Бирациональная геометрия

Ю. Г. Прохоров

осенний семестр 2012 г.

4 Дифференциальные формы

Напомним, что касательное пространство Зарисского $T_{P,X}$ в точке P к многообразию X определяется как $T_{P,X} = (\mathfrak{m}_{P,X}/\mathfrak{m}^2_{P,X})^\vee$. Таким образом, каждая функция $f \in \mathscr{O}_{P,X}$ определяет элемент $\mathrm{d}_P f \in T^\vee_{P,X}$. Одномерной дифференциальной формой φ на X называется отображение $\varphi : X \to \cup_{P\in X} T^\vee_{P,X}$ такое, что

- $\varphi(P) \in T^\vee_{P,X} \quad \forall P \in X$;
- для любой точки $P \in X$ существует окрестность $P \in U \subset X$ такая, что $\varphi|_U = \sum g_i \mathrm{d} f_i$, f_i, $g_i \in \Bbbk[U]$.

Аналогично, r-мерной дифференциальной формой φ на X называется отображение $\varphi : X \to \cup_{P\in X} \wedge^r T^\vee_{P,X}$ такое, что

- $\varphi(P) \in \wedge^r T^\vee_{P,X} \quad \forall P \in X$;
- для любой точки $P \in X$ существует окрестность $P \in U \subset X$ такая, что $\varphi|_U = \sum g_{i_1,\dots,i_r} \mathrm{d} f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d} f_{i_r}$, f_{i_k}, $g_{i_1,\dots,i_r} \in \Bbbk[U]$.

Множество всех дифференциальных форм на X обозначается через $\Omega^r[X]$. Ясно, что $\Omega^r[X]$ – модуль над $\Bbbk[X]$ и сопоставление $U \longmapsto \Omega^r[U]$ является пучком $\mathscr{O}_X$-модулей. Имеются следующие естественные операции:

$$\Omega^r[X] \times \Omega^s[X] \longrightarrow \Omega^{r+s}[X], \quad (\varphi_r, \varphi_s) \longmapsto \varphi_r \wedge \varphi_s$$

$$\mathrm{d} : \Omega^r[X] \longrightarrow \Omega^{r+1}[X], \quad \varphi \longmapsto \mathrm{d}\varphi = \sum \mathrm{d}g_{i_1,\dots,i_r} \wedge \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f_{i_r}$$

Пример. Пусть $X = \mathbb{A}^n_{x_1,\dots,x_n}$. Тогда $T_{P,X} \simeq \mathbb{A}^n$, $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_r}$ образуют базис $\Omega^r[X]$ над $\Bbbk[X]$.

Пример. Пусть $X = \mathbb{P}^n_{x_0,x_1,\dots,x_n}$. Рассмотрим аффинную карту $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ с координатами $y_i = x_i/x_0$. Пусть $\varphi \in \Omega^1[\mathbb{P}^n]$. Запишем $\varphi = \sum \varphi_i \mathrm{d}y_i$, $\varphi_i \in \Bbbk[U_0]$. Рассмотрим аффинную карту $U_j = \{x_j \neq 0\}$ с координатами $z_i = x_i/x_j$. Тогда $1/y_j =: z_j$ и $z_i = y_i/y_j$ $i \neq j$. Таким образом, $y_j = 1/z_j$ и $y_i = z_i/z_j$ $i \neq j$. Отсюда

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{i\neq j} \varphi_i(z) \tfrac{z_j \mathrm{d}z_i - z_i \mathrm{d}z_j}{z_j^2} - \varphi_j(z) \tfrac{\mathrm{d}z_j}{z_j^2} = \\ &= \tfrac{1}{z_j^2} \left(z_j \sum_{i\neq j} \varphi_i(z) \mathrm{d}z_i - \varphi_j(z)(1 - \sum_{i\neq j} z_i) \mathrm{d}z_j \right) \end{aligned}$$

Эта форма регулярна $\Longleftrightarrow \varphi_j = 0$.

Предложение 1. *Пусть $P \in X$ – неособая точка и $\dim X = n$. Тогда существует такая аффинная окрестность $P \in U \subset X$, что $\Omega^r[U]$ – свободный $\Bbbk[U]$-модуль ранга $\binom{n}{r}$.*

Доказательство. Докажем для $r = 1$. Мы можем считать, что X аффинно. Пусть $f_1, \dots, f_m \in \Bbbk[x_1, \dots, x_N]$ порождают идеал $X \subset \mathbb{A}^N$. Тогда

$$\mathrm{rk} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right\| = N - n.$$

Имеем также
$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = 0, \qquad i = 1, \dots, m.$$
Мы можем считать, что $x_1, \dots, x_n$ – система локальных параметров. Тогда все $\mathrm{d}x_j$ можно выразить через $\mathrm{d}x_1, \dots, \mathrm{d}x_n$ с коэффициентами – рациональными функциями, регулярными в некоторой окрестности P. Таким образом, для $\varphi \in \Omega[U]$ мы можем написать
$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \mathrm{d}x_i, \quad \varphi_i \in \Bbbk[U].$$
Ясно, что $\mathrm{d}_P x_1, \dots, \mathrm{d}_P x_n$ линейно независимы в P. $\square$

Рациональной r-мерной дифференциальной формой на X называется класс эквивалентности пар (U, φ), где $U \subset X$ – открытое подмножество, а $\varphi \in \Omega^r[U]$. Мы считаем, что $(U, \varphi) \sim (U', \varphi')$, если $\varphi|_{U \cap U'} = \varphi'|_{U \cap U'}$. Поскольку множество точек, где дифференциальная форма обращается в нуль замкнуто, то это отношение эквивалентности корректно. Множество всех рациональных r-мерных дифференциальных форм на X мы будем обозначать через $\Omega^r(X)$.

Предложение 2. *Пусть* $\dim X = n$. *Тогда* $\Omega^r(X)$ *– векторное пространство над* $\Bbbk(X)$ *размерности* $\binom{n}{r}$. *Базисом* $\Omega^r(X)$ *над* $\Bbbk(X)$ *являются формы* $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_r}$, $i_1 < \dots < i_r$, *где* $x_1, \dots, x_n$ *– сепарабельный базис трансцендентности* $\Bbbk(X)/\Bbbk$.

Доказательство. Можно считать, что $X \subset \mathbb{A}^N_{y_1, \dots, y_N}$ аффинно. Любой элемент $y \in \Bbbk(X)$ удовлетворяет соотношению $f(y, x_1, \dots, x_n) = 0$, сепарабельному по y. В частности, мы имеем $f_i(y_i, x_1, \dots, x_n) = 0$. Отсюда
$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i} \mathrm{d}y_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j = 0$$

и мы можем выразить $\mathrm{d}y_i$ через $\mathrm{d}x_j$. Существует открытое множество $U \subset X$ такое, что $\mathrm{d}_P x_j$ порождают $T_{P,X}^\vee$ в каждой точке $P \in U$. Поэтому $\mathrm{d}x_j$ образуют базис $\Omega^1[U]$ над $\Bbbk[U]$, а $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x_{i_r}$ образуют базис $\Omega^r[X]$ над $\Bbbk[U]$. $\square$

Пусть $f : X \to Y$ – морфизм и $P \in X$. Имеется естественное линейное отображение $\mathrm{d}_P : T_{P,X} \to T_{f(P),Y}$. Оно индуцирует отображение $\mathrm{d}_P^\vee : T_{f(P),Y}^\vee \to T_{P,X}^\vee$, которое согласовано со взятием дифференциала и . Мы получаем корректно определенное отображение

$$\wedge^r(\mathrm{d}f)^\vee = f^* : \Omega^r[Y] \to \Omega^r[X]$$

Если же $f : X \dashrightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение, то имеется естественное отображение $f^* : \Omega^r(Y) \to \Omega^r(X)$.

