности и определенности системы линейных уравнений.
- (2) Ассоциативность отображений. Обратное отображение. Его существование и единственность. Подстановки. Их свойства и количество.
- (3) Транспозиции. Разложение подстановки в произведение транспозиций. Изменение четности перестановки при транспозиции. Четность подстановки. Четность произведения. Число четных и нечетных подстановок.
- (4) Понятие группы. Примеры. Циклы. Разложение подстановки в произведение независимых циклов.
- (5) Определитель. Определитель треугольной матрицы. Полилинейность определителя.
- (6) Кососимметричность определителя. Определитель транспонированной матрицы.
- (7) Вычисление определителя при помощи элементарных преобразований. Определитель с углом нулей.
- (8) Разложение определителя по строке или столбцу. Фальшивое разложение.
- (9) Определитель Вандермонда. Теорема и формулы Крамера.
- (10) Операции над матрицами. Их свойства. Ассоциативность умножения матриц. Матричная запись систем линейных уравнений. Понятие кольца. Обратимые элементы и делители 0 в кольце.
- (11) Кольцо матриц. Обратные матрицы. Единственность. Формула для обратной матрицы. Делители 0 в кольце матриц. Критерий обратимости матрицы.
- (12) Матричные единицы. Элементарные матрицы. Разложение невырожденной матрицы в произведение элементарных. Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.
- (13) Определитель произведения матриц. Полная и специальные линейные группы.
- (14) Понятие векторного пространства. Примеры. Понятие линейной зависимости векторов и ее свойства. Критерий равенства определителя нулю. Базис системы векторов. Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$.
- (15) Основная лемма о линейной зависимости. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Размерность пространства. Следствия из основной леммы о линейной зависимости.
- (16) Теорема о ранге матрицы.
- (17) Ранг произведения матриц. Нахождение базиса и ранга системы векторов.
- (18) Теорема Кронекера-Капелли. Связь решений неоднородной и соответствующей однородной систем линейных уравнений.
- (19) Базис и размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Задание подпространства однородной системой линейных уравнений.
- (20) Понятие поля. Примеры. Характеристика поля. Построение колец вычетов. Делители нуля и обратимые элементы. Когда кольцо вычетов является полем? Теорема Вилсона.

- (21) Алгебры над полем. Примеры. Конечномерные алгебры: делители нуля и обратимые элементы. Построение поля комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное сопряжение. Его свойства.
- (22) Формула Муавра. Извлечение корней в поле комплексных чисел. Группа корней из 1. Понятие циклической группы. Первообразные корни.
- (23) Кольцо многочленов $R[x]$ от одной переменной над коммутативным кольцом R . Степень многочлена. Свойства. Делители нуля и обратимые элементы (для случая, когда R не имеет делителей нуля).
- (24) Подстановка элемента в многочлен. Схема Горнера. Корни многочленов. Теорема Безу. Свойства делимости. Деление с остатком в кольце многочленов от одной переменной над полем.
- (25) Наибольший общий делитель в кольце многочленов от одной переменной над полем. Алгоритм Евклида. Представление НОД (f, g) в виде $fu + gv$.
- (26) Неприводимые элементы в кольце многочленов над полем. Примеры. Разложение на неприводимые множители. Многочлены и функции. Интерполяционная формула Лагранжа.
- (27) Дифференцирования. Дифференцирования кольца многочленов. Поведение кратности корня многочлена при дифференцировании. Отделение кратных множителей. Формула Тейлора.
- (28) Понятие алгебраически замкнутого поля. Свойство сходимости последовательностей комплексных чисел. Лемма о возрастании модуля многочлена.
- (29) Лемма Даламбера.
- (30) Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Следствия (неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$).
- (31) Построение поля частных (поля отношений) области целостности. Поле рациональных дробей. Правильные и несократимые дроби.
- (32) Разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей и многочлена.
- (33) Кольцо многочленов от нескольких переменных над полем. Степень. Делители нуля. Понятие факториального кольца. Примеры.
- (34) Лемма Гаусса и ее следствия.
- (35) Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом.
- (36) Симметрические многочлены. Примеры. Лексикографический порядок. Старший член и его свойства.
- (37) Основная теорема о симметрических многочленах.
- (38) Формулы Виета. Дискриминант. Результант. Из связь. Свойства.
- (39) Вычисление результата через определитель.
- (40) Порождающие элементы в группе. Циклические подгруппы. Примеры. Порядки элементов. Их свойства.
- (41) Изоморфизм циклических групп одного порядка. Строение циклических групп.
- (42) Смежные классы. Примеры. Теорема Лагранжа и ее следствия.
- (43) Нормальные подгруппы и гомоморфизмы. Примеры гомоморфизмов и их ядер.
- (44) Построение факторгруппы. Теорема о гомоморфизме групп.
- (45) Идеалы в кольцах. Примеры. Построение факторкольца.
- (46) Теорема о гомоморфизме колец. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.