Бирациональная алгебраическая геометрия

Программа экзамена

(1) Рациональные и бирациональные отображения. Примеры. Раздутия. Фундаментальные точки рационального отображения. Рациональность и унирациональность. Примеры.

(2) Дивизоры Вейля и Картье. Линейная эквивалентность. Линейные системы. Базисное множество и неподвижная часть. Соответствие между линейными системами и рациональными отображениями в проективное пространство. Полный прообраз дивизора Картье. Теория пересечений (на поверхностях, без доказательств).

(3) Дифференциальные формы. Поведение дифференциальных форм при рациональных отображениях. Канонический класс. Поведение канонического класса при конечных и бирациональных морфизмах. Вычисления для проективного пространства.

(4) Формула присоединения. Не(уни)рациональность гиперповерхностей большой степени. Дивизориальная алгебра $R(X, D)$. Каноническая алгебра. Ее бирациональная инвариантность.

(5) Свойства конечно порожденных градуированных алгебр. Понятие размерности Иитаки и размерности Кодаиры.

(6) Теорема Ходжа об индексе. Следствия. Лемма об отрицательности.

(7) Псевдоэффективные дивизоры. Различные определения. Кривые, отрицательно пересекающие псевдоэффективный дивизор.

(8) Разложение Зарисского.

(9) Разложение Зарисского и конечная порожденность дивизориальной алгебры (редукция к численно эффективному дивизору). Свойства численно эффективных дивизоров. Конечная порожденность $R(X, D)$ для дивизоров с $\mathrm{Bs}\,|nD| = \emptyset$.

(10) Объемные дивизоры и их свойства. Дивизоры с $\kappa(X, D) = 1$ (на поверхности).

(11) Доказательство критерия конечной порождённости $R(X, D)$ для поверхностей. Пример дивизора, для которого кольцо $R(X, D)$ не является конечно порожденным.

(12) Минимальные модели поверхностей (различные определения). Канонические модели. Многообразия общего типа. Примеры.

(13) Плюриканоническое отображение поверхностей $|nK_X|$ является морфизмом для $n \gg 0$. Конечная порожденность канонической алгебры для поверхностей. Особенности канонической модели. Понятие о дювалевских особенностях.

(14) Бирациональная классификация поверхностей (без доказательств). Примеры.
(15) Отображение Альбанезе. Его свойства. Отображения Альбанезе на поверхностях с одномерным образом. Приложения: поверхности с $p_g = 1$, $q = 2$, $\kappa = 0$.
(16) Кривые на многообразиях. Схема $\mathrm{Hom}(C, X)$. Ее размерность (без доказательств). Примеры. Существование рациональных кривых.
(17) Экстремальные лучи. Классификация (отрицательных) экстремальных лучей на поверхностях по инварианту μ. Унилинейчатые и рационально связные многообразия.
(18) Теорема о конусе. Критерий рациональности Кастельнуово. Следствия.

Литературные указания. Общие вопросы алгебраической геометрии лучше всего изучать по стандартным учебникам [1], [2]. Вопросы (1)-(3) хорошо освещаются в [1]. Доказательство разложения Зарисского можно найти в [3], [4]. По теории алгебраических поверхностей имеется обширная литература. Краткое изложение (почти без доказательств) см. в [5]. Особенности канонических моделей поверхностей см. в [6]. Существование рациональных кривых см. в [7].

Список литературы

[1] *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. — II изд. — Москва: Наука, 1988. — Т. I, II.
[2] *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. — Москва: Мир, 1981.
[3] *Zariski O.* The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface // *Ann. of Math. (2).* — 1962. — Vol. 76. — Pp. 560–615. http://www.jstor.org/stable/1970376.
[4] *Fujita T.* On Zariski problem // *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* — 1979. — Vol. 55, no. 3. — Pp. 106–110. http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195517399.
[5] *Исковских В. А., Шафаревич И. Р.* Алгебраические поверхности // Алгебраическая геометрия-2. — 1989. — Т. 35 из *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.* — С. 131–263. http://mi.mathnet.ru/intf125.
[6] *Прохоров Ю. Г.* Особенности алгебраических многообразий. — Москва: МЦНМО, 2009. — С. 128.
[7] *Клеменс Х., Коллар Я., Мори С.* Многомерная комплексная геометрия. — Москва: Мир, 1993.