3 Определители

Определение. Пусть A – квадратная матрица

$$(*) \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ее *определителем* называется число

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Пример. Пусть $n = 2$. Тогда S_n состоит из двух подстановок: тождественной ε и транспозиции $\tau = [1, 2]$. Поэтому

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}(\varepsilon)\, a_{1,\varepsilon(1)} a_{2,\varepsilon(2)} + \operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}. \end{aligned}$$

Пример. Матрица $A = (a_{i,j})$ называется *верхнетреугольной*, если $a_{i,j} = 0$ при $i > j$ и она называется *нижнетреугольной*, если $a_{i,j} = 0$ при $i < j$. Покажем, что если $A = (a_{i,j})$ – верхнетреугольная (нижнетреугольная) матрица, то

$$|A| = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}.$$

Действительно, в формуле для определителя член $a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$ отличен от нуля только если $\sigma(i) \geq i \ \forall i$.

Отсюда $\sigma(n) = n$ и поэтому $\sigma(n-1) \neq n$. Тогда $\sigma(n-1) = n-1$ и т. д. Получим, что единственный ненулевой член соответствует единичной подстановке.

Теорема. $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \cdots & \sigma^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |A^{\mathrm{T}}| &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a^{\mathrm{T}}_{1,\sigma(1)} a^{\mathrm{T}}_{2,\sigma(2)} \cdots a^{\mathrm{T}}_{n,\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} = \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1,\tau(1)} a_{2,\tau(2)} \cdots a_{n,\tau(n)} = |A|. \end{aligned}$$

$\square$

Функция $F(X_1, \ldots, X_N)$ от нескольких аргументов называется *полилинейной*, если при подстановке вместо любой переменной X_i значения $\lambda' X_i' + \lambda'' X_i''$, где λ' и λ'' – произвольные числа, мы имеем

$$F(X_1, \ldots, \lambda' X_i' + \lambda'' X_i'', \ldots, X_N) =$$

$$= \lambda' F(X_1, \ldots, X_i', \ldots, X_N) + \lambda'' F(X_1, \ldots, X_i'', \ldots, X_N)$$

Рассмотрим матрицу A как совокупность ее строк

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (A_1, \ldots, A_n), \qquad A_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

а определитель $|A|$ рассмотрим как числовую функцию строк

$$|A| = |A_1, \ldots, A_n| = F(A_1, \ldots, A_n).$$

Теорема (полилинейность определителя)**.** *Определитель является полилинейной функцией своих строк.*

Доказательство. Пусть $A_i = \lambda' A_i' + \lambda'' A_i''$, где

$$A_i' = \begin{pmatrix} a_{i,1}' & a_{i,2}' & \ldots & a_{i,n}' \end{pmatrix} \qquad A_j'' = \begin{pmatrix} a_{i,1}'' & a_{i,2}'' & \ldots & a_{i,n}'' \end{pmatrix}$$

Таким образом, $a_{i,j} = \lambda' a'_{i,j} + \lambda'' a''_{i,j} \quad \forall j$. Поэтому

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots (\lambda' a'_{i,\sigma(i)} + \lambda'' a''_{i,\sigma(i)}) \cdots a_{n,\sigma(n)} =$$

$$= \lambda' \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a'_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)} +$$

$$\lambda'' \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a''_{i,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \lambda'|A'| + \lambda''|A''|,$$

где A' (соотв. A'') – матрица, составленная из сторок $A_1, \ldots, A'_i, \ldots, A_n$ (соотв. $A_1, \ldots, A''_i, \ldots, A_n$). $\square$

Функция $F(X_1, \ldots, X_N)$ от нескольких аргументов называется *кососиметрической*, если при подстановке двух любых переменных X_i и X_i, $i \neq j$ функция меняет знак:

$$F(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_N) =$$

$$= -F(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_N).$$

Лемма. *Полилинейная функция $F(X_1, \ldots, X_N)$ является кососиметрической тогда и только тогда, когда $F(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_N) = 0$ при $X_i = X_i$, $\forall i, j$, $i \neq j$.*

Доказательство. .... $\square$

Теорема (кососиметричность определителя). *Определитель является кососиметрической функцией своих строк.*

Доказательство. Пусть $A_i = A_j$, т.е. $a_{i,k} = a_{j,k} \quad \forall k$, где $i < j$. Докажем, что $|A| = 0$. Разобъем все подстановки из S_n на (непересекающиеся) пары

$$\sigma \qquad\qquad \sigma' = \sigma \circ [i,j]$$

Так как $a_{i,\sigma(i)} = a_{j,\sigma(i)}$ и $a_{j,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}$, то соответствующие члены в формуле для определителя

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{j,\sigma(j)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

$$-\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(j)} \cdots a_{j,\sigma(i)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

сокращаются. □

3.1 Вычисление определителя при помощи элементарных преобразований.

Теорема. *Пусть матрица A' получена из матрицы A одним элементарным преобразованием. Тогда*

(I) $|A'| = |A|$;

($\mathrm{II}_{\mathrm{i},\lambda}$) $|A'| = \lambda |A|$;

(III) $|A'| = -|A|$.

Доказательство. .... □