Теорема 1. *Пусть $f : X \dashrightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение и предположим, что расширение полей $\Bbbk(X)/\Bbbk(Y)$ сепарабельно порождено. Тогда $f^* : \Omega^r(Y) \to \Omega^r(X)$ – вложение.*

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_m$ – сепарабельный базис трансцендентности $\Bbbk(X)/\Bbbk(Y)$ и пусть $y_1, \dots, y_n$ – сепарабельный базис трансцендентности $\Bbbk(Y)/\Bbbk$. Тогда $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ – сепарабельный базис трансцендентности $\Bbbk(X)/\Bbbk$. Пусть $\varphi \in \Omega^r(Y)$. Запишем

$$\varphi = \sum \varphi_{i_1,\dots,i_r} \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y_{i_r}$$

$$f^*\varphi = \sum f^*\varphi_{i_1,\dots,i_r} \mathrm{d}f^*y_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f^*y_{i_r}$$

Так как $f^*y_{i_1}, \dots, f^*y_{i_n}$ – часть сепарабельного базиса трансцендентности $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$, то элементы $\mathrm{d}f^*y_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}f^*y_{i_r}$ составляют часть базиса $\Omega^r(X)$ над $\Bbbk(X)$. Поэтому $f^*\varphi = 0 \iff f^*\varphi_{i_1,\dots,i_r}$ $\iff \varphi_{i_1,\dots,i_r} \iff \varphi = 0$. $\square$

Пример. Рассмотрим морфизм $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $t \mapsto t^p$ над полем характеристики p. Тогда $f^*\mathrm{d}t = \mathrm{d}t^p = p\mathrm{d}t^{p-1} = 0$.

Теорема 2. *Пусть $f : X \dashrightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение неособых многообразий и предположим, что Y проективно. Тогда $f^*\Omega^r[Y] \subset \Omega^r[X]$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Omega^r[Y]$. Для замкнутого подмножества $Z \subset X$, $\operatorname{codim} Z \geq 2$ ограничение отображения f на $U := X \setminus Z$ является морфизмом. Таким образом, $f^*\varphi \in \Omega^r[U]$. Пусть $P \in Z$. В некоторой окрестности $P \in V \subset X$ имеем

$$\varphi = \sum \varphi_{i_1,\dots,i_r} \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y_{i_r}$$

Функции $\varphi_{i_1,\dots,i_r}$ не являются регулярными в точках $U \cap V$, что невозможно. □

Следствие 1. *Если неособые проективные многообразия X и Y бирационально эквивалентны, то $\Omega^r[X] \simeq \Omega^r[Y]$.*

5 Градуированные кольца

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *кольцо R конечно порождено как R_0-алгебра;*

(2) *идеал R^+ конечно порожден как R-модуль;*

(3) *кольцо R нётерово.*

Доказательство. (3) $\Longrightarrow$ (2) следует из определения нётерового кольца.

(1) $\Longrightarrow$ (3) следует из теоремы Гильберта о базисе.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть $a_1, \dots, a_n \in R^+$ – система порождающих как R-модуля. Можно считать, что эти элементы – однородные. Тогда $a_0 = 1, a_1, \dots, a_n \in R$ – система порождающих как R_0-алгебры.

Действительно, пусть $b \in R$. Можно считать, что этот элемент однородный степени d и $d > 0$. Индукцией по d доказываем, что b выражается через $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_n$. Пусть это верно для степеней $< d$. Так как $d > 0$, то $b \in R^+$ и по нашему предположению $b = \sum_{i=1}^n a_i c_i$, $c_i \in R$. Тогда элементы $c_1, \ldots, c_n$ однородные степеней $\deg c_i = d - \deg a_i < d$. По предположению индукции они выражаются через $a_0 = 1, a_1, \ldots, a_n$. □

Лемма 1. *Предположим, что кольцо R конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Тогда R – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in R$ – система порождающих как $\Bbbk$-алгебры. Можно считать, что эти элементы – однородные. Любой элемент $b \in R$ является линейной комбинацией элементов вида $a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n}$. Запишем $m_i = dq_i + r_i$, $0 \le r_i \le d - 1$. Тогда

$$a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} = (a_1^{q_1} \cdots a_n^{q_n})^d a_1^{r_1} \cdots a_n^{r_n}.$$

Замечаем, что $(a_1^{q_1} \cdots a_n^{q_n})^d \in R^{(d)}$. □

Теорема 4. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) *кольцо R конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра;*

(2) *кольцо $R^{(d)}$ конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Имеем R^+ – конечно порожденный R-модуль, а R – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль. Поэтому R^+ – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль. С другой стороны, имеем разложение $R^+ = (R^{(d)})^+ \oplus R'$ (как $R^{(d)}$-модулей). Отсюда $(R^{(d)})^+$ – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Докажем, что R – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль. Положим

$$R^{(d,k)} := \bigoplus_{m \equiv k \mod d} R_m.$$

Тогда $R^{(d,k)}$ является $R^{(d)}$-модулем, $R = \oplus_{k=0}^{d-1} R^{(d,k)}$ и $R^{(d,0)} = R^{(d)}$. Мы утверждаем, что $R^{(d,k)}$ – конечно порожденный $R^{(d)}$-модуль. Это очевидно, если $R^{(d,k)} = 0$. Пусть $R^{(d,k)} \neq 0$ и пусть $0 \neq s \in R^{(d,k)}$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\phi := R^{(d,k)} \longrightarrow R^{(d)}, \qquad c \longmapsto c \cdot s^{d-1}.$$

Так как в R нет делителей нуля, то ϕ инъективен. Следовательно, $R^{(d,k)} \simeq \phi(R^{(d,k)})$ и $\phi(R^{(d,k)})$ – идеал в $R^{(d)}$. По нашему предположению $R^{(d)}$ – нётерово кольцо. Следовательно, $R^{(d)}$-модуль $R^{(d,k)}$ конечно порожден, а поэтому и $R^{(d)}$-модуль R конечно порожден. $\square$

Теорема 5. *Предположим, что кольцо R конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Тогда для некоторого d кольцо $R^{(d)}$ порождается своей компонентой степени 1.*

Лемма 2. *Предположим, что кольцо R конечно порождено как $\Bbbk$-алгебра. Тогда существуют d, $n_1 > 0$ такие, что $\forall n > n_1$ $\langle R_d, R_n \rangle = R_{d+n}$. Более того, можно считать, что $d > n_1$.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_m \in R$ – система порождающих как $\Bbbk$-алгебры. Можно считать, что эти элементы – однородные. Положим $d_i := \deg a_i$, $d := \mathrm{const} \cdot \mathrm{lcm}(d_1, \ldots, d_m)$, $b_i := a^{d/d_i}$. Таким образом, $\deg b_i = d$. Рассмотрим множество

$$M := \{a_1^{r_1} \cdots a_m^{r_m} \mid 0 \leq r_i < d/d_i\}.$$

Возьмем $n_1 > \deg M$. Для любого $n > n_1$ и для любого $f \in R_{d+n}$ мы можем записать

$$f = \sum \lambda_{l_1,\ldots,l_m} a_1^{l_1} \cdots a_m^{l_m}.$$

Запишем $l_i = (d/d_i)q_i + r_i$, $0 \leq r_i < d/d_i$. Тогда

$$a_1^{l_1} \cdots a_m^{l_m} = b_1^{q_1} \cdots b_m^{q_m} a_1^{r_1} \cdots a_m^{r_m}$$

где $a_1^{r_1}\cdots a_m^{r_m}\in M$ и $\deg b_1^{q_1}\cdots b_m^{q_m} = d\sum q_i$. Так как $\deg a_1^{r_1}\cdots a_m^{r_m} < n_1 < n < n+d$, то любой член $a_1^{l_1}\cdots a_m^{l_m}$ представляется в виде $a_1^{l_1}\cdots a_m^{l_m} = b_j c_j$, где $c_j \in R_n$. □

Доказательство теоремы. Индукцией по l доказываем, что $\langle R_{ld}, R_n\rangle = R_{(l+1)d}$. □

Теорема 6. *Пусть $\kappa := \kappa(R) \geq 0$. Тогда существуют константы α, δ такие, что для всех $m \gg 0$ имеем*

$$\alpha m^\kappa \leq \dim R_{m\delta}.$$

Доказательство. Пусть $a_1,\ldots,a_{\kappa+1} \in R$ – алгебраически независимые элементы. Мы можем считать, что они однородные одной степени δ. Для $k_1,\ldots k_{\kappa+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таких, что $\sum k_i = \delta m$ элементы $a_1^{k_1}\cdots a_{\kappa+1}^{k_{\kappa+1}} \in R_{\delta m}$ линейно независимы. Поэтому

$$\dim R_{\delta m} \geq \frac{(\delta m+\kappa)!}{(\delta m)!\,\kappa!} = \frac{1}{\kappa!}(\delta m+1)\cdots(\delta m+\kappa) \geq \operatorname{const} m^\kappa$$

при $m \gg 0$. □

Пример. Рассмотрим $\Bbbk[x,y]$ с градуировкой $\deg x = 1$, $\deg y = 0$ и рассмотрим *любую* возрастающую последовательность n_i. Пусть $R \subset \Bbbk[x,y]$ – подалгебра, порожденная элементами x^k, $x^k y$, $x^k y^2$, $\ldots$, $x^k y^{n_k}$. Тогда $\dim R_k \geq n_k + 1$.

