Теорема (Критерий невырожденности матрицы)**.** *Пусть A – квадратная матрица. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *A невырождена;*

(2) *столбцы A линейно независимы;*

(3) *строки A линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – столбцы матрицы. Запишем условие линейной зависимости $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n = 0$, где $\lambda_i \in \Bbbk$, а 0 – нулевой столбец. Условие может быть переписано в виде

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Это однородная система линейных уравнений. По теореме Крамера $|A| \neq 0 \iff$ система определена (т.е. $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ – единственное решение) $\iff$ столбцы $A_1, \ldots, A_n$ линейно независимы. Это доказывает (1) $\iff$ (2). Так как $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$, то аналогично получаем (1) $\iff$ (3). □

Определение. Пусть V – векторное пространство и пусть $M \subset V$ – любое подмножество (система векторов). Говорят, что элементы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \in M$ образуют *базис* M, если

(1) векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ линейно независимы,

(2) для любого $\mathbf{v} \in M$ векторы $\mathbf{v}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ линейно зависимы.

Базисом пространства V называется базис $M = V$.

Замечание. Элементы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \in M$ образуют базис тогда и только тогда, когда выполнены условия (1) и $(2)'$:

$(2)'$ любой вектор $\mathbf{v} \in M$ линейно выражается через $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$.

Замечание. Мы рассматриваем только базисы из конечного числа элементов.

Замечание. Базис рассматривается как упорядоченное множество.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется стандартный базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, где $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, \ldots, 0)$.

Предложение. *Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \in M$ – базис. Тогда любой вектор $\mathbf{v} \in M$ однозначно выражается через $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$. Коэффициенты этого разложения называются* координатами *вектора.*

Доказательство. .... $\square$

Теорема (лемма о линейной зависимости). *Пусть векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ линейно независимы и линейно выражаются через векторы $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$. Тогда $n \le m$.*

Доказательство. Предположим, что $n > m$. Запишем

$$\mathbf{v}_j = \alpha_{1,j}\mathbf{w}_1 + \dots + \alpha_{m,j}\mathbf{w}_m.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,j}\mathbf{w}_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\lambda_j \right) \mathbf{w}_i.$$

Рассмотрим систему однородных линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\lambda_j = 0, \quad i = 1, \dots m.$$

относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Так как число неизвестных меньше числа уравнений, то система имеет ненулевое решение такое, что $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$. □

Следствие. *Любой базис $M \subset V$ содержит одинаковое количество элементов. Более точно, если $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ – базис M, то любая система из n векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in M$ при $n > m$ линейно зависима. Если же $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ также образуют базис M, то $m = n$.*

Доказательство. Векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ линейно выражаются через $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$. Если $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ линейно независимы, то по лемме о линейной зависимости $n \leq m$. Если же $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ образуют базис, то аналогично получаем $m \leq n$. $\square$

Определение. Если $M \subset V$ – любое подмножество, то *рангом* M (обозначается $\operatorname{rk} M$) называется число элементов базиса (если конечный базис существует). Рангом столбцов матрицы называется ранг системы ее столбцов (как системы векторов $\mathbb{R}^n$). Рангом строк матрицы называется ранг системы ее строк*. *Размерностью*† пространства V (обозначается $\dim V$) называется ранг $M = V$.

Замечание. Если $M \subset V$, то $\operatorname{rk} M$ равен максимальному числу линейно независимых векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in M$.

Следствие. *Пусть* $\dim V = n$. *Тогда система из* m *векторов в* V *линейно зависима при* $m > n$.

Следствие. *Если все векторы системы* $M \subset V$ *линейно выражаются через векторы системы* $M' \subset V$, *то* $\operatorname{rk} M \leq \operatorname{rk} M'$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ – базис M, а $\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m$ – базис M'. По условию векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ линейно выражаются

*Позже мы докажем, что для любой матрицы ранги строк и столбцов совпадают.

†Термин *ранг* употребляется в отношении подмножества (чаще всего конечного) $M \subset V$. Термин *размерность* употребляется только в отношении векторного пространства.

через векторы M', а любой вектор M' линейно выражается через $\mathbf{v}_1', \ldots, \mathbf{v}_m'$. Следовательно, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ линейно выражаются через $\mathbf{v}_1', \ldots, \mathbf{v}_m'$. По лемме о линейной зависимости $n \leq m$. □

Следствие. *Пусть* $\dim V = n$, $M \subset V$ *и пусть* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \in M$ *– линейно независимые векторы. Тогда* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k \in M$ *можно дополнить до базиса* M*.*

Доказательство. Если для любого $\mathbf{x} \in M$ векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, $\mathbf{x}$ линейно зависимы, то $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ – базис M. В противном случае существует $\mathbf{x} \in M$ такой, что векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$, $\mathbf{x}$ линейно независимы. Полагаем $\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{x}$ и продолжаем процесс. Процесс оборвется поскольку число линейно независимых векторов не превосходит n. □

Следствие. *Пусть* $W \subset V$ *– подпространство векторного пространства. Тогда* $\dim W \leq \dim V$ *и если* $\dim W = \dim V$*, то* $W = V$*.*

Доказательство. Первое неравенство следует из предыдущего следствия (полагаем $M' = V$, $M = W$).