6 Дивизоры на поверхности

Теорема 7 (теорема Ходжа об индексе)**.** *Пусть A – обильный дивизор на проективной поверхности X. Если для некоторого дивизора B мы имеем $A\cdot B = 0$, то $B^2 \leq 0$ и $B^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $B \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $B^2 > 0$. Для $n \gg 0$ дивизор $nA+B$ обилен. Дивизор mB эффективен при $m \gg 0$ так как $B^2 > 0$. Но тогда $mB \cdot nA = mB \cdot (nA+B) > 0$. Противоречие. Следовательно, $B^2 \leq 0$.

Пусть $B^2 = 0$ и $B \not\equiv 0$. Возьмем дивизор C такой, что $C \cdot B \neq 0$. Заменяя C на $C' = \alpha C + \beta A$ можно считать, что $C \cdot A = 0$. Таким образом, $A \cdot (aB + C) = 0$. По доказанному выше $0 \geq (aB + C)^2 = 2aB \cdot C + C^2$. Противоречие. □

Следствие 2. *Пусть A – дивизор на проективной поверхности X такой, что $A^2 > 0$. Если для некоторого дивизора B мы имеем $A \cdot B = 0$, то $B^2 \leq 0$ и $B^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $B \equiv 0$.*

Лемма 3. *Пусть M и $F = \sum \alpha_i F_i$ – дивизоры без общих компонент на поверхности Y такие, что $M \geq 0$, матрица пересечений $\|F_i \cdot F_j\|$ отрицательно определена и $(M + F) \cdot F_i \leq 0$ (соответственно $(M + F) \cdot F_i < 0$) для всех i. Тогда $F \geq 0$ (соответственно $\alpha_i > 0$ для всех i).*

Доказательство. Запишем $F = F_+ - F_-$, где F_+ и F_- – эффективные дивизоры без общих компонент. Предположим, что $F_- \neq 0$. Тогда $(F_-)^2 < 0$. Следовательно, $F_- \cdot F_i < 0$ для некоторой компоненты $F_i \subset \operatorname{Supp} F_-$. Отсюда

$$0 \geq F_i \cdot (M + F) = F_i \cdot M + F_i \cdot F_+ - F_i \cdot F_- > 0.$$

Противоречие. Если же $\alpha_i = 0$ для некоторого i, то $F_i \cdot (M + F) \geq 0$. Это доказывает утверждение. □

Теорема 8 (критерий обильности Накаи-Мойшезона). *Пусть A – дивизор на проективной поверхности X. Дивизор A обилен тогда и только тогда, когда $A \cdot C \geq 0$ для любой кривой C и $A^2 > 0$.*

Определение 1. Дивизор P на неособом проективном многообразии называется *численно эффективным*, если $P \cdot C \geq 0$ для любой кривой C.

Например, если имеется сюръективный морфизм $f : X \to Y$ на неособую кривую Y, то любой схемный слой – численно эффективный, но не обильный дивизор.

Следствие 3. *Пусть A – обильный дивизор на проективной поверхности X. Тогда для любого численно эффективного дивизора P на X дивизор $A + P$ также обилен.*

Определение 2. Дивизор D на проективной поверхности X называется *псевдоэффективным*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

(1) существует обильный дивизор H такой, что дивизор $D + \varepsilon H$ эффективен для любого $\varepsilon > 0$;

(2) $D \cdot A \geq 0$ для любого обильного дивизора A на X;

(3) $D \cdot A \geq 0$ для любого численно эффективного дивизора A на X;

(4) класс дивизора D принадлежит замыканию конуса эффективных дивизоров (в численном смысле), т.е. существует последовательность эффективных дивизоров $D^{(n)}$ такая, что $\lim \left(D^{(n)} \cdot C\right) = D \cdot C$ для любой кривой C.

Легко видеть, что свойство псевдоэффективности дивизоров $\mathbb{Q}$-Картье замкнуто относительно взятия полных прообразов f^*.

Лемма 4. *Пусть $D \neq 0$ – псевдоэффективный дивизор и пусть $C_1, \ldots, C_n$ – кривые такие, что $D \cdot C_i < 0$. Тогда матрица пересечений $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно определена. Более того, существует лишь конечное число таких кривых.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно полуопределена. Предположим противное. Тогда существует дивизор

$R = \sum \lambda_i C_i$ такой, что $R^2 > 0$. Мы можем считать, что $\lambda_i > 0\ \forall i$. Действительно, запишем $R = R^+ - R^-$, где R^+ и R^- эффективные дивизоры без общих компонент. Тогда $0 < R^2 = (R^+)^2 + (R^-)^2 - 2R^+ \cdot R^- \le (R^+)^2 + (R^-)^2$. По теореме Римана-Роха $h^0(X, nR) \ge R^2 n^2 + \cdots$ для $n \gg 0$. Поэтому $\dim |nR| \ge cR^2 n^2$ для $n \gg 0$. Запишем $|nR| = F + |M|$, где $F = \operatorname{Fix}|nR|$ и $M \ne 0$. Тогда M представляется в виде $M \sim \sum \mu_i C_i$, $\mu_i \ge 0\ \forall i$. Поэтому $D \cdot M < 0$. Так как M подвижен, то он численно эффективен. Следовательно, $D \cdot M \ge 0$. Противоречие.

Таким образом, $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно полуопределена. Предположим, что $R^2 = 0$ для $R = \sum \lambda_i C_i \ne 0$. Снова мы можем считать, что $\lambda_i > 0\ \forall i$. Далее $R \cdot C_i = 0\ \forall i$. Действительно, если $R \cdot C_i \ne 0$, то полагая $R' = R + tC_i$, получим $R'^2 = (R + tC_i)^2 = t(2R \cdot C_i + tC_i^2) > 0$ для некоторого $0 < |t| \ll 1$. Это противоречит доказанному выше. Таким образом, R эффективен и $R \cdot C_i = 0\ \forall i$. Поэтому R численно эффективен. Следовательно, $R \cdot D \ge 0$. Противоречие. $\square$

7 Разложение Зарисского

Теорема 9 ([Zar62], [Fuj79])**.** *Пусть X – проективная поверхность и пусть D – псевдоэффективный дивизор на X. Тогда существует эффективный дивизор $N = N(D) = \sum a_i N_i$ на X такой, что*

(1) *дивизор $P := D - N$ численно эффективен;*

(2) *$N = 0$ или матрица $(N_i \cdot N_j)$ отрицательно определена;*

(3) *$(P \cdot N_i) = 0$ для всех i.*

Более того, если D является $\mathbb{Q}$-дивизором, то таковым же является и N. Дивизор N однозначно определяется классом численной эквивалентности дивизора D.

Разложение $D = N + P$, удовлетворяющее условиям (i) - (iii) теоремы называется *разложением Зарисского* дивизора D, дивизор P – его *положительной*, а N – *отрицательной* (или *исключительной*) частью.

Лемма 5. *Пусть $C_1, \ldots, C_n$ – неприводимые кривые на проективной поверхности X такие, что матрица пересечений $Q := \|C_i \cdot C_j\|_{1 \le i,j \le n}$ имеет сигнатуру $(0, m, n - m)$ для некоторого $m < n$, а матрица пересечений $Q' := \|C_i \cdot C_j\|_{1 \le i,j \le m}$ отрицательно определена. Тогда ядро формы пересечения Q имеет базис $R_{m+1}, \ldots, R_n$, состоящий из эффективных дивизоров. Более того, этот базис можно выбрать в виде $R_j = S_j + C_j$, где $S_j \ge 0$ – линейная комбинация $C_1, \ldots, C_m$.*

Доказательство. Для каждого $j = m + 1, \ldots, n$ разложим $C_j = -S_j + R_j$, где $R_j \in \ker Q$, а S_j – линейная комбинация $C_1, \ldots, C_m$. Тогда $R_{m+1}, \ldots, R_n$ составляют базис $\ker Q$ и для $i = 1, \ldots, m$ имеем $S_j \cdot C_i = C_j \cdot C_i \le 0$. Следовательно, дивизоры S_j и $R_j = S_j + C_j$ эффективны. $\square$

Лемма 6. *Пусть $C_1, \ldots, C_n$ – неприводимые кривые и пусть D – псевдоэффективный дивизор на проективной поверхности X такие, что*

- *$D \cdot C_i \le 0$ $\forall i$;*
- *$D \cdot C_i < 0$ $\forall i > m$;*
- *матрица пересечений $Q' := \|C_i \cdot C_j\|_{1 \le i,j \le m}$ отрицательно определена.*

Тогда и матрица пересечений $Q := \|C_i \cdot C_j\|_{1 \le i,j \le n}$ отрицательно определена.

Доказательство. Сначала докажем, что матрица Q отрицательно полуопределена. Предположим, что $R^2 > 0$ для некоторого $0 \neq R = \sum \lambda_i R_i$. Мы можем считать, что $R > 0$. Так как $R^2 > 0$, то $aR = F + M$, где $F = \operatorname{Fix}|aR|$, $M = \operatorname{Mov}|nR|$, $M^2 > 0$. Тогда $F = \sum \nu_i C_i$, $\nu_i \geq 0$ и $M = \sum \mu_i C_i$, $\mu_i \geq 0$. Следовательно, $D \cdot M \leq 0$. С другой стороны, $D \cdot M \geq 0$ поскольку D псевдоэффективен. Поэтому $D \cdot M = 0$ и $M = \sum_{i=1}^m \mu_i C_i$. Так как Q отрицательно определена, то $M = 0$.

Далее мы применяем лемму 5. Выберем базис $R_{m+1}, \ldots, R_n$ пространства $\ker Q$, состоящий из эффективных дивизоров вида $R_j = S_j + C_j$. Тогда $D \cdot R_j < 0$. С другой стороны, $R_j \geq 0$ и тривиально пересекается со всеми своими компонентами. Следовательно, R_j численно эффективен и поэтому $D \cdot R_j \geq 0$ (см. определение 2). Противоречие. $\square$

Доказательство теоремы. Существование. Будем работать с парами $(D, \{L_1, \ldots, L_m\})$, состоящими из псевдоэффективного дивизора D и набора кривых $\{L_1, \ldots, L_m\}$ таких, что матрица пересечений $\|L_i \cdot L_j\|$ отрицательно определена и $D \cdot L_i \leq 0$. Доказываем индукцией по $\rho(X) - m$. Если D численно эффективен, то мы полагаем $P = D$. В противном случае по лемме 4 существует конечное число кривых $C_1, \ldots, C_n$ таких, что $D \cdot C_i < 0$ и матрица пересечений $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно определена.

Поэтому существует единственный $\mathbb{Q}$-дивизор $R = \sum \lambda_i C_i$ такой, что $R \cdot C_i = D \cdot C_i$ $\forall i$. Так как $D \cdot C_i < 0$, то $R \geq 0$ по лемме 3. Положим $D' := D - R$. Тогда

$$D' \cdot C_i = 0 \qquad \forall i.$$

Мы утверждаем, что дивизор D' псевдоэффективен. Действительно, пусть A – обильный дивизор. Снова существует единственный $\mathbb{Q}$-дивизор $B = \sum \mu_i C_i$ такой, что $B \cdot C_i = -A \cdot C_i < 0$ $\forall i$. Этот дивизор эффективен. Ясно, что $B \cdot R = -A \cdot R < 0$. Так как $(A + B) \cdot R = 0$, то дивизор $A+B$ численно эффективен. Следовательно, $D\cdot A \geq -D\cdot B$. Имеем

$$D'\cdot A = D\cdot A - R\cdot A = D\cdot A + R\cdot B \geq -D\cdot B + R\cdot B = (R-D)\cdot B = 0.$$

Это доказывает псевдоэффективность D'. По построению $D'\cdot C_i = 0$ $\forall i$. Имеем $D'\cdot L_i = D\cdot L_i - R\cdot L_i = -R\cdot L_i \leq 0$.

Далее положим $\{L'_1, \dots, L'_{m+n}\} = \{L_1, \dots, L_m\} \cup \{C_1, \dots, C_n\}$. По лемме 6 матрица пересечений $\|L'_i \cdot L'_j\|$ отрицательно определена.

По предположению индукции для D' существует разложение Зарисского $D' = P' + N'$. Тогда $P'\cdot C_i \geq 0$, $N'\cdot C_i \leq 0$ $\forall i$. Но если $N'\cdot C_i < 0$, то C_i – компонента N'. Поэтому $P'\cdot C_i = 0$ и $D'\cdot C_i < 0$. Противоречие показывает, что $N'\cdot C_i = P'\cdot C_i = 0$ $\forall i$. Таким образом, C_i – не компонента N' $\forall i$. Иначе говоря, N' и R не имеют общих компонент и $N'\cdot R = P'\cdot R = 0$. Это означает, что $D = P' + (R+N')$ – разложение Зарисского для D.

Единственность. Пусть имеется два разложения Зарисского $D = P + N = P' + N'$ и пусть $N = \sum a_i N_i$. Тогда $P\cdot N_i = 0$, $P'\cdot N_i \geq 0$ $\forall i$. Поэтому $N\cdot N_i = D\cdot N_i \geq N'\cdot N_i$ и $(N'-N)\cdot N_i \leq 0$. Отсюда $N' \geq N$ и аналогично $N \geq N'$. Следовательно, $N = N'$. $\square$

8 О конечной порождённости дивизориальных алгебр

Одним из фундаментальных вопросов алгебраической геометрии является вопрос о конечной порождённости алгебр

$$R(X,D) = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X, \mathscr{O}_X(nD)).$$

Здесь $R(X,D)$ рассматривается как подалгебра алгебры $K(X)[t]$, где каждое пространство $H^0(\mathscr{O}_X(nD))$ вложено в компоненту $K(X)t^n$.

Предложение 3. *Пусть X – поверхность и пусть D – псевдоэффективный дивизор на X. Пусть $D = N + P$ – разложение Зарисского. Тогда для любого численно эффективного дивизора L такого, что $L \leq D$ имеем $L \leq P$.*

Доказательство. Запишем $N = \sum a_i N_i$. Пусть $L \leq D$ и L численно эффективен. Для всех i имеем

$$N_i \cdot (P - L) = -N_i \cdot L \leq 0.$$

Запишем $P - L = (D - L) - N = F^\sharp - N^\sharp$, где $F^\sharp$ и $N^\sharp$ – эффективные дивизоры без общих компонент. Так как $N^\sharp \leq N$, то

$$0 \geq N^\sharp \cdot (P - L) = N^\sharp \cdot F^\sharp - N^{\sharp 2} \geq 0.$$

Откуда $N^{\sharp 2} = 0$, $N^\sharp = 0$ и $P - L \geq N$. $\square$

Предложение 4. *Для разложения Зарисского $D = P + N$ имеет место изоморфизм*

$$R(X, D) \simeq R(X, P). \tag{1}$$

Доказательство. Действительно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$H^0(\mathscr{O}_X(nP)) \subset H^0(\mathscr{O}_X(nD)) = H^0(\mathscr{O}_X(\mathrm{Mov}(nD))).$$

С другой стороны, дивизор $\mathrm{Mov}(nD)$ численно эффективен и по предложению 3 имеем $\mathrm{Mov}(nD) \leq nP$. Откуда мы получаем обратное включение

$$H^0(\mathscr{O}_X(\mathrm{Mov}(nD))) \subset H^0(\mathscr{O}_X(nP)).$$

$\square$

Таким образом, вопрос о конечной порождённости дивизориальной алгебры $R(X, D)$ сводится к вопросу о конечной порождённости дивизориальной алгебры $R(X, P)$ для численно эффективного дивизора P. Однако алгебра $R(X, D)$ не всегда конечно порождена.