Пусть $\dim W = \dim V$. Докажем[‡], что $W = V$. Пусть $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ – базис V и пусть $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ – базис W. Так как $w_i \in V$, то мы можем записать

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mathbf{v}_j.$$

[‡]Имеется короткое доказательство (см. ниже)

Если матрица $A = (a_{i,j})$ вырождена, то ее строки линейно зависимы: $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{i,j} = 0\ \forall j$. Но тогда

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \mathbf{v}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_{i,j} \right) \mathbf{v}_j = 0.$$

Противоречие показывает, что матрица $A = (a_{i,j})$ невырождена. Следовательно, существует обратная матрица $A^{-1} = (b_{i,j})$. Имеем

$$\sum_{i=1}^n b_{i,j} \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^n b_{k,i} \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \mathbf{v}_j \right) = \\ = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,j} \right) \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \delta_{k,j} \mathbf{v}_j = \mathbf{v}_k.$$

т.е. $\mathbf{v}_k \in W\ \forall k$. Поэтому $V \subset W$. $\square$

Другое доказательство. Система $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W \subset V$ может быть дополнена до базиса V. Так как $\dim V = n$, то $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ – уже базис V. Следовательно, $V \subset W$. $\square$

Теорема (Теорема о ранге матрицы). *Ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов и равен наивысшему порядку отличного от нуля минора.*

Лемма. *Ранг (системы строк) матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A одним элементарным преобразованием строк. Тогда строка матрицы A' линейно выражаются через строки матрицы A. Следовательно, $\operatorname{rk} A' \leq \operatorname{rk} A$. Преобразование $A \mapsto A'$ обратимо, поэтому $\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk} A'$. $\square$

Лемма. *При элементарных преобразованиях строк матрицы линейные зависимости (независимости) системы ее столбцов не меняются.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{i,j})$ – $n \times m$-матрица и пусть $C_1, \ldots, C_m$ – ее столбцы. Пусть матрица $A' = (a'_{i,j})$ получена из матрицы A одним элементарным преобразованием строк и пусть $C'_1, \ldots, C'_m$ – столбцы A'. Предположим, что имеется линейная зависимость $\sum_{j=1}^m \lambda_j C_j = 0$. Это эквивалентно системе n равенств

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{i,j} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Пусть, например, $A \mapsto A'$ – преобразование типа (I), т.е.

$$a'_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{при } i \neq i_0 \\ a_{i_0,j} + \mu a_{i_1,j} & \text{при } i = i_0 \end{cases}$$

для некоторых $i_0 \neq i_1$ и μ. Тогда равенство (2) сохраняется для

$a'_{i,j}$ при $i \neq i_0$, а для $i = i_0$ оно дает нам

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{i_0,j} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (a'_{i_0,j} - \mu a_{i_1,j}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a'_{i_0,j} - \mu \sum_{j=1}^{m} a_{i_1,j}$$

Поскольку второй член равен нулю, то $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a'_{i_0,j} = 0$. Следовательно, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j C'_j = 0$.

Наоборот, предположим, что столбцы $C_{i_1}, \ldots, C_{i_r}$ линейно независимы. Если соответствующие столбцы $C_{i_1}, \ldots, C_{i_r}$ линейно зависимы, то из обратимости преобразования $A \mapsto A'$ мы получаем линейную зависимость столбцов $C_{i_1}, \ldots, C_{i_r}$. □

Следствие. *Ранг системы столбцов матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

Лемма. *Пусть в матрице A минор, стоящий на пересечении строк $i_1, \ldots, i_r$ и столбцов $j_1, \ldots, j_r$, отличен от нуля. Тогда соответствующие строки (с номерами $i_1, \ldots, i_r$) линейно независимы. То же верно для столбцов (с номерами $j_1, \ldots, j_r$).*

Доказательство. Пусть M – соответствующая матрица. Согласно критерию невырожденности матрицы строки и столбцы M линейно независимы. Следовательно, линейно независимы также и удлинённые строки и столбцы. □

Лемма. *Ранг системы строк ступенчатой матрицы $A = (a_{i,j})$ равен рангу системы ее столбцов и равен числу ее ненулевых строк.*

Доказательство. Пусть a_{1,j_1}, …, a_{r,j_r} – лидеры строк, где $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ и r – числу ненулевых строк. Тогда минор, стоящий на пересечении строк $1, \ldots, r$ и столбцов $j_1, \ldots, j_r$, отличен от нуля. По предыдущей лемме ненулевые строки матрицы A линейно независимы и поэтому ранг системы строк A равен r. Далее, главные столбцы $A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}$ также линейно независимы. Докажем, что они образуют базис системы столбцов. Пусть A_k – произвольный столбец матрицы A. Достаточно показать, что имеет место разложение $A_k = \lambda_1 A_{j_1} + \cdots + \lambda_r A_{j_r}$. Рассмотрим его как систему линейных уравнений относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Матрица этой системы треугольна и имеет определитель (равный минору) отличный от нуля. Следовательно, система совместна. □

Следствие. *Ранг системы строк матрицы равен рангу системы ее столбцов.*

Доказательство теоремы а ранге. Осталось доказать, что ранг матрицы не может превосходить наивысшего порядка отличного от нуля минора. Пусть в матрице строки с номерами $i_1, \ldots, i_r$ образуют базис системы строк. Докажем, что некоторый минор порядка r отличен от нуля. Пусть A' – матрица, полученная из A вычёркиванием всех строк кроме $i_1, \ldots, i_r$. Тогда $\operatorname{rk} A' = r$ (поскольку строки A' линейно независимы). Пусть теперь столбцы матрицы A' с номерами $j_1, \ldots, j_r$ образуют базис системы ее столбцов и пусть A'' –

матрица, полученная из A' вычёркиванием всех столбцов, кроме $j_1, \ldots, j_r$. Снова $\operatorname{rk} A'' = r$ (поскольку столбцы A'' линейно независимы). Согласно критерию невырожденности матрицы $|A''| \neq 0$. $\square$