Предложение 5. *Пусть D – целый дивизор такой, что* $\mathrm{Bs}\,|D| = \emptyset$. *Тогда алгебра $R(X, D)$ конечно порождена.*

Доказательство. Во-первых, докажем это для случая, когда D обилен. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ – вложение соответствующее подходящей кратности n_0D дивизора D и пусть $\mathcal{J}_X \subset \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}$ – пучок идеалов. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_X(n) \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(n) \longrightarrow \mathscr{O}_X(nn_0D) \longrightarrow 0$$

и теоремы Серра об обращении в нуль получаем, что отображения $H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(n)) \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_X(n_0D))$ сюръективны при при $n \geq n_1$. Отсюда мы имеем сюръективное отображение $R(\mathbb{P}^N, \mathscr{O}(1))^{(n_1)} \to R(X, D)^{(n_0n_1)}$. Согласно теореме 4, это доказывает конечную порожденность $R(X, D)$.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть $X \to \bar{X} \subset \mathbb{P}^N$ – морфизм, заданный линейной системой $|n_0D|$, где $n_0 \gg 0$ и $\bar{X} = \varphi(X)$. Рассмотрим его разложение Штейна $X \xrightarrow{\varphi} X' \xrightarrow{\psi} \bar{X}$. Тогда дивизор $H = \psi^*\mathscr{O}_{\bar{X}}(1)$ обилен и $\mathrm{Mov}(nD) = \varphi^*H$. Так как $\varphi_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_{X'}$, то $R(X, D)^{(n)} \simeq R(X', H)$. Согласно сказанному выше, последняя алгебра конечно порождена. □

9 Следствия из разложения Зарисского

Объемные дивизоры

Лемма 7 (лемма Кодаиры)**.** *Пусть D дивизор на неособой проективной поверхности X. Если $D^2 > 0$ и $D \cdot H > 0$ для некоторого обильного дивизора H, то для любого обильного дивизора A имеем* $|nD - A| \neq \emptyset \quad \forall n \gg 0$.

Доказательство. По теореме Римана-Роха $h^0(X, nD) \geq \mathrm{const}\, n^2$ $\forall n \gg 0$. Мы можем считать, что A очень обилен. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(nD - A) \longrightarrow \mathcal{O}_X(nD) \longrightarrow \mathcal{O}_A(nD) \longrightarrow 0$$

Получаем $H^0(X, nD - A) \neq 0$. $\square$

Лемма 8. *Пусть D дивизор на неособой проективной поверхности X. Если $D^2 > 0$ и $D \cdot H > 0$ для некоторого обильного дивизора H, то $\exists \alpha, \beta, n_0 > 0 \quad \alpha n^2 \leq h^0(X, nD) \leq \beta n^2 \quad \forall n > n_0$.*

Доказательство. Неравенство $\alpha n^2 \leq h^0(X, nD)$ следует из леммы выше. Докажем $h^0(X, nD) \leq \beta n^2$. Запишем $D = P + N$ (разложение Зарисского). Тогда $P^2 > 0$ и мы можем считать, что P – целый эффективный дивизор. Более того, $h^0(X, nP) = h^0(X, nD)$. Дивизор $mP + A$ обилен. По теореме Серра об обращении в нуль $H^i(X, n(mP + A)) = 0 \quad \forall i > 0, \forall n > n_0(m)$. Если $h^0(X, nP) \geq \beta n^{2+\epsilon}$, то $h^0(X, n(mP + A)) \geq \beta (nm)^{2+\epsilon}$. С другой стороны, по теореме Римана-Роха

$$h^0(X, n(mP + A)) = \frac{1}{2} n^2 (mP + A)^2 + \cdots$$

$\square$

Лемма 9. *Пусть D численно эффективный дивизор на неособой проективной поверхности X такой, что $\kappa(X, D) > 0$. Если $D^2 = 0$, то $\mathrm{Bs}\,|nD| = \emptyset$, $n \gg 0$ и $\kappa(X, D) = 1$. В этом случае $\exists \alpha, \beta, n_0 > 0$ $\alpha n \leq h^0(X, nD) \leq \beta n \quad \forall n > n_0$.*

Доказательство. Предположим, что $D^2 = 0$. Запишем $|nD| = F + |M|$. Тогда $D \cdot (M + F) = 0$, $D \cdot M = D \cdot F = 0$, $M^2 = M \cdot F = F^2 = 0$. Отсюда $\mathrm{Bs}\,|M| = \emptyset$ и $|M|$ задает морфизм $f : X \to C$ на кривую.

Мы можем считать, что C неособа и f имеет связные слои. Так как $M \cdot F = 0$, то F содержится в слоях. Так как $F^2 = 0$, то по лемме Зарисского $pF \sim qf^*(c)$, $c \in C$. Следовательно, $\mathrm{Bs}\,|nD| = \emptyset$, $n \gg 0$ и для некоторого $m > 0$ $mD = f^*A$, где A – обильный дивизор на C. Так как $f_*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_C$, то по формуле проекции $H^0(X, \mathscr{O}_X(rmD)) = H^0(X, f_*(f^*\mathscr{O}_C(rA) \otimes \mathscr{O}_X)) = H^0(X, \mathscr{O}_C(rA) \otimes f_*\mathscr{O}_X) = H^0(X, \mathscr{O}_C(rA) \otimes f_*\mathscr{O}_X) = H^0(X, \mathscr{O}_C(rA))$. □

Предложение 6. *Пусть D численно эффективный дивизор на неособой проективной поверхности X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$D^2 > 0$ и $D \cdot A > 0$ для обильного дивизора A;*

(2) *для обильного дивизора A имеем $|nD - A| \neq \emptyset \quad \forall n \gg 0$.*

(3) *$\kappa(X, D) = 2$;*

(4) *$\exists \alpha, \beta, n_0 > 0 \quad \alpha n^2 \leq h^0(X, nD) \leq \beta n^2 \quad \forall n > n_0$.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) Следует из леммы 7.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Следует из того, что $h^0(X, mnD) \geq h^0(X, m(nD - A) + mA) \geq h^0(X, mA)$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Следует из леммы 9.

(4) $\Longrightarrow$ (3) Следует из лемм 8 и 9 так как $\kappa(X, D) > 0$.

(1) $\Longrightarrow$ (4) Следует из леммы 8. □

Следствие 4. *Пусть D дивизор на неособой проективной поверхности X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *для обильного дивизора A имеем $|nD - A| \neq \emptyset \quad \forall n \gg 0$.*

(2) *$\kappa(X, D) = 2$;*

(3) *$\exists \alpha, \beta, n_0 > 0 \quad \alpha n^2 \leq h^0(X, nD) \leq \beta n^2 \quad \forall n > n_0$.*

Определение 3. Дивизор D, удовлетворяющий эквивалентным условиям следствия, называется *объемным*.

Дивизоры с $\kappa = 1$

Следствие 5. *Пусть D дивизор на неособой проективной поверхности X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\kappa(X, D) = 1$;

(2) $\exists \alpha, \beta, n_0 > 0 \quad \alpha n \le h^0(X, nD) \le \beta n \quad \forall n > n_0$.

Доказательство. Рассмотрим разложение Зарисского $D = P + N$. Эквивалентность достаточно доказывать для P. Так как P не объемен, то $P^2 = 0$. В обоих случаях $\kappa(X, P) > 0$. Далее мы можем применить лемму 9. □

Лемма 10. *Пусть D численно эффективный объемный дивизор на неособой проективной поверхности X и пусть $C_1, \ldots, C_n$ – кривые такие, что $D \cdot C_i = 0$. Тогда матрица пересечений $\|C_i \cdot C_j\|$ отрицательно определена. Более того, существует лишь конечное число таких кривых. Для некоторых $\delta_i > 0$ дивизор $D - \sum \delta_i C_i$ обилен.*

Доказательство. Пусть $F = \sum \delta_i C_i$ такой, что $F^2 \le 0$. Запишем $F = F^+ - F^-$. Тогда $F^2 = (F^+)^2 + (F^-)^2 - 2F^+ \cdot F^- \ge (F^+)^2 + (F^-)^2$. Следовательно, мы можем считать, что F эффективен. По теореме Ходжа об индексе $F \equiv 0$. Противоречие.

Для доказательства последней части для обильного дивизора A решим систему уравнений $A \cdot C_j = C_j \cdot \sum \delta_i C_i$. Положим $N = \sum \delta_i C_i$. Тогда $N \cdot C_j > 0$. Так как D объемен, то $D - \epsilon N \sim_{\mathbb{Q}} R$, где $R \ge 0$. Если $(D - \epsilon N) \cdot C \le 0$ для некоторой кривой C, то $C \ne C_i$. Следовательно, C – компонента R и имеется лишь конечное число таких кривых. Возьмем $\epsilon > 0$ так, что $D \cdot C > \epsilon N \cdot C$. □

10 Разложение Зарисского и конечная порожденность дивизориальных алгебр

Предложение 7 ([Zar62]). *Пусть X – неособая поверхность и пусть D – численно эффективный объемный дивизор на X. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *алгебра $R(X, D)$ конечно порождена;*

(2) $\operatorname{Fix}|nD| = \emptyset$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}$*;*

(3) $\operatorname{Bs}|nD| = \emptyset$ *для некоторого* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. (3) $\Longrightarrow$ (2) очевидно. (3) $\Longrightarrow$ (1) доказано.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Мы можем считать, что $\operatorname{Fix}|D| = \emptyset$ и $D^2 > 0$. Таким образом, D численно эффективен и объемен (см. предложение 6). Заменяя D на пропорциональный, мы можем считать, что $D = A + N$, где A – очень обильный дивизор, а $N = \sum n_i N_i$ – целый эффективный дивизор такой, что $D \cdot N_i = 0$. Тогда $\operatorname{Bs}|D| \subset \operatorname{Supp}(N)$. Пусть $P \in \operatorname{Bs}|D|$ и пусть $P \in N_i$. Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathscr{O}_X(nD - N_i)) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, \mathscr{O}_X(nD)) \xrightarrow{\beta} H^0(N_i, \mathscr{O}_{N_i}(nD))$$

Так как $\operatorname{Fix}|nD| = \emptyset$, то α не является изоморфизмом. С другой стороны, $\mathscr{O}_{N_i}(nD) \simeq \mathscr{O}_{N_i}$ и поэтому $\dim H^0(N_i, \mathscr{O}_{N_i}(nD)) = 1$. Следовательно, β сюръективно. Ненулевое сечение $\mathscr{O}_{N_i}(nD) \simeq \mathscr{O}_{N_i}$ дает нам сечение $H^0(X, \mathscr{O}_X(nD))$, которое не обращается в нуль в P.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Предположим, что алгебра $R(X, D)$ порождена конечным числом (однородных) элементов $u_1, \dots, u_r$ и $\operatorname{Fix}|nD| \neq \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 11. *Пусть D – численно эффективный объемный дивизор. Тогда кратности компонент $\operatorname{Fix}|nD|$ ограничены при $n \to \infty$.*

Доказательство. Мы можем считать, что $\dim |D| > 0$. Пусть E_i – неподвижные компоненты $|D|$. Выберем очень обильный дивизор H такой, что дивизоры $H - K_X - E_i$ обильны для всех E_i и $H^1(\mathscr{O}_X(D + H - E_i)) = 0$ (теорема Серра). По теореме Римана-Роха

$$h^0(E_i, \mathscr{O}_{E_i}(D + H)) \geq (mD + H) \cdot E_i - p_a(E_i) + 1 > 0.$$

Так как $H^1(\mathscr{O}_X(mD + H - E_i)) = 0$. то из точной последовательности

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_X(mD + H - E_i)) \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_X(mD + H)) \\ \longrightarrow H^0(\mathscr{O}_{E_i}(mD + H)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

получаем, что E_i не является неподвижной компонентой линейной системы $|mD + H|$. Следовательно, линейная система $|mD + H|$ не имеет неподвижных компонент при $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Наконец, так как D объемен, то для некоторого $a \in \mathbb{N}$ имеем $aD \sim H + F$, где F – эффективный дивизор. Поэтому дивизор $\operatorname{Fix} |(a + m)D| = \operatorname{Fix} |F + H + mD|$ ограничен дивизором F. $\square$

Пусть $d_i = \deg u_i$ и $d := \max\{d_1, \ldots, d_r\}$. Тогда векторное пространство $H^0(\mathscr{O}_X(nD))$ порождается мономами вида

$$u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} \cdots u_r^{\nu_r},$$

где

$$\nu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad \sum_{i=1}^{r} d_i \nu_i = n.$$

Поэтому

$$\operatorname{Fix} |nD| \geq \operatorname{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{r} \nu_i \operatorname{Fix} |d_i D| \;\middle|\; \sum_{i=1}^{r} d_i \nu_i = n \right\}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d!}{k}\operatorname{Fix}|kD| \geq \operatorname{Fix}|d!D| \neq 0$$

для всех $k = 1, \dots, d$. Таким образом, дивизоры $\operatorname{Fix}|d_1 D|, \dots, \operatorname{Fix}|d_r D|$ имеют по крайней мере одну общую компоненту, что и дает нам противоречие.

$\square$

Получаем следующий критерий.

Теорема 10 ([Zar62]). *Пусть X – поверхность и пусть D – эффективный по модулю $\mathbb{Q}$-линейной эквивалентности $\mathbb{Q}$-Картье дивизор на X. Тогда алгебра $R(X, D)$ не является конечно порожденной, если и только если $\kappa(X, D) = 2$ и линейная система $|nP|$ имеет неподвижные компоненты для любого $n > 0$.*

Пример (Зарисский). Рассмотрим неособую кубическую кривую $C \subset \mathbb{P}^2$. Выберем 12 точек $P_1, \dots, P_{12} \in C$ таким образом, что дивизор $\mathscr{O}_C(4) - \sum P_i$ не является кручением в $\operatorname{Pic}(C)$. Пусть $\sigma\colon X \to \mathbb{P}^2$ – раздутие точек $P_1, \dots, P_{12}$ и пусть $E_1, \dots, E_{12}$ – соответствующие исключительные дивизоры. Положим $D := \sigma^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(4) - \sum E_i$. Нетрудно показать, что дивизор D эффективен, численно эффективен и объемен. Следовательно, в разложении Зарисского мы имеем $N = 0$. Более того, $D \cdot \widetilde{C} = 0$ и собственный прообраз $\widetilde{C} := \sigma^{-1}(C)$ кривой C – неподвижная компонента линейной системы $|nD|$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (иначе $nD|_{\widetilde{C}} = 0$). Поэтому D удовлетворяет условиям предложения 7 и алгебра $R(X, D)$ не является конечно порожденной.

11 Минимальные и канонические модели

. . . .

12 Рациональные кривые на алгебраических многообразиях

Теорема 11. *Пусть X – неособое n-мерное проективное многообразие такое, что K_X не является численно эффективным. Тогда на X существует рациональная кривая Γ такая, что $0 < -K_X \cdot \Gamma \leq n+1$.*

Теорема 12. *Пусть C – полная неособая кривая рода g и пусть $\nu : C \to X$ – непостоянный морфизм в неособое n-мерное проективное многообразие X. Предположим, что выполнено одно из следующих*

(1)

$g > 0$ и $\deg \nu^*(-K_X) \geq ng + 1$ или

(2) *$g = 0$ и $\deg \nu^*(-K_X) \geq n + 2$.*

Тогда существует семейство кривых $\mathfrak{C}_t \subset X$, параметризованное (связной) одномерной базой $\mathfrak{T}$ такое, что $\mathfrak{C}_0 \simeq \nu_*(C)$ для некоторого $0 \in \mathfrak{T}$ и для некоторого $\infty \in \mathfrak{T}$ кривая $\mathfrak{C}_\infty$ приводима и имеет рациональную кривую своей компонентой: $\mathfrak{C}_\infty = \lambda_*(C) + \sum n_i Z_i$, где $\lambda : C \to X$ – некоторый морфизм, а Z_i – рациональные кривые.

Замечание. Возьмем $\epsilon >$ и обильный дивизор A. Предположим, что $(K_X + \epsilon A) \cdot \nu_* C < 0$. Тогда или $(K_X + \epsilon A) \cdot \lambda_* C < 0$ или $(K_X + \epsilon A) \cdot Z_i < 0$ для некоторого Z_i.

Доказательство. Предположим, что $g > 0$. Зафиксируем точки $P \in C$ и $Q \in \nu(C)$. Из (1) получаем $\dim \mathrm{Hom}_{[\nu]}(C, X, P \to Q) \geq 1$. Следовательно, существует неособая кривая $\Delta \ni 0$ и морфизм

$$\phi : C \times \Delta \to X, \qquad (c, \delta) \longmapsto \delta(c).$$

такой, что $\phi|_{C \times \{0\}} = \nu$ и $\phi(\{P\} \times \Delta) = Q$. Рассмотрим проективную неособую компактификацию $\bar{\Delta} \supset \Delta$. Имеем рациональное отображение

$$\bar{\phi} : C \times \bar{\Delta} \dashrightarrow X.$$

Если $\bar{\phi}$ – морфизм, то имеется факторизация Штейна

$$\bar{\phi} : C \times \bar{\Delta} \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} X$$

где морфизм α должен быть бирациональным. Так как $\alpha(\{P\} \times \Delta)$ – точка, то мы получаем противоречие с отрицательной определенностью матрицы пересечений исключительных дивизоров. Поэтому $\bar{\phi}$ не может быть морфизмом. Имеется разрешение (график)

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ C \times \bar{\Delta} \arrow[rr, dashed, "\bar{\phi}"] & & X \end{tikzcd}$$

По лемме ниже, примененной к α, образ W – нужное семейство.

Лемма 12. *Пусть $f : W \to V$ – бирациональный морфизм поверхностей, где поверхность V неособа. Тогда любой нетривиальный слой $f^{-1}(v)$, $v \in V$ – объединение рациональных кривых.*

Доказательство. Заменим $W \to V$ на разрешение $W' \to W \to V$. Тогда $K_W = f^*K_V + \sum a_i E_i$, $a_i > 0$. Дивизор $\sum a_i E_i$ не является численно эффективным. Поэтому $\exists i \quad K_W \cdot E_i < 0$ и $E_i^2 < 0 \Longrightarrow E_i \simeq \mathbb{P}^1$. Стягиваем E_i и продолжаем процесс. Далее как выше. $\square$

Предположим, что $g = 0$. Зафиксируем точки $P_1, P_2 \in C$ и $Q_1, Q_2 \in \nu(C)$. Из (2) получаем $\dim \mathrm{Hom}_{[\nu]}(C, X, P_1 \to Q_1, P_2 \to Q_2) \geq 2$. Следовательно, существует неособая кривая $\Delta \ni 0$ и морфизм

$$\phi : C \times \Delta \to X, \qquad (c, \delta) \longmapsto \delta(c).$$

такой, что $\phi|_{C \times \{0\}} = \nu$ и $\phi(\{P_i\} \times \Delta) = Q_i$. Он продолжается до рационального отображения $\bar{\phi} : C \times \bar{\Delta} \dashrightarrow X$, которое не может быть морфизмом. $\square$

Условие $\deg \nu^*(-K_X) \geq ng + 1$.

Наводящее соображение. Предположим, что $g = 1$, т.е. C – эллиптическая кривая. Пусть $\pi : C \to C$ – умножение на $m \gg 0$ и пусть $\nu' := \nu \circ \pi$. Тогда $\deg \nu'^*(-K_X) = m^2 \deg \nu^*(-K_X) \gg 0$.

Пусть теперь $\mathrm{char}\, \Bbbk = p > 0$. Рассмотрим морфизм Фробениуса $\pi : C \to C$ и пусть $\nu' := \nu \circ \pi^m$. Тогда $\deg \nu'^*(-K_X) = p^m \deg \nu^*(-K_X) \gg 0$.

Следствие 6. *Пусть X – неособое n-мерное проективное многообразие над полем $\Bbbk$ с $\mathrm{char}\, \Bbbk = p > 0$ и пусть $C \subset X$ – полная неособая кривая. Тогда на X существует рациональная кривая Γ такая, что $0 < -K_X \cdot \Gamma \leq n + 1$ и $0 < -(K_X + \varepsilon A) \cdot \Gamma$.*

Подъем в характеристику 0.

Все заданные объекты определены над некоторым кольцом, конечно порожденным над $\mathbb{Z}$. Таким образом, мы считаем, что X и C – схемы над $\operatorname{Spec} R$. Если $\mathfrak{m} \subset R$ – максимальный идеал, то $R/\mathfrak{m}$ – конечное поле $\mathbb{F}_q$. Рассмотрим компоненту $H \subset \operatorname{Hilb}_R(X)$, параметризующую рациональные кривые на X с условием $0 < A \cdot \Gamma \leq \operatorname{const}$ для некоторого обильного A (см. замечание). Эта компонента является квизипроективной схемой над $\operatorname{Spec} R$. Для почти всех замкнутых точек $\mathfrak{m} \subset R$ слой над $\operatorname{Spec} R/\mathfrak{m}$ имеет замкнутую $R/\mathfrak{m}$-точку. Отсюда следует, что и H имеет замкнутую $\Bbbk$-точку, где $\Bbbk$-алгебраическое замыкание поля частных R. Действительно, рассмотрим систему уравнений, задающую H (с коэффициентами в R). Исключая неизвестные при помощи результантов, получим набор уравнений вида $f_i = 0$, где каждая неизвестная появляется не более чем в одном уравнении. [1] Так как система совместна для почти всех $\mathfrak{m} \subset R$, то она не содержит уравнений вида $f_i = 0$, где f_i – ненулевой многочлен степени 0. Такая система должна быть совместна над $\Bbbk$.

13 Теория экстремальных лучей

Пусть X – нормальное проективное многообразие. В пространстве $N_1(X)$ рассмотрим выпуклый конус $NE(X)$, порожденный всеми эффективными 1-циклами. Обозначим через $\overline{NE}(X)$ его замыкание. Таким образом, $\overline{NE}(X)$ – замкнутый выпуклый конус в конечномерном вещественном пространстве $N_1(X)$. Он называется *конусом Мори*. Более того, $\overline{NE}(X)$ порождает $N_1(X)$. Отметим однако, что элементы $\overline{NE}(X)$ необязательно представляются эффективными 1-циклами и необязательно имеют рациональные коэффициенты. Каждый дивизор $\mathbb{Q}$-Картье определяет линейную функцию на

[1] Оставляется в качестве упражнения доказать, что этот шаг корректен.

$N_1(X)$.

Теорема 13 (критерий обильности Клеймана). *Дивизор Картье H обилен тогда и только тогда, когда он определяет строго положительную функцию на $\overline{NE}(X) \setminus \{0\}$.*

Задача. Выведите критерий Клеймана из критерия Накаи-Мойшезона в случае поверхностей.

Следствие 7. *Конус $\overline{NE}(X)$ не содержит прямых.*

Луч $R = \mathbb{R}_+[z] \subset \overline{NE}(X)$ называется *экстремальным*, если из того, что $z_1 + z_2 \in R$, для некоторых элементов $z_1, z_2 \in \overline{NE}(X)$, следует, что $z_1, z_2 \in R$.

Пример. Если $\rho(X) = 2$, то конус $\overline{NE}(X)$ – это угол на плоскости $N_1(X) \simeq \mathbb{R}^2$. В этом случае имеются ровно два экстремальных луча.

Лемма 13. *Конус $\overline{NE}(X)$ порождается экстремальными лучами.*

Доказательство. Действительно, утверждение следует из общего факта выпуклой геометрии: любой замкнутый выпуклый конус $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, не содержащий прямых, порождается своими экстремальными лучами. Этот факт доказывается индукцией по размерности линейной оболочки конуса. □

Следствие 8. *Дивизор Картье H обилен тогда и только тогда, когда $H \cdot R > 0$ для любого экстремального луча $R \subset \overline{NE}(X)$.*

Предложение 8. *Пусть X – нормальная проективная поверхность.*

(1) *Пусть $z \in N_1(X)$ – ненулевой элемент. Если $z^2 > 0$ и $z \cdot H > 0$ для некоторого обильного дивизора H, то z принадлежит внутренности конуса $\overline{NE}(X)$.*

(2) *Пусть* $C \subset X$ – *неприводимая кривая. Если* $C^2 \le 0$, *то класс* $[C]$ *лежит на границе* $\overline{NE}(X)$. *Если* $C^2 < 0$, *то* $[C]$ *порождает экстремальный луч.*

(3) *Пусть* $R \subset \overline{NE}(X)$ – *экстремальный луч. Следующие условия эквивалентны*:

(a) $R^2 < 0$,

(b) $R \cdot C < 0$ *для некоторой кривой* C,

(c) $R^2 < 0$ *и* R *порожден классом (неприводимой) кривой.*

Доказательство. (i) Условия $z^2 > 0$ и $z \cdot H > 0$ открыты, поэтому они выполнены в некоторой окрестности $U_{\varepsilon,z} \subset N_1(X)$. Возьмем рациональный элемент $z' \in U_{\varepsilon,z}$ (т.е. $z' = [Z']$, где Z' – элемент с рациональными коэффициентами). Тогда nZ' – целый дивизор Картье для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Согласно нашим условиям имеем $Z'^2 > 0$ и $H \cdot Z' > 0$. По лемме Кодаиры для $m \gg 0$ имеем $h^0(\mathscr{O}_X(mnZ')) > 0$. Таким образом, класс z' представляется эффективным циклом. Это доказывает утверждение.

(ii) Каждый численно эффективный дивизор, не являющийся обильным, высекает на выпуклом конусе $\overline{NE}(X)$ некоторую грань F. Если $C^2 = 0$, то поскольку C – неприводимая кривая, то ее класс $[C]$ численно эффективен и лежит в грани F. Пусть $C^2 < 0$. Рассмотрим конус $\mathcal{K} := \{z \mid z \cdot C \ge 0\} \cap \overline{NE}(X)$. Этот конус содержит классы всех неприводимых кривых $L \ne C$. Поэтому $\overline{NE}(X)$ порождается $\mathcal{K}$ и $\mathbb{R}_+[C]$. Это доказывает, что $\mathbb{R}_+[C]$ – экстремальный луч.

(iii) Возьмем ненулевой элемент $z \in R$ и рассмотрим последовательность эффективных циклов $Z^{(i)}$ такую, что $\lim[Z^{(i)}] = z$.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Пусть $R^2 < 0$. Запишем $Z^{(i)} = \sum_j a_{ij} C_j$, где C_j – неприводимые кривые, а $a_{ij} \ge 0$. Так как $0 > z^2 = \lim z \cdot Z^{(i)}$, то существует неприводимая кривая $C = C_j$ такая, что $C \cdot Z < 0$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Пусть $R \cdot C < 0$. Мы можем считать кривую C неприводимой. Для $i \gg 0$ имеем $C \cdot Z^{(i)} < 0$. Поэтому $C^2 < 0$. Запишем $Z^{(i)} = \alpha_i C + Z'^{(i)}$, где $\alpha_i \geq 0$, цикл $Z'^{(i)}$ эффективен и C не является компонентой $Z'^{(i)}$. Для любого обильного дивизора H имеем $Z^{(i)} \cdot H \leq \mathrm{Const}$ и $Z^{(i)} \cdot H \geq 0$. Поэтому все α_i ограничены сверху. Переходя к подпоследовательности можно считать, что α_i сходится: $\lim \alpha_i = \alpha$. Положим $z' := z - \alpha[C]$. Тогда элемент $z' = \lim Z'^{(i)}$ принадлежит $\overline{NE}(X)$. Так как $C \cdot Z'^{(i)} \geq 0$, то $C \cdot z' \geq 0$. Отсюда $\alpha > 0$. По определению экстремального луча $[C] \in R$. □

Следствие 9. *Если существует экстремальный луч R такой, что $R^2 > 0$, то $\rho(X) = 1$.*

Теорема 14. *Пусть X – неособая поверхность и пусть R – экстремальный луч на X такой, что $K_X \cdot R < 0$. Возможны следующие случаи:*

(1) *$R^2 > 0$, тогда $\rho(X) = 1$, дивизор $-K_X$ обилен, следовательно, $X \simeq \mathbb{P}^2$;*

(2) *$R^2 < 0$, тогда $R = \mathbb{R}_+[C]$, где C – неприводимая кривая. Так как $C^2 < 0$ и $C \cdot K_X < 0$, то C – (-1)-кривая;*

(3) *$R^2 = 0$, тогда X имеет структуру линейчатой поверхности и R порождается ее слоями (т.е. X – проективизация векторного расслоения ранга 2 на неособой кривой Γ).*

Следующий факт показывается тем же методом, что и теорема о существовании рациональных кривых.

Теорема 15 (теорема о конусе)**.** *Пусть X – неособое проективное многообразие, и пусть H – обильный дивизор $\mathbb{Q}$-Картье на X. Для любого $\varepsilon > 0$ существует не более конечного числа экстремальных лучей $R_i \subset \overline{NE}(X)$ таких, что $(K_X + \varepsilon H) \cdot R_i < 0$. Каждый луч*

R_i порождается классом неприводимой кривой C_i. Конус $\overline{NE}(X)$ порождается конусом $\overline{NE}(X) \cap \{z \mid (K_X + \varepsilon H) \cdot z \geq 0\}$ и лучами R_i.

Теорема 16 (теорема о стягивании)**.** *Пусть $R \subset \overline{NE}(X)$ – экстремальный луч такой, что $K_X \cdot R < 0$. Тогда существует стягивание $f\colon X \to Z$ луча R.*

14 Критерий рациональности Кастельнуово

Теорема 17. *Пусть X – неособая проективная поверхность. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$P_2(X) = q(X) = 0$;*

(2) *X рациональна.*

Доказательство. Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (i) очевидна, поскольку $P_2(X)$ и $q(X)$ являются бирациональными инвариантами. Докажем (i) $\Longrightarrow$ (ii). Мы можем считать, что X не содержит (-1)-кривых. По теореме Римана-Роха

$$h^0(X, -K_X) = h^0(X, -K_X) + h^0(X, 2K_X) \geq K_X^2 + 1 - q + p_g = K_X^2.$$

Если K_X численно эффективен, то $K_X^2 \geq 0$, $|-K_X| \neq \emptyset$. Это возможно только если $K_X \sim 0$ и $p_g = 1$. Противоречие. Следовательно, K_X не численно эффективен и тогда существует рациональная кривая C такая, что $-K_X \cdot C > 0$. По нашему предположению $\mu(X) \neq 1$. Следовательно, $\mu(X) = 3$ (и тогда $X \simeq \mathbb{P}^2$) или $\mu(X) = 2$ (и тогда X бирационально эквивалентно $C \times \mathbb{P}^1$). Во втором случае $C \simeq \mathbb{P}^1$ так как $q = 0$. □

Следствие 10 (Проблема Люрота)**.** *Пусть X – алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем характеристики* 0*. Если X унирациональна, то она рациональна.*

Список литературы

[Fuj79] Takao Fujita. On Zariski problem. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 55(3):106–110, 1979.

[Zar62] Oscar Zariski. The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. *Ann. of Math. (2)*, 76:560–615, 1962.